



# Predikce pohybů rotační osy řešením Liouvillovy rovnice

Mgr. Vojtěch Patočka

Univerzita Karlova v Praze

*[patocka@karel.troja.mff.cuni.cz]*

September 9, 2013



# Obsah

- 1 Liouvillova rovnice
  - Úvod
  - Odvození
  - Cíl práce
- 2 Rotační deformace
  - Rovnice
  - Spektrální / konečně-diferenční metoda
  - Rotační equilibrium
- 3 Schéma propojení
  - Tvar soustavy ODR
  - Schéma propojení
- 4 Výsledky počítačového modelování
  - Problém úlohy
  - Umělé zatížení
  - Závěr



## Liouvillova rovnice

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}) + \vec{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}) = \vec{L}$$

- Výstup: časový vývoj polohy rotačního vektoru  $\vec{\omega}(t)$
- Vstup:  $\mathbf{J}(t)$ ,  $\vec{h}(t)$ ,  $\vec{L}(t)$



## Řešený tvar rovnice

### Volba souřadné soustavy

Pro deformující se těleso není spojení soustavy s tělesem tak přímočaré, jako je tomu pro tuhé těleso. Volíme Tisserandovu soustavu,  $\vec{h}(t) = 0$ .

### Aproximace

Rovnici řešíme v aproximaci nulového momentu vnějších sil,  $\vec{L}(t) = 0$ . Pro účely určování polohy tělesa ze spočteného  $\vec{\omega}(t)$  je důležité především zanedbání dlouhoperiodické precese.

### Výsledný tvar řešené rovnice

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J} \cdot \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \vec{\omega}) = 0$$



# Odvození

[Martinec, 2003]

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{inertial} = \vec{L}$$

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{inertial} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{non-inertial} + \vec{\omega} \times \vec{H}$$

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{non-inertial} + \vec{\omega} \times \vec{H} = \vec{L}$$

$$\vec{H} = \mathbf{J} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}) + \vec{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \vec{\omega} + \vec{h}) = \vec{L}$$



## Alternativní odvození

### Přínos

V práci je předvedeno alternativní odvození Liouvillovy rovnice, založené na vyjádření efektu nepravých sil, píšeme-li druhou větu impulzovou přímo v soustavě spojené s tělesem.

Výchozí rovnicí je tentokrát [Martinec, 2003]:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \vec{r} \times \vec{v} \rho \, dv = \oint_{s(t)} \vec{r} \times \vec{t}_{(\vec{n})} \, da + \int_{v(t)} \vec{r} \times \vec{f} \rho \, dv,$$



Po rozložení sil na externí, interní a nepravé:

$$\vec{f} = \vec{f}_{\text{ext}} + \vec{f}_{\text{int}} + \vec{f}_{\text{fic}}$$

dostáváme

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = \vec{L} + \int_{v(t)} \vec{r} \times \vec{f}_{\text{int}} \rho dV + \int_{v(t)} \vec{r} \times \vec{f}_{\text{fic}} \rho dV,$$

efekt odstředivé, Coriolisovy a Eulerovy síly

$$\int_{v(t)} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \rho dV - \int_{v(t)} \vec{r} \times (2\vec{\omega} \times \vec{v}) \rho dV - \int_{v(t)} \vec{r} \times \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right) \rho dV,$$

Ize vyjádřit pomocí zbývajících členů v Liouvillově rovnici



## Metody řešení

V geofyzice se Liouvillova rovnice pro tělesa planetárních rozměrů řeší tradičně dvěma metodami.

- Linearizované schéma, navržené v [Munk and MacDonald, 1960]
- Metoda navržená v [Ricard et al., 1993]





## Koncept práce

Řešit Liouvillovu rovnici, tedy soustavu tří ODR pro jednotlivé složky  $\vec{\omega}(t)$ , pomocí standardních numerických metod, a to bez provedení dalších aproximací (tedy pouze v aproximaci nulového momentu vnějších sil). Zjistit aplikační meze takového postupu a výsledky porovnat s aproximativními metodami.



Kromě neznámé  $\vec{\omega}(t)$  se v řešené rovnici vyskytuje pouze tenzor setrvačnosti  $\mathbf{J}(t)$ .

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J}^{proces}(t) + \mathbf{J}^{rot}$$

$\mathbf{J}^{rot}$  popisuje odezvu tělesa na časově proměnný rotační potenciál:

$$L(\vec{\omega}(t)) \rightarrow \mathbf{J}^{rot}$$

Je třeba řešit úlohu odezvy viskoelastického tělesa na vnější potenciál.



## Řešené rovnice

$$-\nabla\delta p + \nabla \cdot \mathbf{D} - (\vec{u} \cdot \nabla \rho_0) \vec{g}_0 = \rho_0 \nabla \Phi + \rho_0 \nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\mathbf{D} - (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) = -\frac{\mu}{\eta} \int_0^t \mathbf{D} dt'$$

### Značení

$\delta p$  přírůstek tlaku

$\mathbf{D}$  deviátor tenzoru napětí

$\rho_0(r)$  referenční hustotní profil

$\vec{g}_0$  referenční gravitace

$\varphi$  rotační potenciál

$\Phi$  přírůstkový grav. potenciál

$\vec{u}$  vektor posunutí

$\mu(r)$  modul torze

$\eta(r)$  viskozita



## Okrajové podmínky

Vnější povrch

$$(-\delta p \mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \vec{e}_r = u_r \rho_0 \vec{g}_0$$

Rozhraní jádro - plášť

$$-(-\delta p \mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \vec{e}_r = u_r [\rho_0] \vec{g}_0 + \rho_{core} (\varphi + \Phi) \vec{e}_r$$



## Spektrální metoda

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \Phi_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \phi), \quad \varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \varphi_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \phi)$$

$$\vec{u} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=|j-1|}^{j+1} u_{jm}^k(r) \vec{Y}_{jm}^k(\theta, \phi)$$

$$\vec{\tau} = - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \delta p_{jm}(r) \mathbf{Y}_{jm}^{j,0}(\theta, \phi) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=|j-2|}^{j+2} D_{jm}^{k,2}(r) \mathbf{Y}_{jm}^{k,2}(\theta, \phi)$$



Po dosazení a využití řady identit dostáváme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{1}{r} \mathbf{A}(r, j) \mathbf{x}(r, j, m) + \mathbf{B}(j) \frac{d\mathbf{x}(r, j, m)}{dr} = \mathbf{y}(r, j, m),$$

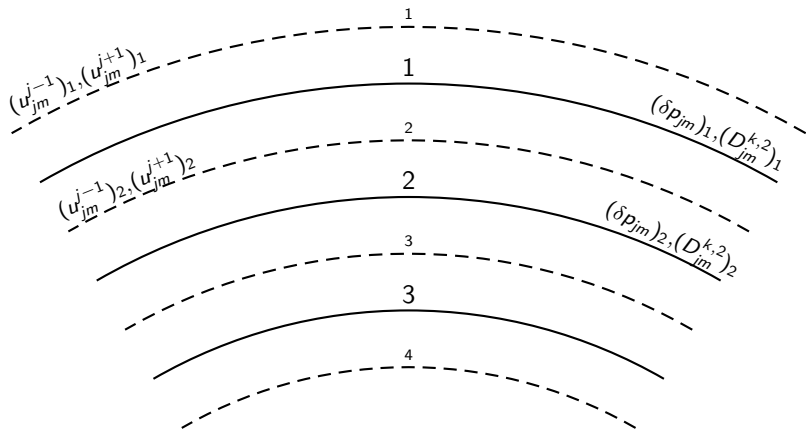
kde  $\mathbf{x}(r, j, m) = (u_{jm}^{j-1}, u_{jm}^{j+1}, \delta p_{jm}, D_{jm}^{j-2}, D_{jm}^j, D_{jm}^{j+2})$ .

Pravá strana obsahuje

- Okamžitý rotační potenciál, vyjádřený pomocí složek  $\vec{\omega}(t)$
- Paměťový člen  $-\frac{1}{\eta} \int_0^t \mathbf{D} dt'$  - počítán explicitně z předchozího časového kroku
- Přírustkový grav. potenciál  $\Phi$  - člen je počítán iterativně



# Konečně-diferenční metoda





Dostáváme tak lineární soustavu

$$\mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

přičemž matice  $\mathbb{A}$  je pásová matice.

### Přínos

Řešení viskoelastické odezvy i pro nehomogenní modely, s hloubkově závislou hustotou, viskozitou i modulem torze.





Počáteční sféricky symetrické těleso necháme rotovat s konstantní úhlovou rychlostí  $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0$ . Testováno je rotační equilibrium tří modelů.

Figure : Parametry modelu C

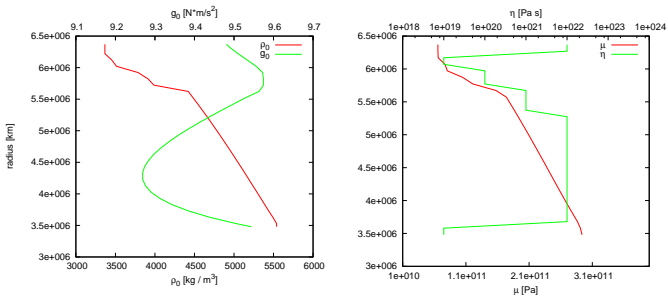


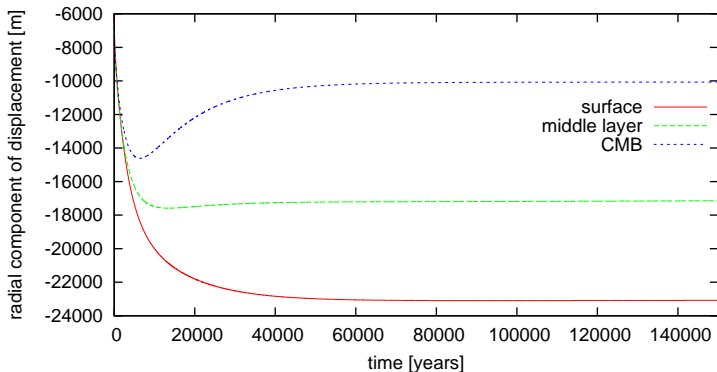
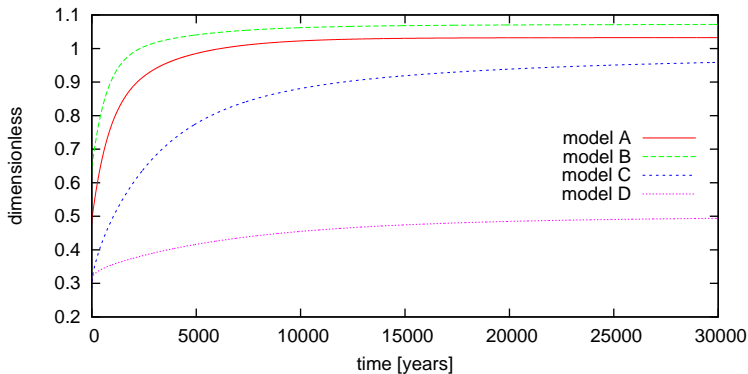
Figure : Časový vývoj  $(u_r)_{20}$  pro model C



Figure : Časový vývoj  $\frac{\Phi_{20}(t)}{\varphi_{20}(t)}$  pro modely A,B,C,D





Liouvillovu rovnici

$$-\mathbf{J} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \vec{\omega}),$$

lze napsat ve tvaru

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \left( \frac{d\mathbf{J}}{dt} \cdot \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\mathbf{J} \cdot \vec{\omega}) \right),$$

připomínajícím tradiční tvar pro soustavu ODR:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = f(\vec{\omega}, t).$$



Standardní explicitní řešiče soustav ODR vyžadují po uživateli znalost pravé strany  $f(\vec{\omega}, t)$ . Semi-implicitní řešiče navíc vyžadují parciální derivace pravé strany. Ty v našem specifickém případě musíme počítat numerickým diferencováním.

Problém představuje rotační část tenzoru setrvačnosti  $\mathbf{J} = \mathbf{J}^{proces}(t) + \mathbf{J}^{rot}$ , který je funkcí vlnění  $\vec{\omega}(t)$ .



Při každém vyžádání hodnoty  $f(\vec{\omega}, t)$  je potřeba:

- Spočítat paměťový člen. Toho docílíme explicitně

$$M_k(t) = M_k(t_n) + \frac{\mu(r)}{\eta(r)} (D_{jm}^{k,2}(r, t_n))(t - t_n).$$

K uložení hodnoty dochází pouze po úspěšném kroku.  $t_n$  je poslední úspěšně docílený čas.

- Pro danou hodnotu paměťového členu iterativně spočteme hodnotu  $\Phi$ . Je vhodné startovat z hodnoty  $\Phi$  spočtené z deformace tělesa v čase  $t_n$ .

# Numerické chování řešení

Figure : Divergence  $\omega_1(t)$  pro přílišný časový krok

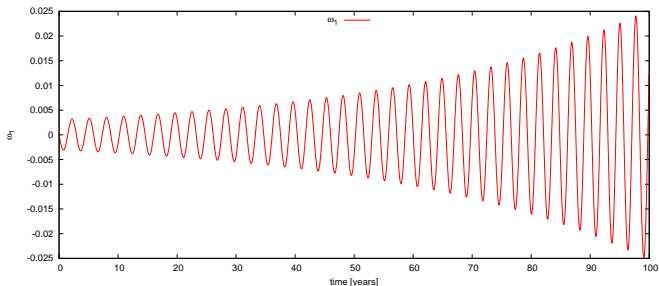
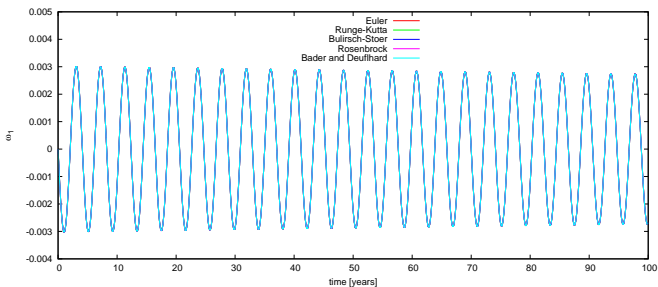




Figure :  $m_1(t)$  počítáno různými metodami při vysoké přesnosti







$$\mathbf{J}^{proces}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(\frac{\pi}{4}) & 0 & -\sin^2(\frac{\pi}{4}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin^2(\frac{\pi}{4}) & 0 & \sin^2(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} r_0^2 M_E N(t)$$

Odpovídá položení bodového tělesa o hmotnosti  $M_E$  do místa o souřadnicích  $(r_0, \frac{\pi}{4}, 0)$ . Deformace tělesa v důsledku tohoto zatížení není počítána.



Figure : 150 year evolution of  $m_1(t)$  for artificial loading process

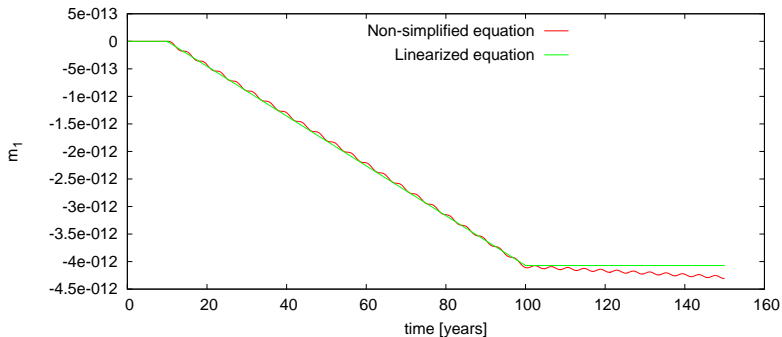
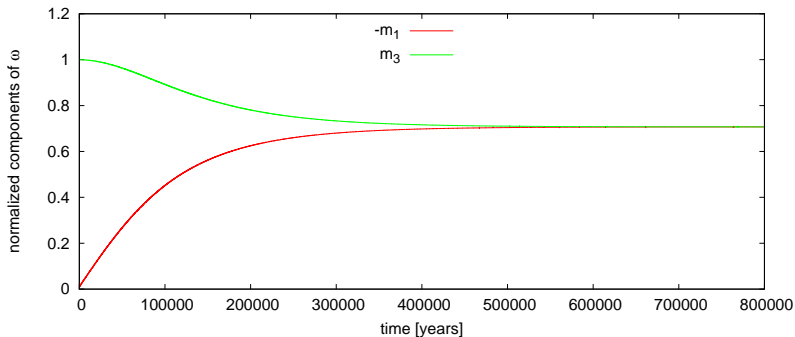




Figure : Long-term evolution of  $m_1(t), m_3(t)$  for artificial loading process





## Přínos

- Metoda neklade omezení na stabilitu rotace, umožňuje modelovat i velké výchylky rotační osy.
- Metoda zachycuje i excitaci a útlum volné nutace.

Přestože v několika bodech není zvolena optimální technika výpočtu dané veličiny, lze metodu použít i pro výpočet pohybu rotační osy pro procesy odehrávající se na škále několika milionů let.

## References



Munk W., MacDonald G. J. F.

The Rotation of the Earth: A Geophysical Discussion

*Cambridge University Press*, 1960



Ricard Y., Spada G., Sabadini R.

Polar wandering of a dynamic earth

*Geophys. J. Int.* **113** (1993), 284-298.



Martinec Z.

Continuum Mechanics - Lecture Notes

*Department of Geophysics Charles University in Prague*, (2003)



# Děkuji za pozornost