



VNITŘNÍ ŽIVOT KRÁTKOPERIODICKÝCH EXOPLANET

SEMIANALYTICKÝ MODEL A UKÁZKA JEHO APLIKACÍ

Michaela Walterová a Marie Běhouňková
Geodynamický seminář 23. 5. 2018

MOTIVACE

Jak vypadá vzájemná vazba mezi vývojem oběžné dráhy a procesy uvnitř planety?

slapová disipace → vývoj oběžné dráhy závislý na reologii → přiblížení ke hvězdě a zvýšení disipace → pokles viskozity pláště → zrychlení/zpomalení vývoje

Tobie a kol. (2005): termální vývoj Titanu a změny výstřednosti

Shoji a Kurita (2014): exoplanety u hvězd sp. typu M

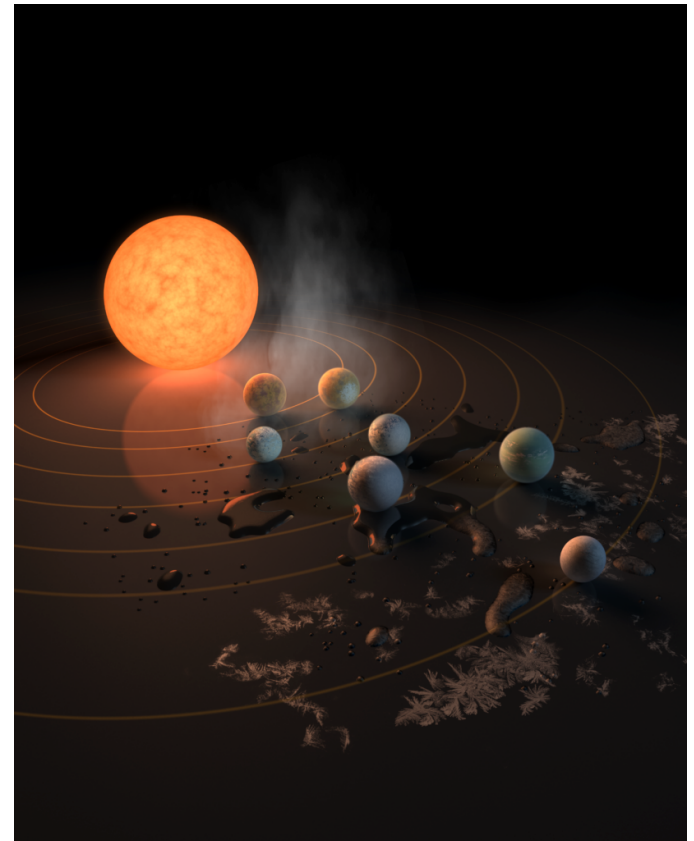
Můžeme se o geofyzice exoplanet vůbec něco dozvědět?

průměrná hustota, “současná” podoba oběžné dráhy

tepelná setrvačnost povrchů, vulkanismus? (Selsis a kol., 2013)

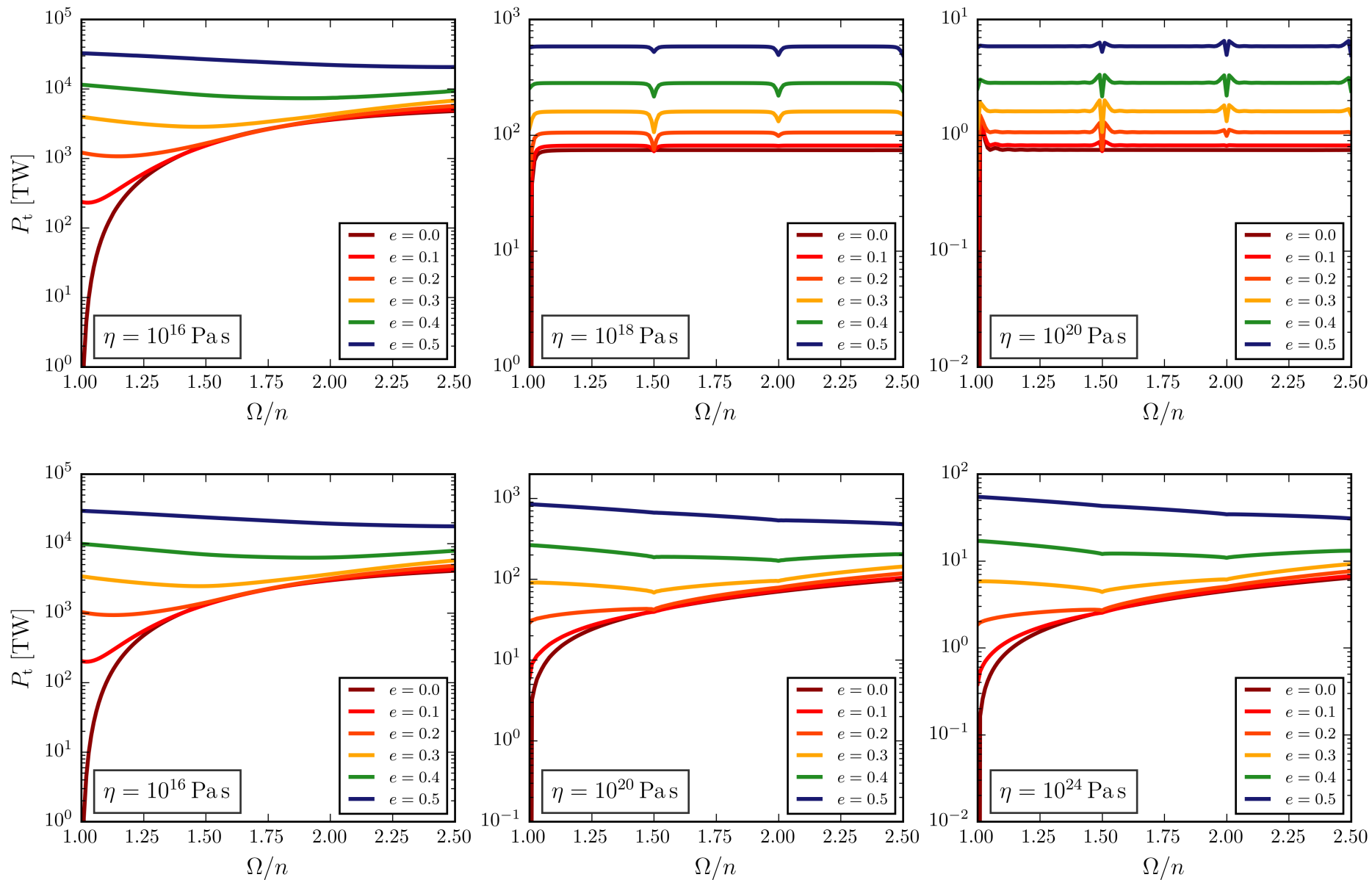
spektrum mateřské hvězdy – zastoupení prvků v protoplanetárním disku

slapově roztrhané planety jako příměs atmosféry bílých trpaslíků (např. Vandenburg a kol., 2015)



NASA/JPL

MOTIVACE: SLAPOVÉ ZAHŘÍVÁNÍ



TERESTRICKÉ EXOPLANETY

Detekce nejčastěji **transitní fotometrií** ($\rightarrow$ poloměr) nebo metodou **radiálních rychlostí** ($\rightarrow$ hmotnost)

Kritérium maximální hmotnosti:

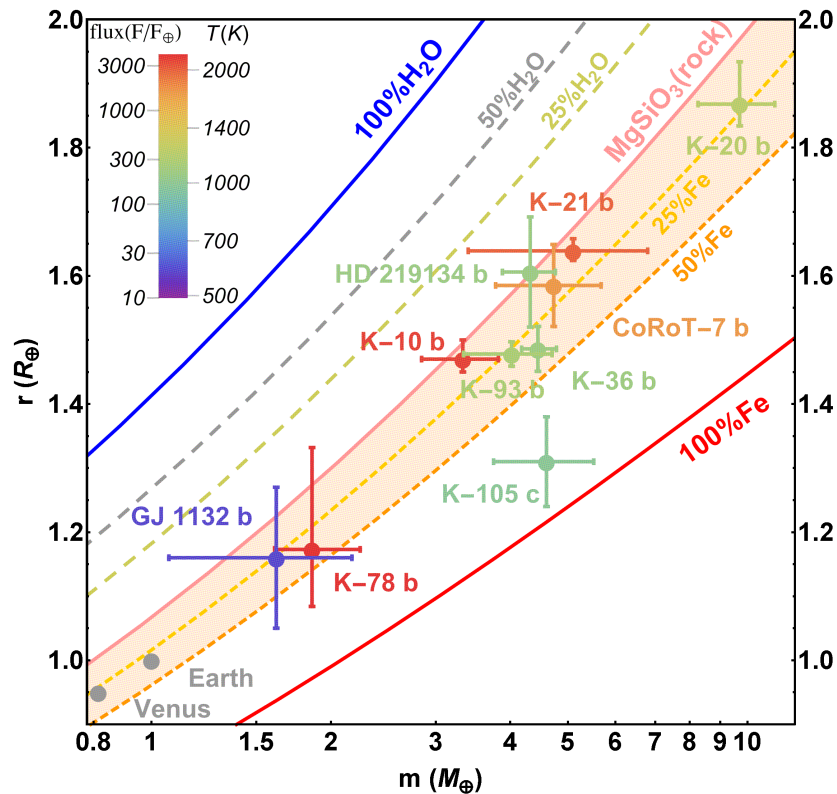
Teorie: $< 10 M_{\text{Země}}$

Pozorování: $< 2 - 4 M_{\text{Země}}$

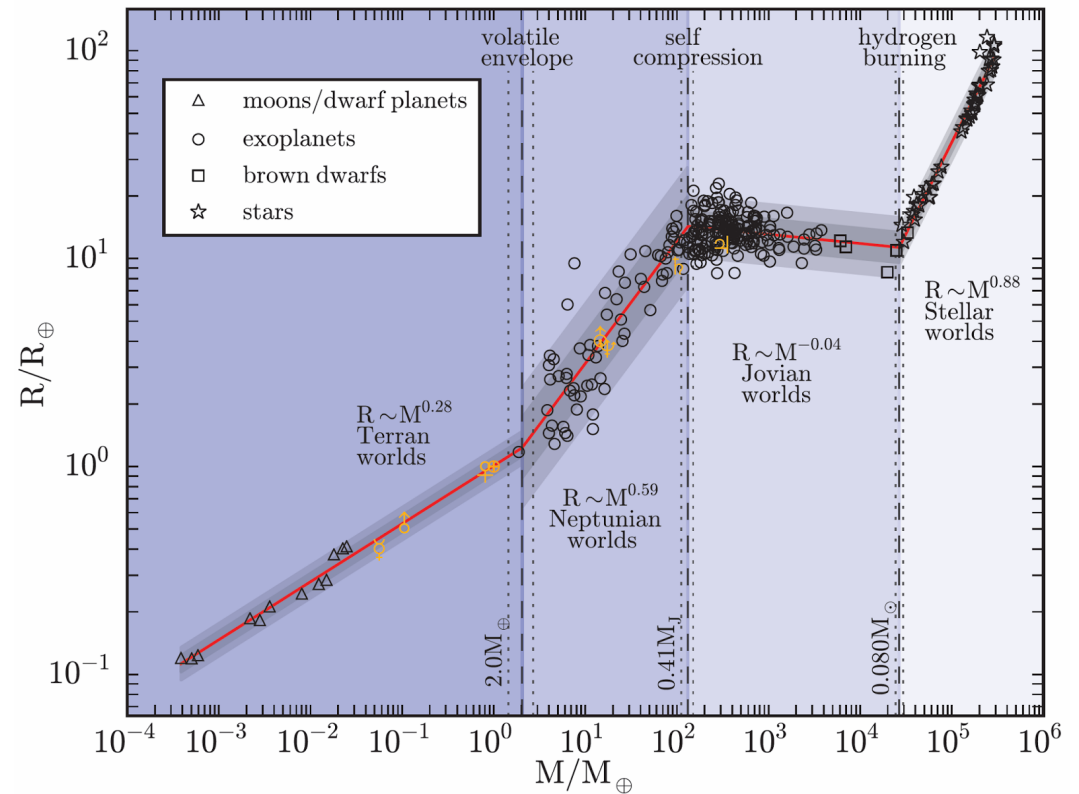
Většinou víceplanetární soustavy – vyšší pravděpodobnost detekce

K 23. 5. 2018 známo **3726 exoplanet**, z toho 613 ve vícečlenných soustavách a 331 s hmotností $< 4 M_{\text{Země}}$

(NASA Exoplanet Archive)



Zeng a kol. (2017)



Chen a Kipping (2016)

SEMIANALYTICKÝ MODEL

Předpoklady: nulový sklon rotační osy, jediná planeta v soustavě, zanedbatelný vliv planety na hvězdu

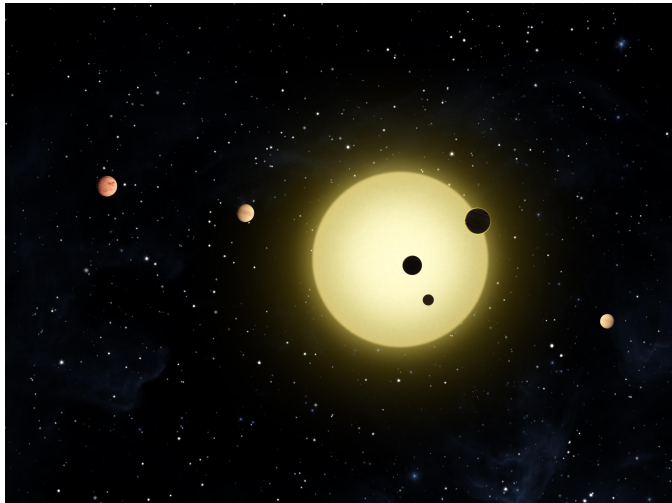
Slapový potenciál i evoluční rovnice oběžné dráhy vyjádřeny pomocí **Darwinova-Kaulova rozvoje**

Kombinace numerického výpočtu Hansenových koeficientů a využití rekurzivních vztahů

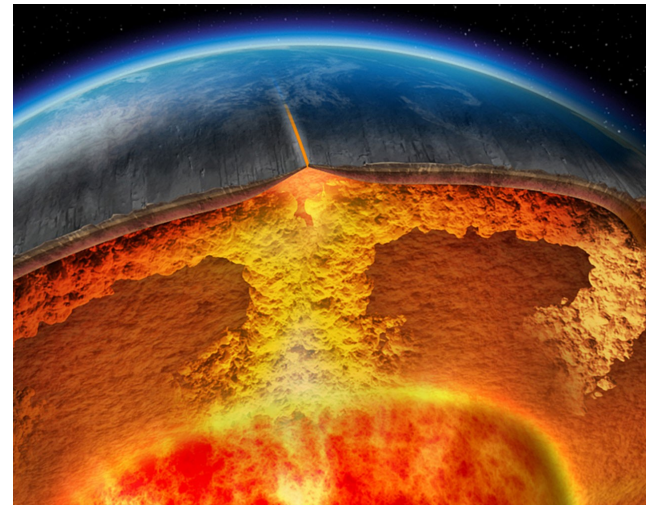
– aplikace na **libovolně výstředné dráhy**

Planeta tvořena homogenními, obecně viskoelastickými vrstvami

1D parametrizovaná **plášťová konvekce** se zahrnutým slapovým zahříváním



NASA/Tim Pyle

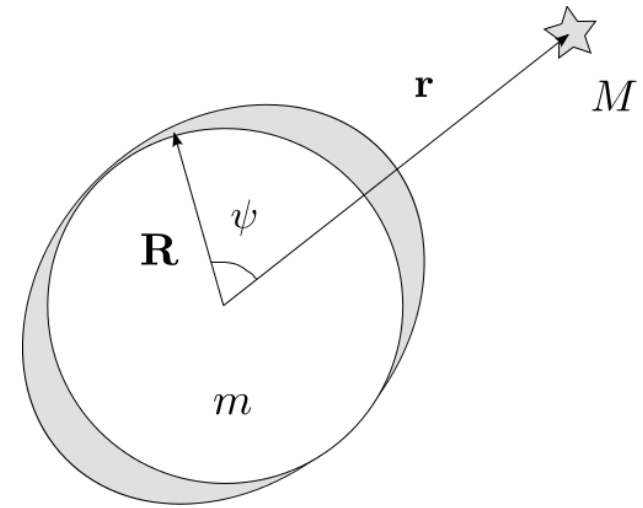


BBC, Earth: The Power of the Planet

SLAPOVÝ POTENCIÁL

The principal problem to be solved is as follows :

A planet is attended by one or more satellites which raise frictional tides (either bodily or oceanic) in their planet; it is required to find the secular changes in the orbits of the satellites due to tidal reaction.



Darwinův-Kaulův rozvoj (Darwin, 1880; Kaula, 1964):

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}) = \frac{\mathcal{G}M}{r} \sum_{l=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^l \mathcal{P}_l(\cos \psi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_{lmpq}(r)$$

poruchový potenciál = přírůstek potenciálu způsobený slapovou deformací planety

$$\delta\mathcal{U}_{lmpq}(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} k_l [\mathcal{U}_{lmpq}(R)]_{\text{lag}}$$

část poruchového potenciálu přispívající k dlouhodobému vývoji oběžné dráhy (předp. $m \ll M$)

$$\delta\mathcal{U}_{lmpq}(r) = \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{0m}) \frac{\mathcal{G}M}{a} \left(\frac{R}{a}\right)^{2l+1} \left\{F_{lmp}(i)\right\}^2 \left\{G_{lpq}(e)\right\}^2 k_l \cos \left[(\nu_{lmpq}^* - m\theta_s) - (\nu_{lmpq} - m\theta_s) - \varepsilon_{lmpq}\right]$$

tvar a orientace dráhy

reakce planety

EVOLUČNÍ ROVNICE

obecný tvar evolučních rovnic (podle Szeto a Lambeck, 1982):

$$\frac{d\bullet}{dt} = \sum_{lmpq} \left(\begin{array}{c} \text{algebraické} \\ \text{faktory} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{geometrické} \\ \text{faktory} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{fyzikální} \\ \text{parametry} \end{array} \right)$$

Lagrangeovy rovnice pro vývoj hlavní poloosy a a výstřednosti e

$$\frac{da}{dt} = - \sum_{lmpq} 2 \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{0m}) (l-2p+q) k_l \sin \varepsilon_{lmpq} \sqrt{\frac{a}{\mathcal{G}(M+m)}} \left(\frac{R}{a}\right)^{2l+1} \frac{\mathcal{G}M}{a} \left\{F_{lmp}(i)\right\}^2 \left\{G_{lpq}(e)\right\}^2$$

$$\frac{de}{dt} = - \sum_{lmpq} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2-\delta_{0m}) \left[\sqrt{1-e^2} (l-2p+q) - (l-2p) \right] k_l \sin \varepsilon_{lmpq} \sqrt{\frac{1-e^2}{a e^2 \mathcal{G}(M+m)}} \left(\frac{R}{a}\right)^{2l+1} \frac{\mathcal{G}M}{a} \left\{F_{lmp}(i)\right\}^2 \left\{G_{lpq}(e)\right\}^2$$

vývoj rotační frekvence Ω ze zachování celkového momentu hybnosti:

$$\frac{d(C\Omega)}{dt} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{G}M^2(M+m)}{a}} \sqrt{1-e^2} \frac{da}{dt} + \sqrt{a \mathcal{G}M^2(M+m)} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt}$$

JAK DLOUHO TO TRVÁ?

odhad časové škály vývoje oběžné dráhy (OE) a rotační frekvence (RE)

$$T_{\text{OE}} \approx \sqrt{\frac{a^3(M+m)}{\mathcal{G}M^2}} \left(\frac{a}{R}\right)^{2l+1}$$

$$T_{\text{RE}} \approx \frac{C}{\sqrt{\mathcal{G}M^2(M+m)a}} T_{\text{OE}}$$

Země – Slunce:

$$T_{\text{OE}} \approx 10^{21} \text{ let} \quad T_{\text{RE}} \approx 10^{13} \text{ let}$$

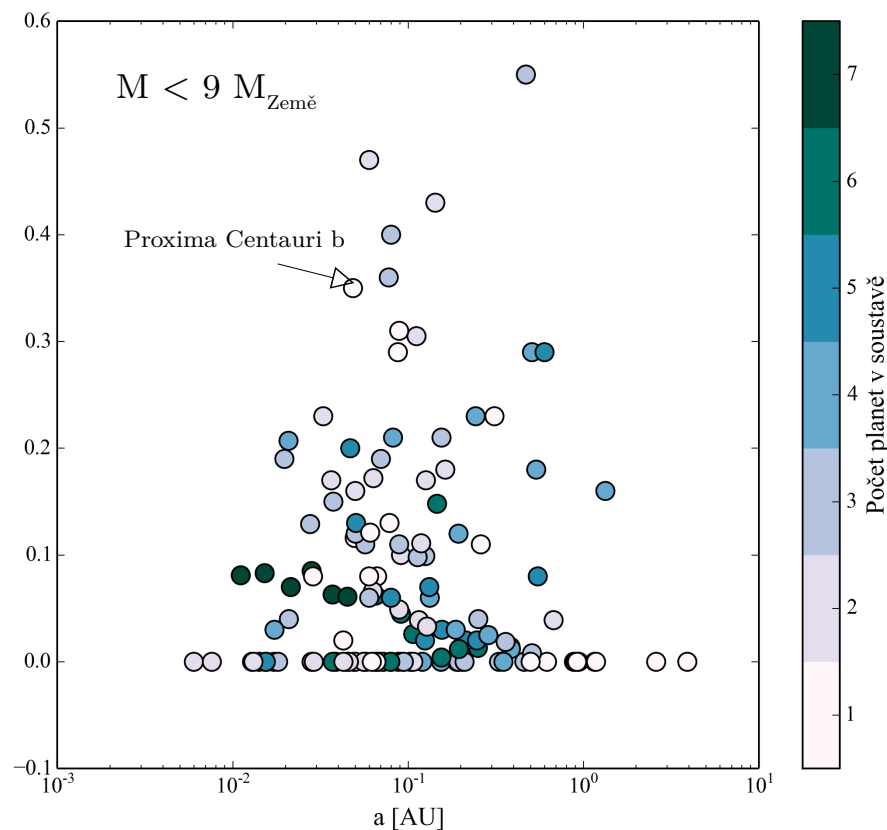
„Země“ u červeného trpaslíka:

$$a = 0,02 \text{ AU} \quad T_{\text{orb}} = 3,27 \text{ dne} \quad M_* = 0,1 M_{\text{Slunce}}$$

$$T_{\text{OE}} \approx 10^{10} \text{ let} \quad T_{\text{RE}} \approx 10^4 \text{ let}$$

výstřednost dráhy málokdy známa s chybou < 100%

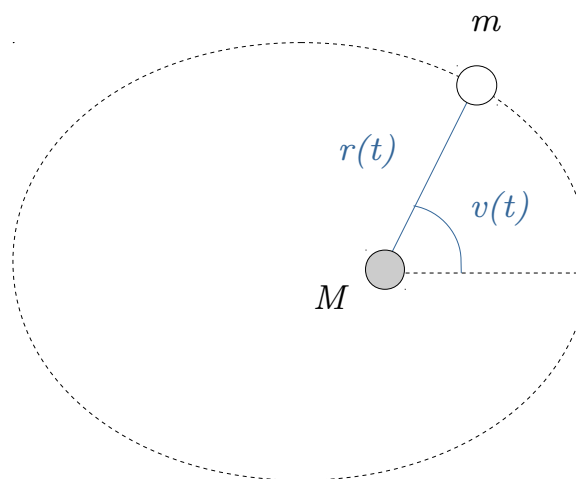
vzájemné ovlivňování planet v soustavě – udržení e



HANSENOVY KOEFICIENTY

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp[ikv(t)] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} X_j^{n,k}(e) \exp[ijM(t)]$$

$$X_j^{n,k}(e) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[kv(t) - jM(t)] dM$$



vyjádření ve formě polynomu (s Newcombovy operátory):

$$X_j^{n,k}(e) = e^{|k-j|} \sum_{\sigma=0}^{\infty} X_{\sigma+\alpha, \sigma+\beta}^{n,k} e^{2\sigma} \quad \alpha = \max(0, j-k) \quad \beta = \max(0, k-j)$$

pro výpočet Newcombových operátorů lze využít [rekurentních vztahů](#) (např. Cherniack, 1972)

vztah ke Kaulovým funkcím výstřednosti:

$$G_{lpq}(e) = X_{(l-2p+q)}^{-(l+1), (l-2p)}$$

použití Hansenových koeficientů umožňuje přesně vyjádřit evoluční rovnice i pro vysoké e

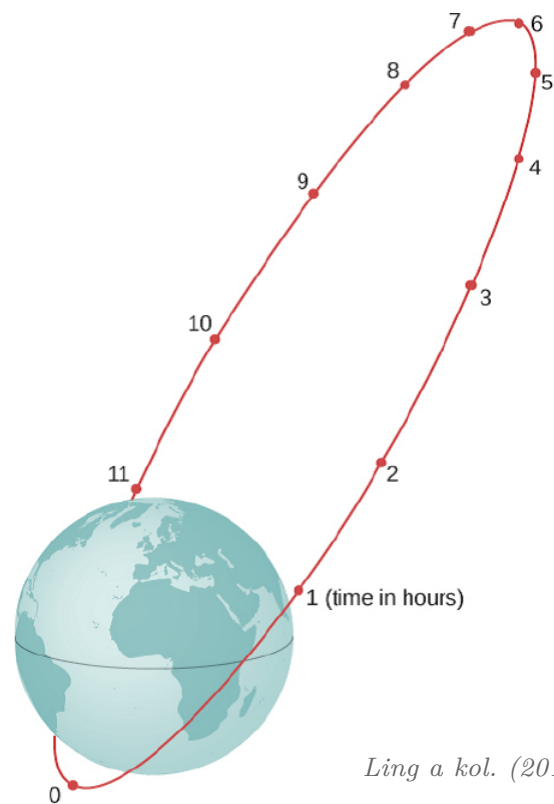
FUNKCE INKLINACE

v současnosti pokládáme $I = 0$, model lze však zobecnit i na nenulový sklon rotační osy a nenulovou inklinaci

definice funkcí inklinace:

$$\mathcal{P}_{lm}(\cos \vartheta^*) \exp(im\varphi^*) = \sum_{p=0}^l F_{lmp}(I) \exp(i(l-2p)u)$$

analytická vyjádření i rekurentní vztahy (např. Wnuk, 1987)



DEFORMACE VRSTEVNATÉ PLANETY

založeno na Wu a Peltier (1974) – lagrangeovský i eulerovský formalismus

$$\nabla \cdot \tau - \rho_0 \nabla \phi_1 - \rho_1 g_0 \mathbf{e}_r - \nabla(\mathbf{u} \cdot \rho_0 g_0 \mathbf{e}_r) = 0$$

pohybová rovnice

s referenčním stavem

$$\nabla^2 \phi_1 = 4\pi \mathcal{G} \rho_1$$

Poissonova rovnice

$$\nabla p_0 = -\rho_0 g_0 \mathbf{e}_r$$

$$\tau = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$$

reologický vztah

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi \mathcal{G} \rho_0$$

→ rozvoj do sférických harmonik

→ sada obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\frac{d\vec{Y}}{dr} = \mathbf{A}\vec{Y} \quad \text{pro proměnné} \quad \vec{Y} = (U_n, V_n, T_{rn}, T_{\vartheta n}, \Phi_n, Q_n)^T$$

Dále:

předpoklad nestlačitelnosti, nerotující sférická planeta sestávající z n_l homogenních elastických vrstev

DEFORMACE VRSTEVNATÉ PLANETY

$$U_n = C_1^\alpha \frac{n r^{n+1}}{2(2n+3)} + C_2^\alpha r^{n-1} + C_4^\alpha \frac{(n+1) r^{-n}}{2(2n-1)} + C_5^\alpha r^{-n-2}$$

$$\text{v jádře: } C_4 = C_5 = C_6 = 0$$

$$V_n = C_1^\alpha \frac{(n+3) r^{n+1}}{2(2n+3)(n+1)} + C_2^\alpha \frac{r^{n-1}}{n} + C_4^\alpha \frac{(2-n) r^{-n}}{2n(2n-1)} - C_5^\alpha \frac{r^{-n-2}}{n+1}$$

$$\begin{aligned} T_{rn} = & C_1^\alpha \frac{\rho^\alpha \xi n r^{n+2} + \mu^\alpha 2(n^2 - n - 3) r^n}{2(2n+3)} + C_2^\alpha [\rho^\alpha \xi r^n + 2\mu^\alpha (n-1) r^{n-2}] + C_3^\alpha \rho^\alpha r^n \\ & + C_4^\alpha \frac{\rho^\alpha \xi (n+1) r^{-n+1} - \mu^\alpha 2(n^2 + 3n - 1) r^{-n-1}}{2(2n+3)} + C_5^\alpha [\rho^\alpha \xi r^{-n-1} - 2\mu^\alpha (n+2) r^{-n-3}] + C_6^\alpha \rho^\alpha r^{-n-1} \end{aligned}$$

$$T_{\vartheta n} = C_1^\alpha \frac{\mu^\alpha n(n+2) r^n}{(2n+3)(n+1)} + C_2^\alpha \frac{2\mu^\alpha (n-1) r^{n-2}}{n} + C_4^\alpha \frac{\mu^\alpha (n^2 - 1) r^{-n-1}}{n(2n-1)} + C_5^\alpha \frac{2\mu^\alpha (n+2) r^{-n-3}}{n+1}$$

$$\Phi_n = C_3^\alpha r^n + C_6^\alpha r^{-n-1}$$

$$Q_n = C_1^\alpha \frac{4\pi \mathcal{G} \rho^\alpha n r^{n+1}}{2(2n+3)} + C_2^\alpha 4\pi \mathcal{G} \rho^\alpha r^{n-1} + C_3^\alpha (2n+1) r^{n-1} + C_4^\alpha \frac{4\pi \mathcal{G} \rho^\alpha (n+1) r^{-n}}{2(2n-1)} + C_5^\alpha 4\pi \mathcal{G} \rho^\alpha r^{-n-2}$$

DEFORMACE VRSTEVNATÉ PLANETY

v obecném případě n_l elastických slupek máme $6n_l - 3$ neznámých C_i ,

$$\begin{aligned}\vec{Y}^1 &= \sum_{i=1}^3 C_i^1 \vec{y}_i^1 && \text{v jádře} \\ \vec{Y}^\alpha &= \sum_{i=1}^6 C_i^\alpha \vec{y}_i^\alpha, && \alpha = 2, \dots, n_l\end{aligned}$$

jejichž hodnoty určíme z $6n_l - 3$ lineárních rovnic daných hraničními podmínkami na rozhraní pevných látek

$$[U_n]_-^+ = [V_n]_-^+ = [T_{rn}]_-^+ = [T_{\vartheta n}]_-^+ = [\Phi_n]_-^+ = [Q_n]_-^+ = 0$$

a horní okrajovou podmínkou pro slapové zatěžování $Q_n = -\frac{2n+1}{R}$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\mathbf{c} &= \mathbf{b}, && \mathbf{c} = (C_1^1, C_2^1, \dots, C_6^{n_l})^T \\ &&& \mathbf{b} = (0, 0, \dots, -\frac{2n+1}{R})^T\end{aligned}$$

→ LU dekompozice

VISKOELASTICITA

princip korespondence mezi elastickým a lineárně viskoelastickým kontinuem

$$2\mu \varepsilon(t) = \tau(t) \quad \longleftrightarrow \quad 2\bar{\mu}(\omega) \bar{\varepsilon}(\omega) = \bar{\tau}(\omega)$$

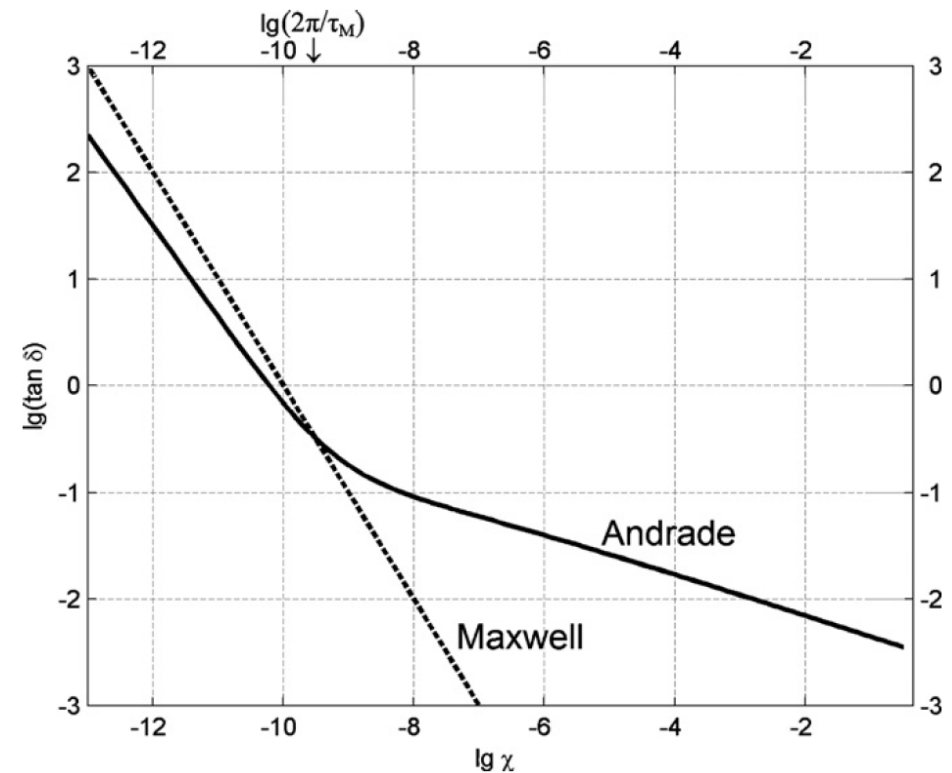
kompliance $\bar{J}(\omega) = \frac{1}{\bar{\mu}(\omega)}$

Andradeova reologie – dobré vystižení reakce Země na zatěžování s periodou < 1 rok

$$\bar{J}(\omega) = \frac{1}{\mu} - \frac{i}{\eta\omega} + \frac{\mu^{\alpha-1}}{(i\eta\omega)^{\alpha}} \Gamma(1 + \alpha)$$

na delších periodách je vhodnější Maxwellova reologie

$$\bar{J}(\omega) = \frac{1}{\mu} - \frac{i}{\eta\omega}$$



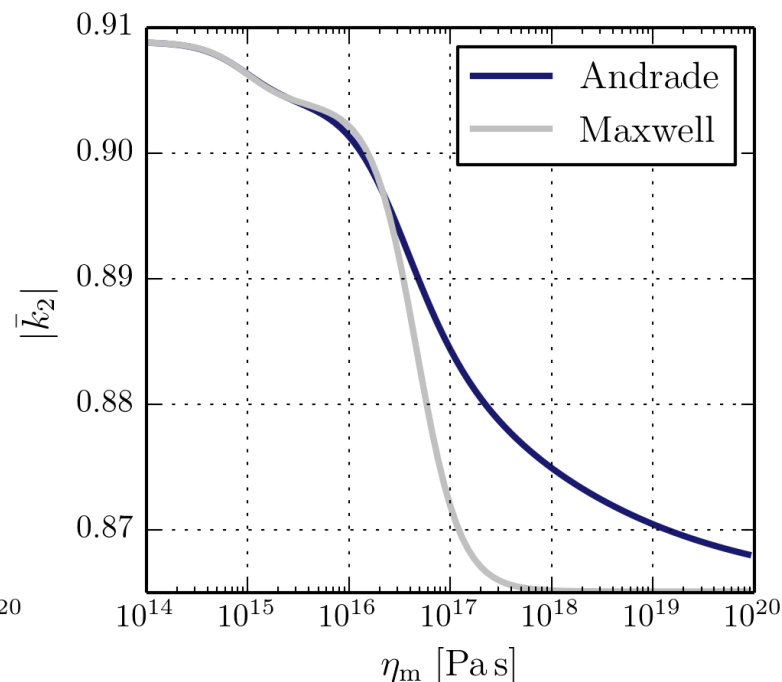
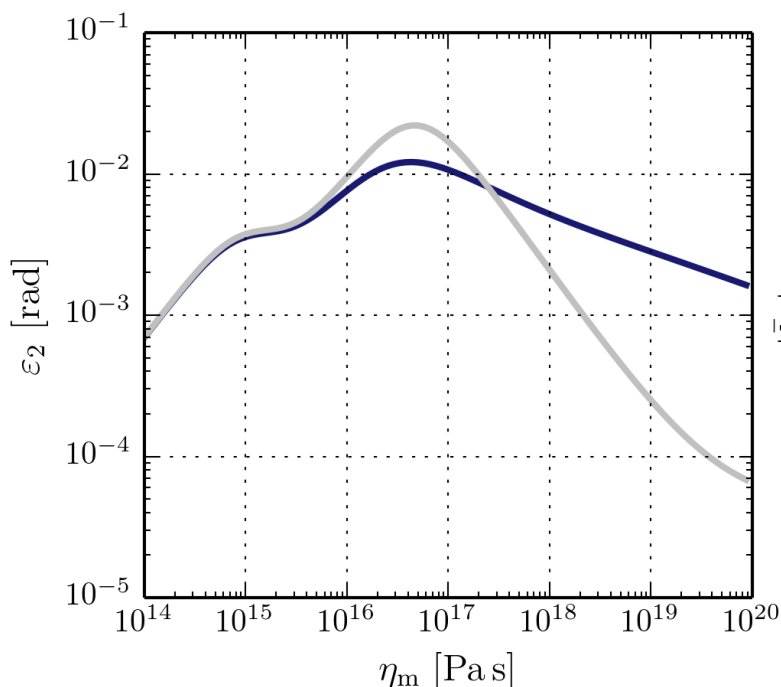
Efroimsky (2012)

LOVEOVA ČÍSLA

$$\delta \mathcal{U}_{lmpq}(r) = \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} k_l [\mathcal{U}_{lmpq}(R)]_{\text{lag}}$$

pro viskoelastickou planetu (Wu a Peltier, 1974): $1 + \bar{k}_n(\omega) = -\left[\bar{C}_3^{n_l}(\omega)R^n + \bar{C}_6^{n_l}(\omega)R^{-n-1}\right]$

v homogenním případě $\bar{k}_l(\omega) = \frac{3}{2(l-1)} \frac{1}{1 + A_l \frac{\bar{\mu}(\omega)}{\mu}}$, $A_l = \frac{(2l^2 + 4l + 3)\mu}{lg_0\rho R}$



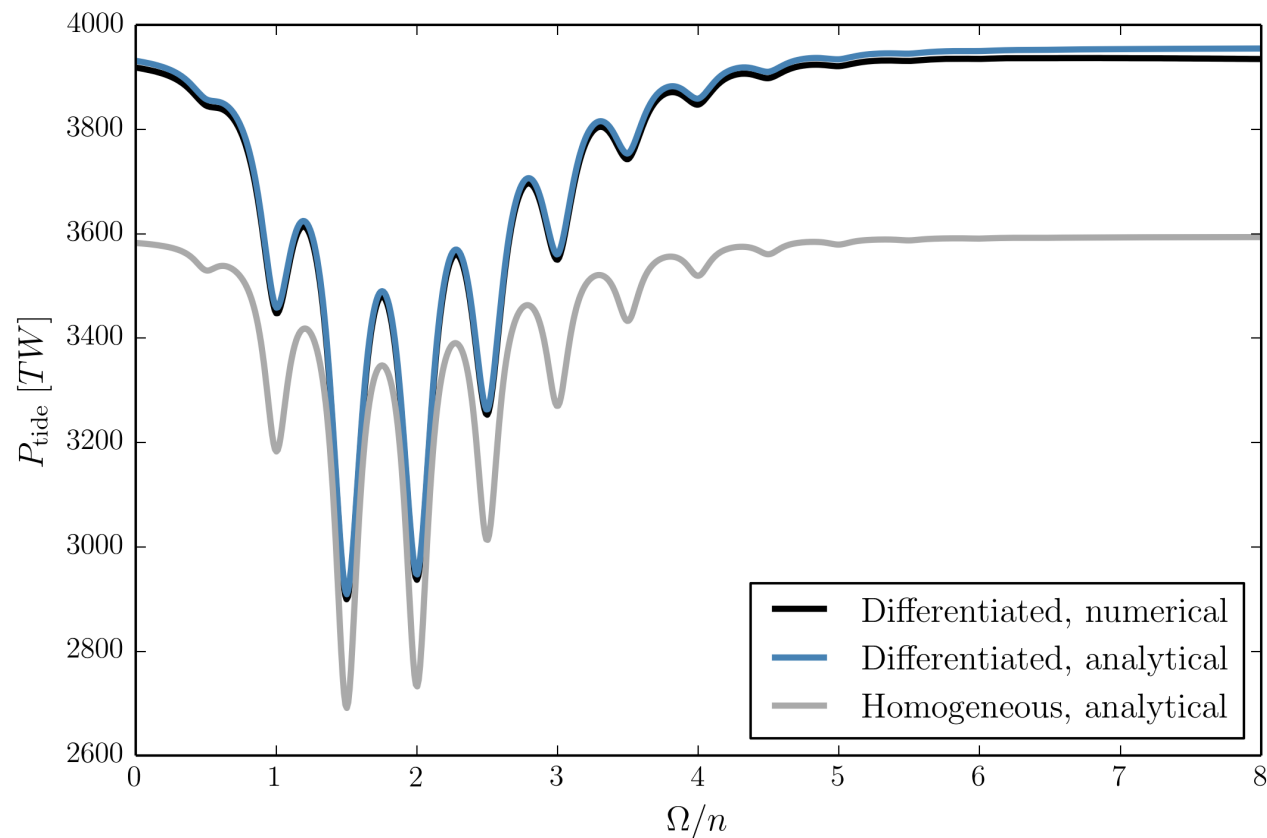
Závislost **fázového rozestupu a Loveova čísla** na viskozitě pláště pro “exozemi” s velkým viskoelastickým jádrem

$$\eta_{\text{core}} = 10^{20} \text{ Pa s}, \mu = 200 \text{ GPa}, R_s = 6370 \text{ km}, R_{\text{oc}} = 6000 \text{ km}, R_{\text{ic}} = 5800 \text{ km}, T_{\text{orb}} = 36,5 \text{ dní}$$

SLAPOVÉ ZAHŘÍVÁNÍ

průměrný výkon celého objemu planety (Segatz a kol., 1988)

$$P_{\text{tide}} = -\frac{5 n_{\text{orb}}}{8\pi^2 \mathcal{G} R} \int_0^{T_{\text{orb}}} \int_S \delta \mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} dS dt, \quad \delta \mathcal{U} = |\bar{k}(\omega)| \mathcal{U}_{\text{lag}}$$



Maxwellova reologie

$$M_* = 0,1 M_{\text{slunce}}$$

$$a = 0,1 \text{ AU}, e = 0,4$$

$$\eta = 7,1 \times 10^{16} \text{ Pa s}$$

TEPELNÝ VÝVOJ PLANETY

energetická bilance pro plášť a jádro (Grott a Breuer, 2008)

$$\rho_m c_m V_m \epsilon_m \frac{dT_m}{dt} = -q_m A_m + q_c A_c + P_{\text{tide}}$$

$$\rho_c c_c V_c \epsilon_c \frac{dT_c}{dt} = -q_c A_c$$

$$q_m = k_0 \frac{T_m - T_s}{\delta_0}$$

$$q_c = k_0 \frac{T_c - T_m}{\delta_1}$$

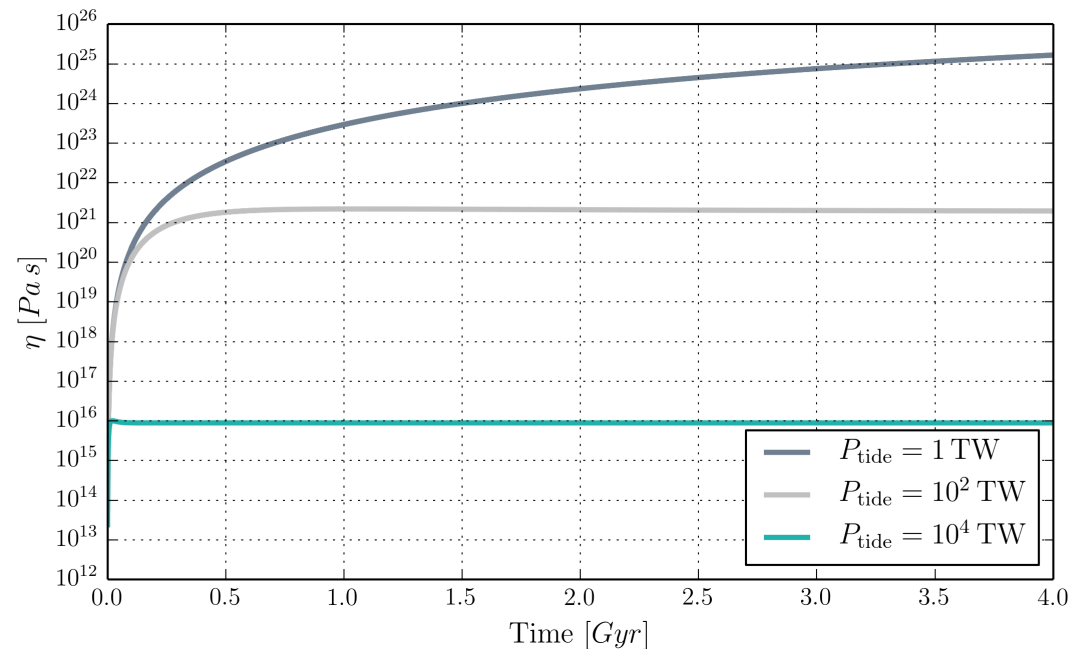
tloušťka hraničních vrstev pro malý viskozitní kontrast v plášti (Solomatov, 1995)

$$\delta_0 \sim \delta_1 \sim d \text{ Ra}^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{pro } \text{Ra} = \frac{\alpha_m g_0 \rho_m \Delta T d_m^3}{\kappa_m \eta_m}$$

exponenciální teplotní závislost viskozity

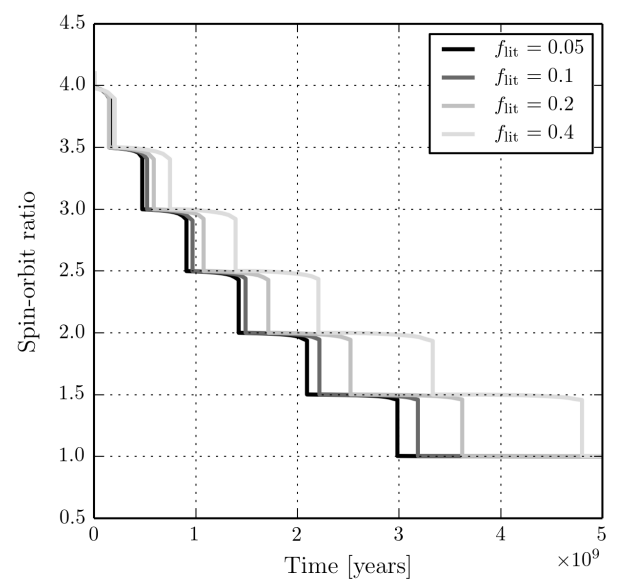
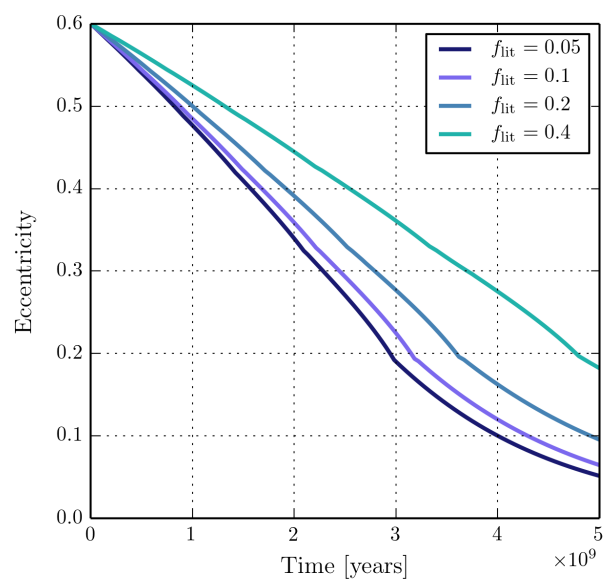
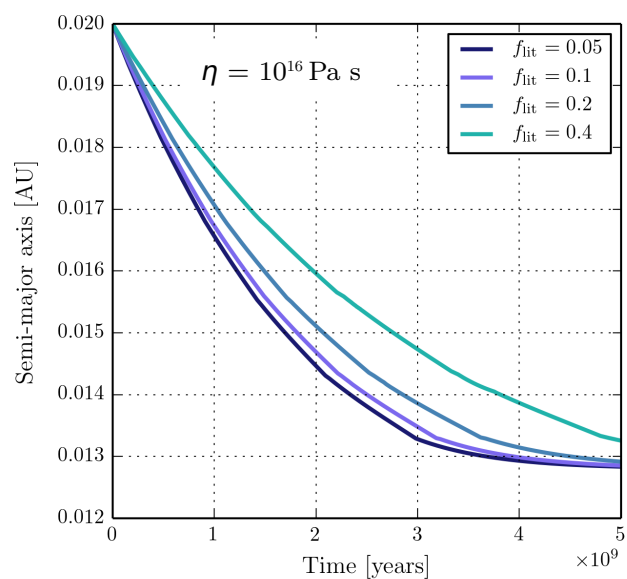
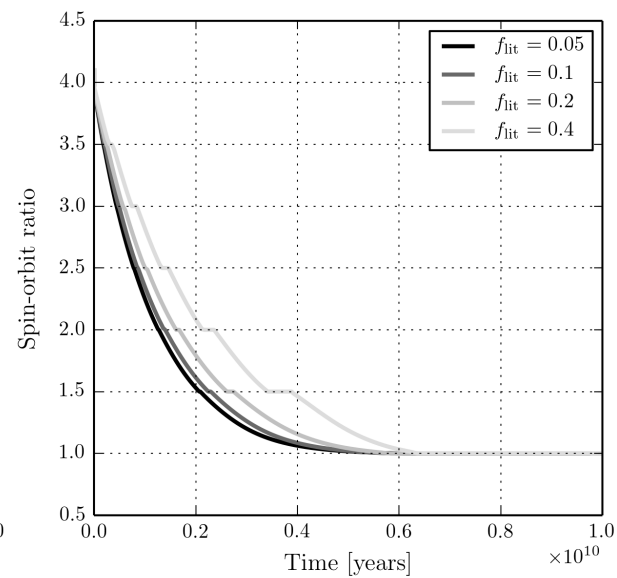
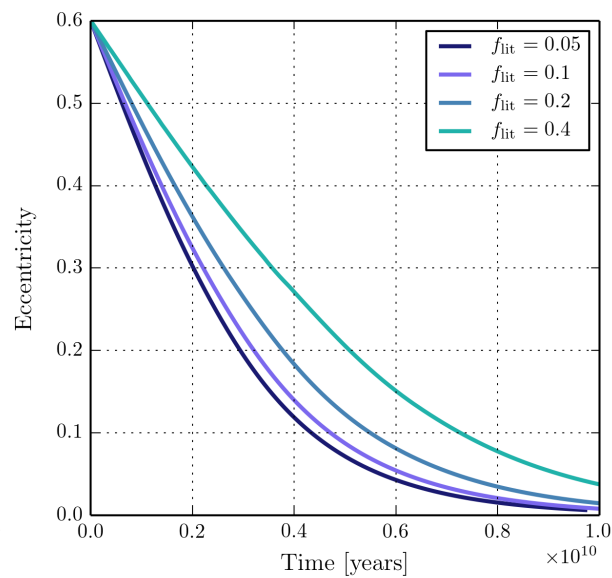
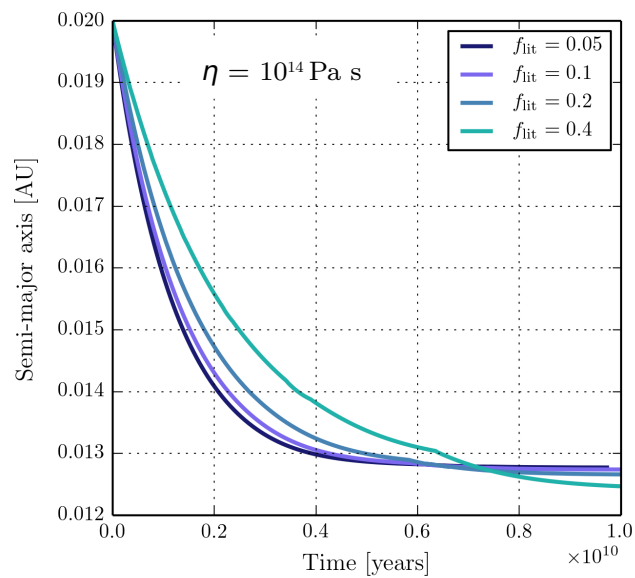
$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(\frac{E^*}{R} \frac{T_{\text{ref}} - T}{T_{\text{ref}} T}\right)$$



VLIV MOCNOSTI LITOSFÉRY

Andradeova reologie

$$M_* = 0,1 M_{\text{slunce}} \quad a_0 = 0,02 \text{ AU} \quad e_0 = 0,6$$



SHRNUTÍ A DALŠÍ VÝHLEDY

viskoelastické planety s dostatečně vysokou viskozitou zachytávány do **spin-orbitálních resonancí**, jejichž stabilita závisí i na vnitřní struktuře

slapové zahřívání v diferencované planetě s kapalným jádrem je vyšší než v homogenním případě

semianalytický model umožňuje relativně rychlý výpočet pro planetu nebo měsíc s 1D strukturou

→ **možné provázání s numerickým modelem**, zahrnutí laterálních nehomogenit v plášti

Oběžná dráha	doplnění librace, vliv dalších planet či měsíců, vliv rotace hvězdy, nenulová inklinace
Vnitřní struktura	zahrnutí M-R vztahů pro terestrické planety, vliv velikosti jádra ...
Termální vývoj	realističtější model konvekce, tavení, radiogenní zahřívání, povrchová teplota ...

DĚKUJI ZA POZORNOST