Numerické metody z mé diplomové práce

Shallow water equations a jak na ně

David Einšpigel

Shallow water equations

- elevace vodní hladiny (rovnice kontinuity)

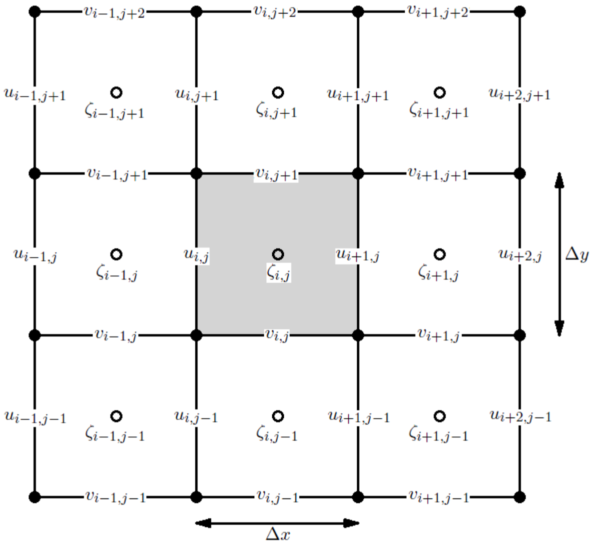
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

- pohybové rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial U \bar{v}}{\partial y} = & - gh \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{k}{h^2} U \sqrt{U^2 + V^2} + fV + \\
& 2A_H \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + A_H \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\
\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial V \bar{v}}{\partial y} = & - gh \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{k}{h^2} V \sqrt{U^2 + V^2} - fU + \\
& A_H \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + h \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) + 2A_H \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

kde $U = h\bar{u}$, $V = h\bar{v}$ a $f = 2\Omega \sin \phi$

Konečné diference - Arakawa C-grid



Jaké časové schéma?

- *explicitní* – jednoduché, ale nestabilní, omezené Courantovo-Fridrichsovo-Lewyho kritériem (CFL)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2gh}}$$

Jaké časové schéma?

- *explicitní* – jednoduché, ale nestabilní, omezené Courantovo-Fridrichsovo-Lewyho kritériem (CFL)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2gh}}$$

- *implicitní* – stabilní, nezávislé na CFL, ale nepřesné, dochází k tlumení amplitud

Jaké časové schéma?

- *explicitní* – jednoduché, ale nestabilní, omezené Courantovo-Fridrichsovo-Lewyho kritériem (CFL)

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{2gh}}$$

- *implicitní* – stabilní, nezávislé na CFL, ale nepřesné, dochází k tlumení amplitud
- *semi-implicitní* – stabilní, nezávislé na CFL, nedochází k tlumení, základ je Crankovo-Nicolsonové schéma, tj. prostorové derivace jsou počítány na časové hladině $n + 1/2$:

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{n+1/2} &= (\zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j}^{n})/2 \\ U_{i,j}^{n+1/2} &= (U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j}^{n})/2 \\ V_{i,j}^{n+1/2} &= (V_{i,j}^{n+1} + V_{i,j}^{n})/2 \end{aligned}$$

Hlavní idea semi-implicitního schématu

- Rovnice napíšeme v semi-implicitní aproximaci:

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} - \Delta t \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1/2} - V_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = -g h_{i,j}^{x} \Delta t \frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + X_{i,j}^{n}$$

$$V_{i,j}^{n+1} = -g h_{i,j}^{y} \Delta t \frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} + Y_{i,j}^{n}$$

- Dosadíme $U_{i,j}^{n+1}$ a $V_{i,j}^{n+1}$ do rovnice kontinuity a dostaneme soustavu lineárních rovnic pro vodní elevaci:

$$c_1 \zeta_{i+1,j}^{n+1} + c_2 \zeta_{i-1,j}^{n+1} + c_3 \zeta_{i,j}^{n+1} + c_4 \zeta_{i,j+1}^{n+1} + c_5 \zeta_{i,j-1}^{n+1} = R_{i,j}^{n}$$

- Musíme však dát pozor na některé problematické členy!

Tření na dně – explicitní formulace

- Tření na dně je vyjádřeno kvadraticky:

$$\tau^x = \frac{k}{h^2} U \sqrt{U^2 + V^2}$$

- Uvažujme jednoduchý tvar pohybové rovnice

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (X^n - \tau^x)$$

- Pokud třecí člen vyjádříme explicitně

$$\tau^x = k U^n (\sqrt{U^2 + \bar{V}^2} / h_x^2)^n$$

, pak pohybová rovnice bude mít tvar

$$U^{n+1} = U^n (1 - k \Delta t (\sqrt{U^2 + \bar{V}^2} / h_x^2)^n) + \Delta t X^n$$

- Pro silné proudy v mělkých vodách bude nestabilní!

Tření na dně – semi-implicitní formulace

- $U^{n+1} = U^n + \Delta t(X^n - \tau^x)$
- Pokud třecí člen vyjádříme semi-implicitně

$$\tau^x = kU^{n+1}(\sqrt{U^2 + \bar{V}^2}/h_x^2)^n$$

, pak pohybová rovnice má tvar

$$U^{n+1}(1+k\Delta t(\sqrt{U^2 + \bar{V}^2}/h_x^2)^n) = U^n + \Delta t X^n$$

- Zavedeme bezrozměrnou třecí funkci

$$F^x = \frac{1}{1 + k\Delta t(\sqrt{U^2 + \bar{V}^2}/h_x^2)^n}$$

a vesele můžeme psát

$$U^{n+1} = F^x(U^n + \Delta t X^n)$$

Aproximace Coriolisova členu

- Mějme jednoduchou soustavu rovnic s explicitně vyjádřeným Coriolisovým členem:

$$U^{n+1} = U^n + fV^n\Delta t,$$
$$V^{n+1} = V^n - fU^n\Delta t.$$

- Velikost vektoru rychlosti $(U^2 + V^2)$ by měla být konstantní, jenže

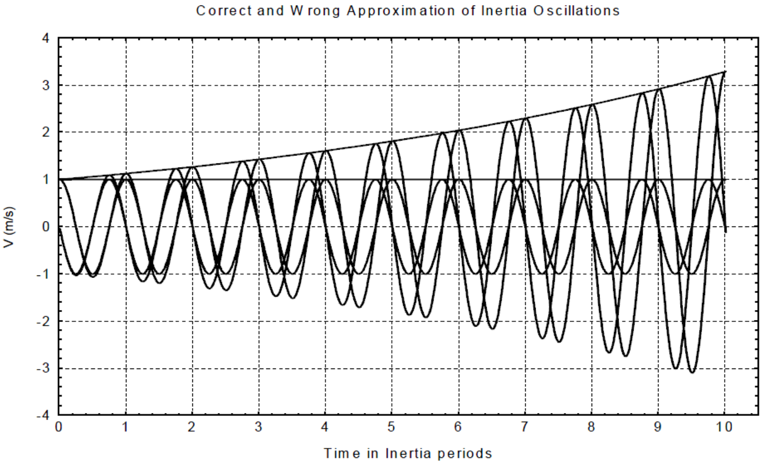
$$(U^{n+1})^2 + (V^{n+1})^2 = ((U^n)^2 + (V^n)^2)(1 + (f\Delta t)^2)$$

- Jednoduché řešení – rotační matice:

$$\begin{pmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^n \\ V^n \end{pmatrix}$$

kde $\alpha = \cos(f\Delta t)$ a $\beta = \sin(f\Delta t)$, $(U^2 + V^2)$ je nyní konstantní.

Aproximace Coriolisova členu



Legend: time series of velocity-components (u,v) of inertia oscillations. The non-conservative approximation grows by a factor of 3 within 10 Inertia periods whereas the conservative one retains its initial amplitude.

Suma sumárum

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^{n} - \Delta t \left(\frac{U_{i+1,j}^{n+1/2} - U_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^{n+1/2} - V_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta y} \right)$$

$$U_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^{x} \left[\alpha\, U_{i,j}^{n} + \beta\, \bar{V}_{i,j}^{n} - g h_{i,j}^{x} \Delta t \frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta x} + X_{i,j}^{n} \Delta t \right]$$

$$V_{i,j}^{n+1} = F_{i,j}^{y} \left[-\beta\, \bar{U}_{i,j}^{n} + \alpha\, V_{i,j}^{n} - g h_{i,j}^{y} \Delta t \frac{\zeta_{i,j}^{n+1/2} - \zeta_{i,j-1}^{n+1/2}}{\Delta y} + Y_{i,j}^{n} \Delta t \right]$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 \zeta_{i+1,j}^{n+1} + c_2 \zeta_{i-1,j}^{n+1} + c_3 \zeta_{i,j}^{n+1} + c_4 \zeta_{i,j+1}^{n+1} + c_5 \zeta_{i,j-1}^{n+1} = R_{i,j}^{n}$$

Iterační metody

- Soustava lineárních rovnic pro ζ je obvykle příliš velká, než aby se dala řešit přímo, třeba LU rozkladem.
- *Kde nemožeš jehlů, vem vidle!*
- Použijeme iterační metodu! Mějme soustavu rovnic $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$
  - *Jacobiho metoda*:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

  - *Gaußova-Seidelova metoda*:

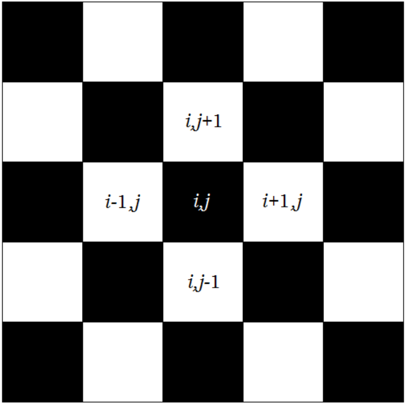
$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right)$$

  - *Successive over relaxation (SOR)*:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} \right)$$

Chessboard SOR

$$c_1\zeta_{i+1,j}^{n+1} + c_2\zeta_{i-1,j}^{n+1} + c_3\zeta_{i,j}^{n+1} + c_4\zeta_{i,j+1}^{n+1} + c_5\zeta_{i,j-1}^{n+1} = R_{i,j}^{n}$$



Chessboard SOR

Černé buňky:

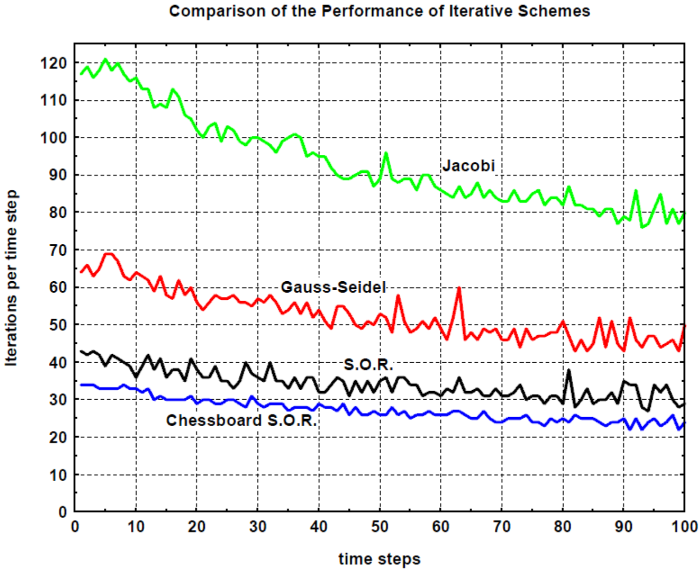
$$\zeta_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\zeta_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{c_3}\left(R_{i,j}^{n} - c_1\zeta_{i+1,j}^{(k)} - c_2\zeta_{i-1,j}^{(k)} - c_4\zeta_{i,j+1}^{(k)} - c_5\zeta_{i,j-1}^{(k)}\right)$$

Bílé buňky:

$$\zeta_{i,j}^{(k+1)} = (1-\omega)\zeta_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{c_3}\left(R_{i,j}^{n} - c_1\zeta_{i+1,j}^{(k+1)} - c_2\zeta_{i-1,j}^{(k+1)} - c_4\zeta_{i,j+1}^{(k+1)} - c_5\zeta_{i,j-1}^{(k+1)}\right)$$

$\Rightarrow$ Zrychlení SOR, možnost paralelizace

Srovnání iteračních metod

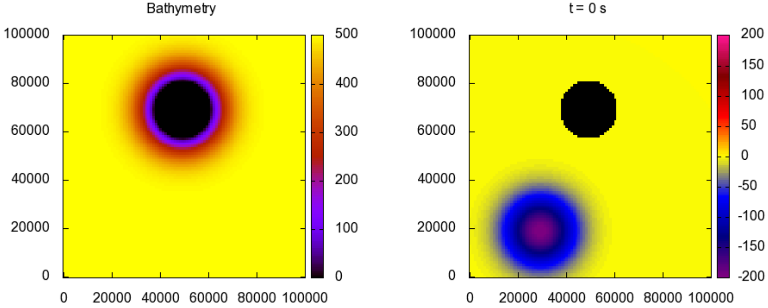


Šedá je teorie, zelený strom života

Jak pravil Mefistofeles:

> *„Šedá, můj příteli, je všechna teorie,*
> *a žití zlatý strom se zelená.“*
>
> *Johann Wolfgang von Goethe: Faust*

Nerealistický příklad z alternativního vesmíru



Efemeridní slapový modul

- NOVAS F3.1 – volně dostupný soubor subroutin ve Fortranu 77 pro počítaní efemeridů
- Subroutiny také v C a Pythonu
- U.S. Naval Observatory
- `http://www.usno.navy.mil/USNO/astronomical-applications/software-products/novas`

Děkuji za pozornost