

POTENCIÁLOVÁ POLE II.

Potenciál ve tvaru integrálu

RNDr. Oldřich Novotný, CSc.



UNIVERZITA KARLOVA • PRAHA

POTENCIÁLOVÁ POLE II.

Potenciál ve tvaru integrálu

RNDr. Oldřich Novotný, CSc.

Praha 1986

Katedra geofyziky a meteorologie
matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy

Vedoucí katedry: doc. RNDr. Karel Pěč, DrSc.

© Oldřich Novotný, 1986

Skripta jsou určena k přednášce „Potenciálová pole“ pro posluchače 3. ročníku specializace geofyzika. Protože se nepředpokládají žádné předběžné geofyzikální znalosti a nepoužívá se příliš složitý matematický aparát (jen základy diferenciálního a integrálního počtu a výpočet vícerozměrných integrálů), mohou být tato skripta použita jako doplňkový učební text také pro posluchače jiných specializací, včetně posluchačů nižších ročníků.

Z otcova rukopisu v roce 2024 přepsal Martin Novotný.

Text byl následně v roce 2025 upraven podle existujícího strojopisu – původní paragraf 10.1. je rozdělen na paragrafy 10.1. a 10.2. a jejich text je přeformulován; ostatní text obsahuje drobné úpravy.

Obsah

6 Úvod	1
7 Výchozí vzorce pro intenzitu pole	3
7.1 Rozšířené znění Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona . . .	3
7.2 Některé otázky matematické formulace, zavedení hustoty	4
7.3 Obecné vzorce pro intenzitu pole	9
7.3.1 Objemově rozložené hmoty nebo náboje	10
7.3.2 Plošně rozložené hmoty nebo náboje (jednoduchá vrstva)	12
7.3.3 Křivkově (lineárně) rozložené hmoty nebo náboje	14
7.3.4 Objemově rozložené dipóly	14
7.3.5 Plošně rozložené dipóly, dvojvrstva	16
8 Výchozí vzorce pro Newtonův potenciál a příbuzné veličiny	19
8.1 Obecné vzorce pro potenciál	19
8.1.1 Potenciál objemově, plošně a lineárně rozložených hmot nebo nábojů	20
8.1.2 Potenciál objemově rozložených dipólů	21
8.1.3 Potenciál plošně rozložených dipólů, potenciál dvojvrstvy	23
8.2 Vztah mezi vzorcí pro intenzitu a pro potenciál	26
8.3 O spojitých rozloženích, rozdíl mezi matematikou a fyzikou	28
8.4 Potenciální energie soustavy	29
8.5 Kapacita	31
9 Výchozí vzorce pro působení mezi složitějšími objekty	33
9.1 Působení pole na dipól	33
9.2 Vzájemné působení dvou tuhých těles	36
10 Gravitační a elektrostatické pole sféricky symetrických těles	43
10.1 Intenzita pro sféricky symetrickou (Newtonovu) kouli	43

10.2	Potenciál pro Newtonovu kouli	52
10.3	Homogenní koule	54
10.4	Homogenní dutá koule	63
10.5	Homogenní kulová slupka	65
10.6	Přímá a obrácená gravimetrická úloha pro kouli	71
10.7	Obecné poznámky k obráceným úlohám v gravimetrii	73
11	Gravitační a elektrostatické pole nekonečné rovinné homogenní desky	77
11.1	Nekonečná rovinná deska	77
11.2	O nemožnosti zavedení Newtonova potenciálu pro nekonečnou desku	81
11.3	Nekonečná rovinná vrstva a dvojvrstva	85
11.4	Některá zobecnění, na něž ukazují řešené příklady	88
	Literatura	92

Kapitola 6

Úvod

Tato skripta jsou přímým pokračováním skript O. Novotný: Potenciálová pole I – Základy teorie, Univerzita Karlova, Praha 1982. Z toho důvodu i číslování kapitol v těchto skriptech navazuje na číslování kapitol v prvním dílu. Stejně jako v prvním dílu i zde při výkladu klademe důraz spíše na důkladnější rozbor základních problémů a souvislostí než na odvozování velkého množství nejrůznějších vzorců. Nesnažili jsme se o výklad za příliš obecných matematických předpokladů, které se při řešení konkrétních fyzikálních úloh stejně většinou nepotřebují, ale o vybudování metod, které by umožnily řešit z jednotného hlediska širokou třídu obdobných úloh, s nimiž se setkáváme v mechanice, elektrostatice, magnetostatice, geofyzice, fyzikální geodézii, astronomii i jinde. Protože pro posluchače 3. ročníku je text tohoto dílu do jisté míry opakováním látky probírané v matematice a fyzice, i když uspořádaným jiným způsobem, snažili jsme se o takový výklad, aby tito posluchači mohli podstatné části těchto skript nastudovat formou domácí četby. Kromě toho jsme se snažili přenést geofyzikální aplikace a některá matematická zobecnění spíše do příkladů.

V prvním dílu skript jsme se zabývali Newtonovým potenciálem bodového zdroje a soustavy bodových zdrojů. Vzorce pro potenciál a intenzitu pole byly vyjádřeny pomocí jednoduchých funkcí. V tomto dílu se budeme zabývat obecnějšími případy, kdy zdroje pole (hmoty, elektrické náboje, magnetické dipóly) jsou rozprostřeny po křivkách, plochách a objemech. Potenciál a intenzita pole budou v těchto případech obecně mnohem složitějšími funkcemi, které s výjimkou nejjednodušších případů nebude možno vyjádřit pomocí elementárních funkcí. K popisu složitých funkcí se v matematice používají zejména dvě vyjádření: vyjádření ve tvaru integrálu a vyjádření ve tvaru řady. V tomto a v dalším dílu skript pojednáme o vyjádřeních potenciálu a příbuzných veličin v integrálním tvaru; integrální vyjádření těchto veličin je v jistém smyslu fyzikálně nejpřirozenější, neboť se dostává bezprostředním zobecněním Newtonova gravitačního zákona, Coulombova zákona a principu superpozice. O vyjádřeních potenciálu a příbuzných veličin ve tvaru řad pojednáváme až ve čtvrtém dílu těchto skript.

V tomto dílu skript se budeme zabývat určováním potenciálu při známém rozložení zdrojů pole. Kromě toho později budeme vyšetřovat také případy, kdy rozložení zdrojů pole sice neznáme, ale místo toho známe některé doplňující údaje o studovaném poli. Ilustrujme toto členění úloh teorie potenciálu na problému studia gravitačního pole Země. Kdybychom znali přesně rozložení hmot uvnitř Země, mohli bychom gravitační potenciál

vně i uvnitř Země počítat pomocí níže odvozeného integrálu (8.10), v jehož integrandu vystupuje hustota. Studium potenciálových polí prostřednictvím integrálů tohoto typu se budeme zabývat v tomto dílu skript. Mezi úlohy tohoto typu patří také velké množství důležitých fyzikálních úloh, jak bude patrné zejména ze cvičení.

Rozložení hustoty uvnitř Země ovšem přesně neznáme. Lze ukázat, že v této situaci nemůžeme přesně určit gravitační pole uvnitř Země. Ovšem gravitační pole vně Země budeme moci i přesto určit, pokud neznalost rozložení hmot nahradíme znalostmi o některých charakteristikách pole na zemském povrchu, např. znalostí potenciálu nebo jeho derivací na povrchu (přitom musíme předpokládat, že tvar zemského povrchu je známý, jinak se úloha stává ještě složitější). S obdobnou situací se setkáváme v elektrostatických úlohách s vodiči. Rozložení náboje na vodiči může být značně složité. Aniž bychom musel toto rozložení náboje určit, můžeme příslušnou elektrostatickou úlohu řešit, využijeme-li poznatku, že povrch vodiče vytváří ekvipotenciální plochu (známe tedy některou ekvipotenciální plochu). Úlohami tohoto typu se zde zabývat nebudeme.

V těchto skriptech se zabýváme převážně výpočty potenciálu a intenzity pole, které je působeno různými tělesy. Znamená to, že se většinou omezujeme jen na působení tělesa na částici (hmotný bod, bodový náboj). Pro nedostatek místa se zde obecnějšími případy příliš nezabýváme, pouze v kap. 9 je pojednáno o působení pole na dipól a o vzájemném působení dvou tuhých těles; zájemce o hlubší studium této důležité problematiky odkazujeme na citovanou literaturu.

Za cenné připomínky a náměty k různým partiím těchto skript děkuji zejména RNDr. Z. Martincovi, CSc. Posluchačům specializace geofyzika děkuji za přepočítání řady příkladů, uvedených ve cvičeních.

Praha, květen 1986

Oldřich Novotný

Kapitola 7

Výchozí vzorce pro intenzitu pole

7.1 Rozšířené znění Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona

Stejně jako v první dílu skript budeme i nyní vycházet při budování příslušných teorií ze dvou základních fyzikálních zákonů – Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona. Meze použitelnosti obou zákonů byly diskutovány v prvním dílu. Pojednejme nyní o některých zobecněních Newtonova gravitačního zákona, pro Coulombův zákon platí úvahy zcela obdobné.

Newtonův gravitační zákon udává, jakou silou na sebe působí dva hmotné body. Chceme-li popsat silové působení mezi třemi nebo více hmotnými body, musíme Newtonův gravitační zákon doplnit, musíme k němu připojit pravidlo o skládání sil – princip superpozice (viz první díl skript). Velice často však nevystačíme s představou hmotných bodů, ale musíme uvažovat spojitě rozprostřené hmoty, případně i některá složitější rozložení hmot. V tomto případě je přirozené použít metod integrálního počtu, tj. rozdělit těleso na malé části, vektorově sečíst síly působené jednotlivými částmi a přejít k limitě, jestliže se rozměry jednotlivých částí blíží k nule. Chtěli bychom ovšem upozornit, že takový proces vyžaduje zavedení dodatečných předpokladů. Ať je totiž dělení tělesa jakkoliv jemné, části tělesa stále nejsou hmotnými body a, přesně řečeno, Newtonův gravitační zákon v původním znění není tedy použitelný. Nemáme tak vlastně žádný prostředek k určení sil, působených jednotlivými částmi tělesa [Kellogg, 1967].

Musíme tedy formulovat nový fyzikální zákon. Přijmeme fyzikální zákon, který může být považován za rozšířené znění Newtonova gravitačního zákona, v následujícím tvaru [Kellogg, 1967]: „Nechť jsou dána dvě tělesa, nechť jsou rozdělena na elementy jako se to dělá v integrálním počtu a nechť hmotu každého elementu lze považovat za soustředěnou v nějakém bodě elementu. Potom přitažlivost, kterou jedno těleso působí na druhé, je limitou přitažlivosti, kterou odpovídající soustava částic působí na druhou soustavu částic, jestliže se maximální tětíva elementů blíží k nule“. („Tětívou“ zde rozumíme množinu bodů, obvykle úsečku, společnou uvažovanému elementu a libovolné přímce, která jej protíná; délku největší tětivy můžeme též nazývat průměrem elementu).

Chtěli bychom znovu upozornit, že právě formulovaný zákon bezprostředně neplyne z Newtonova zákona, nelze jej z Newtonova zákona odvodit (výše uvedené úvahy nebyly žádným odvozením, ale měly pouze pomoci k jeho formulování). Opačně však musí platit, že z rozšířeného Newtonova zákona vyplývá Newtonův zákon pro hmotné body jako speciální případ; příslušný důkaz je uveden v paragrafu 9.2. Kdyby tomu tak nebylo, museli bychom právě formulované rozšíření Newtonova gravitačního zákona ihned zamítnout. Ověření správnosti rozšířeného Newtonova gravitačního zákona musí spočívat v prověření, zdali důsledky z něj plynoucí souhlasí s pozorováními a experimenty.

Zcela obdobně, jako jsme dospěli k rozšířenému znění Newtonova gravitačního zákona, můžeme zavést i rozšířené znění Coulombova zákona. Slovní formulaci rozšířeného znění Coulombova zákona přenecháváme čtenáři za cvičení.

Úloha

1. Zdůvodněte, proč jsme ve formulaci rozšířeného Newtonova zákona nepoužili pojem „přitažlivá síla“, ale jen méně určitého slova „přitažlivost“?

Odpověď: Vzájemné působení mezi dvěma tělesy nelze obecně popsat jen pomocí sil. V případě tuhých těles je třeba uvažovat ještě momenty sil, jak je známo z mechaniky. V případě deformovatelných těles by byla situace ještě složitější.

7.2 Některé otázky matematické formulace, zavedení hustoty

„Pro libovolnou teorii je potřebná určitá hloubka, ale v rozumných mezích.“

(H. Bondi, viz první díl skript)

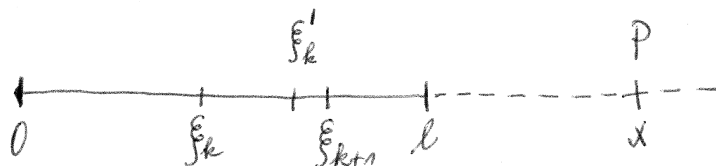
V tomto paragrafu si všimneme některých velmi obecných otázek týkajících se rozložení zdrojů pole a integrálního vyjádření pro intenzitu. Speciálně si všimneme otázky, kdy je možné popsat rozložení zdrojů pole pomocí hustoty. Avšak ve všech fyzikálních úlohách, kterými se budeme v těchto skriptech zabývat, budeme předpokládat, že takováto funkce hustoty vždy existuje. Proto čtenář, kterého obecné problémy příliš nezajímají, může tento paragraf vynechat a bez újmy na srozumitelnosti pokračovat ve čtení následujícího paragrafu 7.3.

Jak jsme již uvedli výše, kromě kap. 9 se v těchto skriptech nebudeme zabývat vzájemným působením mezi dvěma tělesy, jak se o tom mluví v rozšířených zněních Newtonova a Coulombova zákona, ale budeme studovat jen speciální případy, kdy druhým „tělesem“ je částice (hmotný bod, bodový náboj). Budeme tedy vyšetřovat síly, kterými těleso působí na částici.

Abychom ilustrovali postup, jakým dospíváme k integrálnímu vyjádření pro intenzitu a potenciál, vyšetřujeme v tomto paragrafu pro jednoduchost gravitační pole, které je

působené hmotami rozprostřenými podél nějaké úsečky délky ℓ . Jedná se o idealizaci přímého drátu, přičemž tato aproximace je tím lepší, čím je průměr drátu tenčí vzhledem k jeho délce a vzhledem ke vzdálenosti přitahované částice. Připouštíme, že hmota nemusí být rozprostřena podél úsečky rovnoměrně, o charakteru rozložení hmoty zatím nic nepředpokládáme.

Zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby konce drátu ležely v bodech $(0, 0, 0)$ a $(\ell, 0, 0)$, viz obr. 1. Množství hmoty na různých částech úsečky můžeme popsat pomocí funkce $m(\xi)$, kterou budeme definovat jako množství hmoty mezi počátečním bodem úsečky a bodem $(\xi, 0, 0)$. Při tomto zavedení je zřejmé, že $m(0) = 0$ a $m(\ell)$ je celková hmotnost uvažované úsečky. Protože při konstruování funkce $m(\xi)$ od počátku stále přičítáme hmotnosti dalších částí úsečky (přičítáme nezáporná čísla), plyne odtud, že $m(\xi)$ je neklesající funkcí souřadnice ξ . Žádné další předpoklady o funkci $m(\xi)$ zatím nečiníme.



Obrázek 1

Počítejme pro jednoduchost intenzitu gravitačního pole na přímce v prodloužení drátu v bodě P o souřadnicích $(x, 0, 0)$, kde $x > \ell$ [Kellogg, 1967]. Rozdělme drát na intervaly pomocí bodů $\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n = \ell$ (obr. 1). Hmotu na intervalu (ξ_k, ξ_{k+1}) označme $\Delta m_k = m(\xi_{k+1}) - m(\xi_k)$ a podle našeho fyzikálního zákona ji považujeme za soustředěnou v nějakém bodě ξ'_k uvažovaného intervalu. Intenzita gravitačního pole takto konstruovaného hmotného bodu má v bodě P nenulovou pouze složku ve směru drátu, označíme ji $(\Delta E_x)_k$, ostatní složky jsou nulové. Platí

$$(\Delta E_x)_k = -G \frac{\Delta m_k}{(x - \xi'_k)^2}, \quad (7.1)$$

kde G je gravitační konstanta. Intenzita $\vec{E}$ působená celou úsečkou bude (podle zobecněného Newtonova zákona) limitou součtu intenzit působených částicemi, jestliže se norma dělení $\nu = \max(\xi_k - \xi_{k-1})$ blíží k nule. Tuto limitu pro složku E_x označíme symbolem

$$E_x = \int_0^\ell \frac{-G}{(x - \xi)^2} dm(\xi) \quad (7.2)$$

a nazýváme ji Stieltjesovým integrálem funkce $[-G/(x - \xi)^2]$ podle funkce $m(\xi)$ na intervalu $\langle 0, \ell \rangle$, viz [Jarník, 1956, Král, 1965, Rektorys and spol., 1963]. Poznamenejme, že v důsledku známých vlastností limit jsme mohli v posledním vzorci napsat konstantu $(-G)$ před integrál. Je zřejmé, že zbývající dvě složky intenzity v bodě P jsou nulové.

V rozšířeném znění Newtonova gravitačního zákona se mluvilo o limitě, přičemž se automaticky předpokládalo, že taková limita musí existovat. To vyplývalo z fyzikální zkušenosti, že nějaké přitažlivé účinky libovolného tělesa vždy existují. Při matematické formulaci musíme však existenci příslušné limity vždy dokázat, odnikud to a priori nplyne (i když by to bylo podivné, kdyby neexistovala, pak by něco nebylo v pořádku).

Všimněme si existence limity v našem případě, tj. existence integrálu (7.2). Integrand v (7.2) označme $F(\xi, x) = -G/(x - \xi)^2$. Předpokládejme stále, že pozorovatel P se nachází vně úsečky $\langle 0, \ell \rangle$, tedy např. $x > \ell$. Potom funkce F je spojitá. Předpokládejme dále, že funkce $m(\xi)$ je nejen monotonní, ale též omezená (drát má konečnou hmotnost). Potom existence integrálu (7.2) při pevně zvoleném x plyne z následující věty, jejíž důkaz lze nalézt v [Král, 1965]:

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, funkce g monotonní a omezená na témže intervalu, pak

$$\int_a^b f(\xi) \, dg(\xi)$$

existuje. Dokonce můžeme něco říci i o vlastnostech intenzity. Vzhledem k tomu, že funkce $F(\xi, x)$ je spojitá na množině $\langle 0, \ell \rangle \times (\ell, \infty)$ a má zde i spojitě parciální derivace, z obecných vět plyne, že funkce $E_x(x)$, daná vzorcem (7.2), je spojitá funkce proměnné x a má spojitou derivaci, kterou dostaneme derivováním (7.2) za znaméním integrálu. Obecné věty zde dokazovat nebudeme, zájemce odkazujeme na [Král et al., 1972], kde jsou provedeny důkazy i za obecnějších předpokladů.

V bodech hmotné úsečky, tj. pro $x \in \langle 0, \ell \rangle$, integrál pro intenzitu (7.2) obecně neexistuje; u soustavy hmotných bodů měla intenzita obdobnou singularitu v místech hmotných bodů. Je to způsobeno idealizací úlohy, kdy jsme předpokládali, že průměr drátu při zachování jeho hmotnosti můžeme zmenšit k nule. Kdybychom drát uvažovali jako skutečné třírozměrné těleso, bude integrál pro intenzitu existovat i ve vnitřních bodech drátu, jak bude ukázáno později.

Řešení fyzikální úlohy není plnohodnotné, dokud příslušné veličiny neumíme číselně vyjádřit. Pro obecné Stieltjesovy integrály však vhodné metody výpočtu vypracovány nebyly. Můžeme sice postupovat podle definice a počítat příslušnou limitu, ale v praxi tento způsob výpočtu integrálu příliš vhodný není. Pokud nechceme jít touto cestou, jsme odkázáni jen na možnost převedení Stieltjesova integrálu na obyčejný (Riemannův) integrál. Toto převedení není možné vždy, ale jen za některých předpokladů. Platí věta [Král et al., 1972]:

Nechť f, g jsou reálné funkce definované na $\langle a, b \rangle$. Předpokládejme, že g je na $\langle a, b \rangle$ spojitá a má tam všude až na konečně mnoho bodů (vlastní) derivaci. Potom

$$\int_a^b f(\xi) \, dg(\xi) = (R) \int_a^b f(\xi) g'(\xi) \, d\xi \quad (7.3)$$

za předpokladu, že existuje Stieltjesův integrál vlevo i Riemannův integrál vpravo.

Podmínky pro existenci zmíněných integrálů a platnost (7.3) budou splněny (postačující podmínky), jestliže například funkce f a g budou spojitě na $\langle a, b \rangle$ a funkce g tam bude mít spojitou derivaci s výjimkou konečného počtu bodů.

Vraťme se k naší úloze o gravitačním poli hmotné úsečky. Derivaci funkce $m(\xi)$, pokud existuje, nazveme lineární hustotou a označíme

$$\lambda(\xi) = \frac{dm(\xi)}{d\xi}. \quad (7.4)$$

Tato hustota udává velikost hmoty připadající na jednotkový infinitezimální interval. Vzorec (7.2) můžeme s užitím (7.4) a (7.3), jsou-li splněny předpoklady, přepsat ve tvaru

$$E_x(x) = -G \int_0^\ell \frac{\lambda(\xi)}{(x-\xi)^2} d\xi. \quad (7.5)$$

Jestliže je lineární hustota λ spojitá a omezená na $\langle 0, \ell \rangle$ s výjimkou nejvýše konečného počtu bodů a bod x neleží na této úsečce, pak z výše uvedených vět ihned plyne, že složku intenzity E_x můžeme vyjádřit pomocí Riemannova integrálu (7.5) a tento integrál existuje. Vidíme tedy, že předpoklad o spojitosti a omezenosti hustoty (postačí s výjimkou konečného počtu bodů) může podstatně přispět ke zjednodušení teorie. I v případě plošných a objemových zdrojů budeme proto obvykle předpokládat, že příslušná plošná nebo objemová hustota je po částech spojitou a omezenou funkcí.

Uvedme jeden fyzikální příklad, kdy vzorec (7.3) pro převod Stieltjesova integrálu na Riemannův neplatí. Pro jednoduchost nejprve předpokládejme, že výše uvažovaná hmotná úsečka je homogenní, tj. lineární hustota λ je konstantní na $\langle 0, \ell \rangle$ a funkce m je tedy lineární rostoucí funkcí na tomto intervalu. V nějakém bodě $x_0 \in \langle 0, \ell \rangle$ přidejme na hmotnou úsečku ještě hmotný bod o hmotnosti m_0 a počítejme gravitační pole výsledné soustavy. Samozřejmě bychom mohli odděleně počítat gravitační pole homogenní úsečky a gravitační pole hmotného bodu a výsledky sečíst, ale my bychom nyní chtěli pohlížet na výslednou soustavu pouze jako na novou (nehomogenní) úsečku. Funkce m zůstává v intervalu $\langle 0, x_0 \rangle$ stejná jako v případě homogenní úsečky, v bodě x_0 je nespojitá (skok funkčních hodnot činí m_0) a dále v intervalu (x_0, ℓ) je opět lineární. Funkce m zůstává monotonní a omezená, takže Stieltjesův integrál (7.2) existuje i pro případ nové úsečky. Protože tato funkce není spojitá, nemůžeme integrál (7.2) upravit pomocí vzorce (7.3), ale použijeme následující obecnější větu [Rektorys and spol., 1963]:

Nechť $f(\xi)$ je spojitá v $\langle a, b \rangle$ a necht' $g(\xi)$ a $g'(\xi)$ jsou v $\langle a, b \rangle$ po částech spojité. Označme $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$ body nespojitosti funkce $g(\xi)$ v $\langle a, b \rangle$, s_k skok funkce $g(\xi)$ v bodě ξ_k . Pak níže uvedený Stieltjesův existuje a platí

$$\int_a^b f(\xi) dg(\xi) = \int_a^b f(\xi) g'(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n f(\xi_k) s_k, \quad (7.6)$$

tj. Stieltjesův integrál vypočteme snadno jako součet uvedeného Riemannova integrálu a skoků funkce $g(\xi)$ násobených funkčními hodnotami funkce $f(\xi)$ v bodech ξ_k .

Užitím (7.4) a (7.6) lze integrál pro intenzitu (7.2) v našem případě přepsat ve tvaru

$$E_x(x) = -G \lambda \int_0^\ell \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} - \frac{G m_0}{(x-x_0)^2}.$$

První člen na pravé straně popisuje pole homogenní přímky, druhý člen popisuje pole hmotného bodu.

Dostali jsme zajímavý výsledek: Zatímco Stieltjesův integrál umožňoval popsat pole celé soustavy, přechodem k lineární hustotě už integrál obsahující hustotu nepopisuje pole celé, neboť nezahrnuje pole hmotného bodu. Nelze zkonstruovat funkci hustoty

tak, aby umožňovala zahrnout i účinek hmotného bodu. I kdybychom lineární hustotu v bodě x_0 , kde není definována, definovali jako nekonečnou a přešli k Lebesguesovu integrálu, tento integrál nebude rovněž zahrnovat vliv hmotného bodu. Při výpočtu Lebesguesova integrálu můžeme totiž bod x_0 vynechat, protože se jedná o množinu míry nula. Popsaný problém se podaří překlenout teprve zavedením distribucí. S použitím teorie distribucí k řešení některých úloh teorie potenciálu se může čtenář seznámit např. v [Schwartz, 1972, Vladimirov, 1979], zde se jimi zabývat nebudeme. Budeme muset sice důsledně oddělovat bodové, lineární, plošné a objemové zdroje, ale zato vystačíme s elementárnějšími matematickými prostředky.

Symbol $dm(\xi)$ ve Stieltjesových integrálech typu (7.2) můžeme chápat jako element hmoty v infinitezimálním okolí bodu ξ , jako přírůstek funkce $m(\xi)$ na tomto intervalu:

$$dm(\xi) = \frac{dm(\xi)}{d\xi} d\xi = \lambda(\xi) d\xi.$$

Tato představa umožňuje bezprostředně rozšířit naše úvahy i na plošné a objemové zdroje, jak bude provedeno v následujícím paragrafu.

Hlavní poznatky z tohoto paragrafu můžeme shrnout následujícím způsobem: Zobecnění Newtonova gravitačního zákona a Coulombova zákona vede bezprostředně k vyjádření intenzity pole ve tvaru integrálů Stieltjesova typu. Teprve za některých doplňujících předpokladů lze přejít k běžným integrálům, v nichž vystupuje hustota zdrojů (v námi vyšetřované úloze postačila spojitost a omezenost hustoty s výjimkou konečného počtu bodů).

Úlohy

1. Užitím vzorce (7.5) vypočítejte intenzitu gravitačního pole homogenního tenkého drátu (hmotné úsečky) ve vnějším bodě P v prodloužení drátu. Interpretujte výsledek pomocí pole hmotného bodu. Jak se mění poloha ekvivalentního hmotného bodu, jestliže se pozorovatel P vzdaluje od úsečky [Kellogg, 1967]?

Odpověď:

$$E_x(x) = -\frac{G \lambda \ell}{x(x - \ell)} = -\frac{G M}{c^2},$$

kde $c = \sqrt{x(x - \ell)}$. Drát tedy přitahuje jednotkovou částici v bodě P stejně, jako kdyby hmota celého drátu byla soustředěna do jednoho bodu na drátu, jehož vzdálenost od bodu P je geometrickým průměrem vzdáleností bodu P od konců drátu. Při vzdalování bodu P se ekvivalentní hmotný bod posouvá ke středu drátu.

2. Intenzita gravitačního pole hmotné úsečky vedla na Stieltjesův integrál podle monotónní funkce m , resp. g . Uveďte jednoduchý fyzikální příklad, kdy příslušná funkce, podle níž integrujeme, nebude monotónní.

Odpověď: Nevodivá úsečka s lineárním rozložením kladných a záporných nábojů (nevodivá proto, aby se náboje opačného znaménka nevybily). V obecnější teorii Stieltjesova integrálu se proto místo monotónních funkcí obvykle uvažují funkce s konečnou variací [Král et al., 1972].

7.3 Obecné vzorce pro intenzitu pole

V tomto paragrafu odvodíme vzorce pro intenzitu pole objemově, plošně a lineárně rozložených zdrojů. Pokud čtenář tuto problematiku zná (alespoň zčásti) a nechce zacházet do podrobností níže diskutovaných, může i tento paragraf vynechat a přejít na čtení následující kapitoly, kde nejdůležitější vzorce zde odvozené budou znovu souhrnně uvedeny.

V prvním dílu skript jsme odvodili, že intenzita gravitačního pole soustavy n hmotných bodů je dána vzorcí, viz vzorce (3.9),

$$\begin{aligned} E_x &= -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(x - x_i)}{R_i^3}, \\ E_y &= -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(y - y_i)}{R_i^3}, \\ E_z &= -G \sum_{i=1}^n \frac{m_i(z - z_i)}{R_i^3}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Jednotlivé symboly v těchto vzorcích mají následující význam:

$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitační konstanta; m_i je hmotnost i -tého hmotného bodu, jehož kartézské souřadnice jsou x_i, y_i, z_i ; souřadnice x, y, z jsou souřadnicemi nějakého bodu P , v němž určujeme intenzitu pole; R_i je vzdálenost bodu P od i -tého hmotného bodu, tj. $R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}$. Pro bod P , v němž určujeme pole, budeme také někdy používat názvu „pozorovatel“ nebo „pól“ [Pick et al., 1973]. Poznamenejme, že jsme v prvním dílu skript označovali vzdálenost i -tého hmotného bodu a pozorovatele P jako d_i . Avšak písmeno „d“ nyní bude vystupovat také v integračních symbolech dm, dV apod., proto jsme pro vzdálenost raději zvolili R_i , což je v soulase s označeními např. v učebnici [Votruba and Muzikář, 1955].

Místo tří vzorců pro složky pole budeme často používat zápisu pomocí jednoho vektorového. Označme $\vec{r}$ polohový vektor pozorovatele P , $\vec{r}_i$ polohový vektor i -tého hmotného bodu, $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$ vektor, jehož počáteční bod je v i -tém hmotném bodu a koncovým bodem je bod P . Vzorce (7.7) můžeme pak zkráceně zapsat v následujících vektorových tvarech

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \sum_{i=1}^n m_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{R_i^3} = -G \sum_{i=1}^n m_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3}. \quad (7.8)$$

Intenzitu elektrostatického pole soustavy bodových nábojů ve vakuu dostaneme ihned ze vzorců (7.7) nebo (7.8), jestliže místo m_i píšeme velikost i -tého náboje q_i a místo konstanty ($-G$) píšeme $1/(4\pi\epsilon_0)$, kde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ je permitivita vakua (používáme soustavu SI):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3}. \quad (7.9)$$

Uvedené vzorce zobecníme na případy, kdy zdroje pole (hmoty, elektrické náboje) jsou rozprostřeny po objemech, plochách nebo křivkách.

7.3.1 Objemově rozložené hmoty nebo náboje

Předpokládejme, že přitahující hmoty vytvářejí těleso o objemu V . Chceme určit intenzitu gravitačního pole působenou tímto tělesem v nějakém bodě P . Rozdělme těleso obvyklým způsobem (např. pomocí tří soustav na sebe kolmých rovin) na malé části. Hmotnost k -té části označme Δm_k . Uvažujme částici (hmotný bod) o této hmotnosti umístěný v nějakém bodě Q_k uvažované části. Kartézské souřadnice bodu Q_k označme x'_k, y'_k, z'_k , souřadnice bodu P označme x, y, z . Podle (7.7) je příspěvek uvažovaného hmotného bodu k intenzitě v bodě P dán vzorcí:

$$\begin{aligned}(\Delta E_x)_k &= -G \frac{(x - x'_k) \Delta m_k}{R_k^3}, \\(\Delta E_y)_k &= -G \frac{(y - y'_k) \Delta m_k}{R_k^3}, \\(\Delta E_z)_k &= -G \frac{(z - z'_k) \Delta m_k}{R_k^3},\end{aligned}\tag{7.10}$$

kde R_k je vzdálenost bodů P a Q_k . Sečtěme nyní příspěvky od všech částí a přejděme k limitě pro případ, že se dělení tělesa zjemňuje a rozměry všech částí se blíží k nule. Výsledkem budou složky intenzity v bodě P působené uvažovaným tělesem:

$$\begin{aligned}E_x(P) &= -G \iiint_V \frac{x - x'}{R^3} dm, \\E_y(P) &= -G \iiint_V \frac{y - y'}{R^3} dm, \\E_z(P) &= -G \iiint_V \frac{z - z'}{R^3} dm,\end{aligned}\tag{7.11}$$

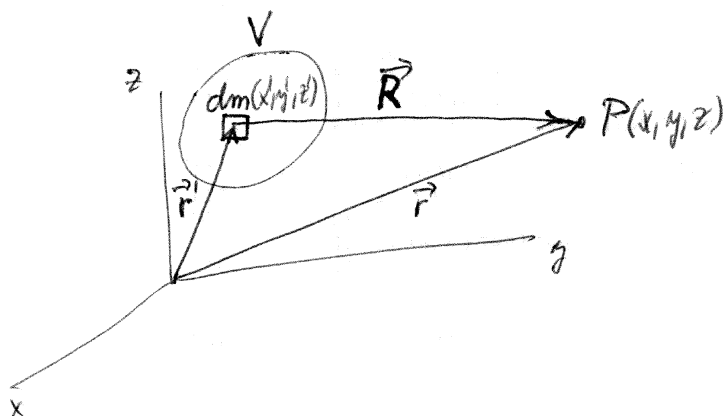
kde, jak je zcela zřejmé, jsme souřadnice bodu Q tělesa označili x', y', z' , vzdálenost tohoto bodu od bodu P je $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ a dm značí element hmoty (zatím to ještě nemusí být diferenciál). Při integraci přes těleso jsou x', y', z' proměnné, složky intenzity jsou funkcemi souřadnic bodu P , tj. $E_x = E_x(x, y, z)$ atd.

Polohový vektor pozorovatele P označme $\vec{r} = (x, y, z)$, polohový vektor bodu tělesa Q , v němž se nachází hmotný element dm , označme $\vec{r}' = (x', y', z')$, vektor s počátečním bodem Q a koncovým bodem P označme $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x - x', y - y', z - z')$, viz obr. 2. Potom vzorce (7.11) pro složky intenzity můžeme zapsat ve vektorovém tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{R^3} dm = -G \iiint_V \frac{\vec{R}}{R^3} dm,\tag{7.12}$$

kde integraci provádíme přes čárkované souřadnice, $dm = dm(\vec{r}')$.

Poznamenejme, že jsme dosud vůbec nepředpokládali spojitě (ve smyslu hustoty) rozložení hmoty; v uvažovaném objemu mohou být rozloženy hmoty nejrůznějších vlastností. Předpokládejme však dále, že rozložení hmot můžeme charakterizovat pomocí hustoty. Hustotou ρ (nebo objemovou hustotou) v bodě Q tělesa rozumíme limitu poměru hmot-



Obrázek 2

nosti elementu tělesa obsahujícího bod Q k objemu tohoto elementu, jestliže se rozměry elementu blíží k nule (jestliže se nejdelší „tětiva“ blíží k nule):

$$\varrho = \lim \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (7.13)$$

Přitom se požaduje, aby hodnota této limity nezávisela na tvarech uvažovaných elementů; kdyby na nich závisela, řekli bychom, že hustota neexistuje. V dalším budeme předpokládat, že hustota existuje a je spojitá. Ve fyzikálně důležitých případech, v nichž jsou hustoty nespojité, může být těleso obvykle rozděleno na několik dílčích těles, ve kterých jsou již hustoty spojitě [Kellogg, 1967].

Vraťme se k úvahám o dělení tělesa na části. Hmotnost k -té části Δm_k bude ležet mezi nejmenší a největší hodnotou hustoty v této části vynásobenou objemem této části ΔV_k . Je-li hustota spojitá, bude v uvažované části existovat takový bod Q_k , že

$$\Delta m_k = \varrho(Q_k) \Delta V_k. \quad (7.14)$$

Dosaďme tento výraz do vzorců (7.10) a provedme stejný postup jako výše. Místo obecných vzorců (7.11) dostaneme nyní vzorce pro intenzitu ve speciálnějším tvaru

$$\begin{aligned} E_x(P) &= -G \iiint_V \varrho \frac{x - x'}{R^3} dV, \\ E_y(P) &= -G \iiint_V \varrho \frac{y - y'}{R^3} dV, \\ E_z(P) &= -G \iiint_V \varrho \frac{z - z'}{R^3} dV, \end{aligned} \quad (7.15)$$

kde hustota ϱ je obecně funkcí souřadnic x' , y' , z' . Tyto vzorce můžeme vektorově zapsat v následujícím tvaru, viz obr. 2,

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iiint_V \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dV, \quad (7.16)$$

kde integrace se provádí přes čárkované souřadnice (v učebnici [Votruba and Muzikář, 1955] se připojuje čárka také k symbolu dV , aby se zdůraznilo integrování podle čárkovaných souřadnic, my to zavádět nebudeme, ale tuto situaci budeme mít stále na mysli).

Vzorce (7.15) a (7.16) budeme považovat za výchozí vzorce na výpočet intenzity gravitačního pole objemově rozložených hmot; obecnějších vzorců (7.11) a (7.12) užívat nebudeme. Viděli jsme, že vzorce (7.15) a (7.16) plynou ze (7.11) a (7.12), pokud lze zavést hustotu, avšak sama existence hustoty ještě nestačí. Hustota musí splňovat ještě jisté podmínky, postačí např. spojitost hustoty (viz odvození vzorce (7.14)).

Vzorce (7.15) jsme mohli odvodit přímo ze (7.11) následujícím postupem. Předpokládejme, že element ΔV_k zmenšujeme tak, že stále obsahuje nějaký pevný bod Q . Užitím (7.14) a přechodem k limitě dostáváme, že pro hmotnost infinitesimálního elementu obsahujícího bod Q o polohovém vektoru $\vec{r}'$ platí

$$dm(\vec{r}') = \varrho(\vec{r}') dV, \quad (7.17)$$

což po dosazení do (7.11) ihned dává vzorce (7.15).

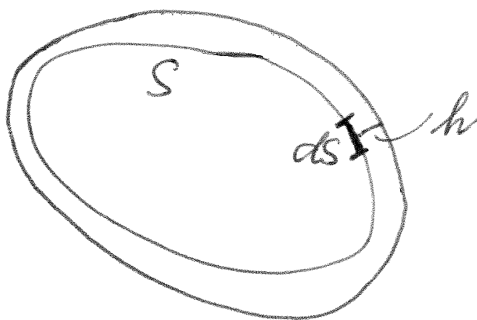
Vzorce pro intenzitu elektrostatického pole ve vakuu působeného objemově rozloženými náboji jsou zcela obdobné vzorcům (7.15), resp. (7.16), pouze místo konstanty ($-G$) je třeba psát $1/(4\pi\epsilon_0)$ a hustotou ϱ je třeba rozumět hustotu náboje.

Intenzita pole hmotného bodu je nekonečná v místě, kde se hmotný bod nachází. Integrandy ve vzorcích (7.15) jsou rovněž singulární, jestliže se pozorovatel P nachází uvnitř tělesa. Lze však ukázat, že hodnoty integrálů (7.15) zůstávají konečné i ve vnitřních bodech tělesa, viz odvození v kap. 12. Pro úplnost doplňme, že i v případech, kdy jsou zdroje pole rozloženy po plochách, je intenzita konečná ve všech bodech prostoru. Avšak v případě rozložení zdrojů na křivce je intenzita v bodech křivky singulární (obdobu hmotného bodu). Uvedené vlastnosti lze ilustrovat např. na speciálních případech, které jsou vyšetřovány v kap. 11. Obecné důkazy podáme v kap. 12 a 13.

7.3.2 Plošně rozložené hmoty nebo náboje (jednoduchá vrstva)

Jak jsme již uvedli v prvním dílu skript, je místo reálných objemových zdrojů pole často užitečné zavádět různé fikce, jako jsou zdroje bodové, plošné nebo lineární. Z hlediska formálně matematického spočívá užitečnost takovýchto fikcí v tom, že místo trojných integrálů, které musíme počítat při určování pole objemových zdrojů, vystačíme u plošných zdrojů pouze s dvojnými integrály, u lineárních zdrojů dokonce si jednorozměrnými integrály a v případě bodových zdrojů již vůbec integrovat nemusíme.

Všimněme si zde pole plošně rozložených hmot nebo nábojů. Předpokládejme, že hmoty jsou rozloženy na ploše S ve formě velmi tenké vrstvy o tloušťce h (obr. 3). Budeme-li zmenšováním h posouvat hmoty k ploše S (např. podél kolmic k ploše S), dospíváme k představě plošného rozložení hmot. Toto limitní uspořádání budeme nazývat jednoduchou vrstvou. Uvedený limitní přechod nemůžeme sice prakticky realizovat, je-li vrstva složena z nějaké látky, ale docela reálný smysl má v elektrostatice, kde náboje leží na povrchu vodiče. Ovšem i v teorii gravitačního pole má představa plošných zdrojů oprávnění,



Obrázek 3

pokud tloušťka vrstvy h je malá vzhledem k rozměrům plochy S a vzhledem ke vzdálenosti pozorovatele od této plochy. Kromě toho lze ukázat, že pole objemově rozložených hmot můžeme v některých případech formálně nahradit polem plošně rozložených hmot.

Aniž bychom opakovali úvahy uvedené výše, je zřejmé, že vzorec pro intenzitu pole plošně rozložených hmot dostaneme ihned ze vzorce (7.12), kde pouze místo integrace přes objem budeme integrovat přes plochu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iint_S \frac{\vec{R}}{R^3} dm, \quad (7.18)$$

přitom stejně jako výše je $\vec{r}$ polohový vektor bodu P , v němž intenzitu určujeme, $\vec{r}'$ je polohový vektor bodu Q na ploše S (přes body plochy S integrujeme), $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ a dm je plošný element hmoty.

Budeme vždy předpokládat, že plocha S a rozložení hmot na ní mají takové vlastnosti, že existuje spojitá funkce σ definovaná na S vztahem

$$\sigma = \lim \frac{\Delta m}{\Delta S}, \quad (7.19)$$

kde Δm je element hmoty připadající na element plochy ΔS a v limitě zmenšujeme rozměry plošného elementu k nule. Funkci σ budeme nazývat plošnou hustotou (nebo jen hustotou, pokud nemůže dojít k nedorozumění). Pro infinitezimální hmotný element dm připadající na infinitezimální plošný element dS pak platí

$$dm(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') dS \quad (7.20)$$

a vzorec pro intenzitu (7.18) lze přepsat ve tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iint_S \sigma(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} dS. \quad (7.21)$$

Z tohoto vzorce budeme vycházet při výpočtech intenzity gravitačního pole plošně rozložených hmot. Pro výpočet intenzity elektrostatického pole ve vakuu, působeného plošně rozloženými náboji s hustotou σ , je ve vzorcích (7.21) pouze třeba nahradit konstantu $(-G)$ konstantou $1/(4\pi\epsilon_0)$.

Aby integrál v (7.21) existoval, musí splňovat jisté podmínky nejen hustota σ , ale i plocha S . V těchto skriptech budeme o všech plochách předpokládat, že jsou hladké nebo

se skládají z konečného počtu hladkých částí. To by však nestačilo, protože i některé hladké plochy mohou být velmi složité, mohou např. v některých místech nekonečněkrát „oscilovat“. Takovéto složité plochy musíme z našich úvah vyloučit, musíme se omezit jen na „rozumné“ hladké plochy. Takovými speciálními případy hladkých ploch jsou např. plochy Ljapunovovy, o nichž blíže pojednáme v kap. 13. Zatím se spokojíme s konstatováním, že všechny běžné plochy, se kterými se setkáváme ve fyzikálních úlohách, požadované vlastnosti mají.

Obdobně budeme předpokládat, že i všechny uvažované křivky se skládají z konečného počtu hladkých a „rozumných“ úseků.

7.3.3 Křivkově (lineárně) rozložené hmoty nebo náboje

Uvažujme drát například kruhového průřezu, přičemž středy kružnic leží na nějaké křivce C . Budeme-li si představovat hmotu mezi libovolnou dvojicí rovin kolmých k C jakoby byla zkoncentrována na křivce C mezi těmito rovinami, dospíváme k představě hmotné křivky. Dělením křivky na úseky, zjemňováním tohoto dělení a limitním přechodem dospíváme ke vzorci pro intenzitu, který je stejný jako vzorce (7.12) a (7.18) až na to, že nyní integrujeme podél křivky C :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \int_C \frac{\vec{R}}{R^3} dm. \quad (7.22)$$

Význam jednotlivých symbolů v těchto vzorcích je stejný jako u vzorců (7.12) a (7.18).

Lineární hustotou λ hmotné křivky v bodě $Q(x', y', z')$ budeme nazývat limitu poměru hmotnosti libovolného úseku křivky obsahujícího bod Q k délce tohoto úseku, jestliže se délka úseku blíží k nule. Budeme předpokládat, že křivka C a rozložení hmot na ní mají takové vlastnosti, že uvedená limita existuje ve všech bodech křivky a je na této křivce spojitá. Pro element hmoty dm připadající na element délky ds podél křivky nyní platí

$$dm(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') ds \quad (7.23)$$

a vzorec (7.22) nabývá tvaru

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \int_C \lambda(\vec{r}') \frac{\vec{R}}{R^3} ds. \quad (7.24)$$

V případě elektrostatického pole nabitě křivky ve vakuu je v těchto vzorcích opět třeba místo $(-G)$ psát $1/(4\pi\epsilon_0)$.

7.3.4 Objemově rozložené dipóly

Mohlo by se zdát, že výše zavedená objemová, plošná a lineární rozložení zdrojů nám umožní popsat všechny fyzikální situace, se kterými se setkáme při studiu gravitačního, elektrostatického, případně i magnetostatického pole. Není tomu tak, příroda je složitější než zmíněné zjednodušené matematické modely. Příkladem může být polarizované dielektrikum. V tomto případě je v celém tělese i v jeho jednotlivých částech (ovšem v částech

podstatně větších než jsou rozměry atomů) stejný počet kladných i záporných nábojů, takže výsledná prostorová hustota náboje je všude nulová. V důsledku systematického posunu kladných nábojů vzhledem k nábojům záporným v každé části tělesa však výsledné elektrické pole nebude nulové. Vhodným modelem pro tuto fyzikální situaci bude těleso s objemovým rozložením elektrických dipólů. Naprosto obdobná situace je v magnetismu, kde zmagnetované těleso si můžeme představit jako složené z elementárních magnetických dipólů.

V prvním dílu skript jsme vyšetřovali pole dipólu umístěného v počátku soustavy souřadnic. Tuto úlohu potřebujeme nyní zobecnit, budeme předpokládat, že se dipól nachází v bodě o polohovém vektoru $\vec{r}'$. Označme $\vec{r}$ polohový vektor pozorovatele a zavedme opět $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Pro intenzitu pole elektrického dipólu s momentem $\vec{p}$ ve vakuu pak platí vzorec

$$\vec{E} = -\text{grad } U, \quad (7.25)$$

kde potenciál U je dán vztahem (viz speciální vzorec (4.8) v prvním dílu skript)

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3}. \quad (7.26)$$

Pro intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ buzeného magnetickým dipólem o momentu $\vec{m}$ platí

$$\vec{H} = -\text{grad } U, \quad (7.27)$$

kde

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{m} \cdot \vec{R}}{R^3}. \quad (7.28)$$

Všimněme si blíže výpočtu intenzity pomocí uvedených vzorců. Polohové vektory vyjádříme pomocí jejich složek, tj. $\vec{r} = (x, y, z)$ a $\vec{r}' = (x', y', z')$. Platí $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x - x', y - y', z - z')$ a $R = |\vec{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. Gradientem ve vztazích (7.25) a (7.27) rozumíme vektor, jehož složky dostaneme derivováním podle nečárkovaných souřadnic x, y, z . Protože vektor $\vec{p}$ závisí jen na čárkovaných souřadnicích, $\vec{p} = \vec{p}(\vec{r}')$, platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^3} \right) &= \frac{\partial(\vec{p} \cdot \vec{R})}{\partial x} \frac{1}{R^3} + (\vec{p} \cdot \vec{R}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R^3} \right) = \\ &= \frac{p_x}{R^3} + (\vec{p} \cdot \vec{R}) \frac{-3}{R^4} \frac{x - x'}{R}, \end{aligned}$$

kde jsme při derivování skalárního součinu $\vec{p} \cdot \vec{R}$ použili zápisu

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{R} &= p_x R_x + p_y R_y + p_z R_z = \\ &= p_x(x - x') + p_y(y - y') + p_z(z - z'). \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že dosazením (7.26) do (7.25) dostaneme [Votruba and Muzikář, 1955]

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{p} \right\}. \quad (7.29)$$

Předpokládejme, že elektrické dipóly jsou spojitě rozloženy v nějakém objemu V . Označme $\vec{P}$ dipólový moment, připadající na jednotku objemu. Vektor $\vec{P}$ udává hustotu dipólových momentů a nazývá se vektorem polarizace. Dipólový moment v elementárním objemu dV je tedy roven $\vec{P} \cdot dV$. Ze vzorce (7.29) a principu superpozice plyne, že elektrické pole ve vakuu buzené polarizovaným tělesem je dáno vzorcem

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \text{grad} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{P} \right\} dV,\end{aligned}\tag{7.30}$$

kde integrace se opět provádí přes čárkované souřadnice a vektor $\vec{P}$ je funkcí těchto souřadnic, $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}')$.

Uvažujme nyní zmagnetované těleso. Hustotu magnetického momentu, tj. magnetický moment připadající na jednotku objemu, označme $\vec{M}$. Vektor $\vec{M}$ budeme nazývat vektorem magnetizace (též hustotou magnetizace [Kellogg, 1967]). Výraz pro intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ buzeného uvažovaným tělesem dostaneme ihned formálním přepisem vzorce (7.30), využijeme-li podobnosti vzorců (7.26) a (7.28):

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{-1}{4\pi} \iiint_V \text{grad} \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^3} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{M} \right\} dV.\end{aligned}\tag{7.31}$$

7.3.5 Plošně rozložené dipóly, dvojvrstva

Vzorce pro intenzitu pole plošně rozložených dipólů dostaneme ihned z výše uvedených vzorců pro objemově rozložené dipóly, jestliže v nich integraci přes objem nahradíme integrací přes plochu a objemové hustoty dipólů zaměníme plošnými hustotami dipólů. Uvedme jen vzorec pro pole plošně rozložených magnetických dipólů s plošnou hustotou $\vec{\mu}$, který má zřejmě tvar

$$\begin{aligned}\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{-1}{4\pi} \iint_S \text{grad} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{R}}{R^3} dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{1}{R^3} \left\{ 3 \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{R}}{R^2} \vec{R} - \vec{\mu} \right\} dS.\end{aligned}\tag{7.32}$$

V tomto vzorci může mít plošná magnetizace $\vec{\mu}$ zcela libovolný směr vzhledem k normále plochy S . Například magnetické pole tenké desky, zmagnetované šikmo vzhledem k povrchu, můžeme počítat pomocí vzorce (7.32).

Zvláštní význam má speciální případ, kdy dipólové momenty jsou v každém bodě plochy orientovány kolmo k této ploše. Tomuto modelu budeme říkat dvojvrstva. Zdůvodnění tohoto termínu ilustrujeme na případě elektrické dvojvrstvy. V tomto případě jsou na

ploše rozloženy elektrické dipóly orientované kolmo k této ploše. Kdybychom každý dipól uprostřed „rozřízli“, dostaneme dvě vrstvy nábojů, dvě jednoduché vrstvy těsně u sebe. Odtud vyplývá označení „dvojvrstva“. Tyto dvě jednoduché vrstvy mají však tu speciální vlastnost, že je-li v nějakém místě jedné vrstvy náboj q , je v „sousedním“ místě ve druhé vrstvě náboj $(-q)$.

Význam dvojvrstvy spočívá v tom, že se s tímto modelem setkáváme nejen v problémech magnetismu a polarizace dielektrik, ale i v elektrostatických úlohách s vodiči a dokonce i v teorii gravitačního pole. Uvažujme např. dvě stejné vodivé desky umístěné blízko sebe (kondenzátor), které jsou nabitě stejně velikými náboji, ale opačného znaménka. Elektrostatické pole této soustavy můžeme ve vzdálenostech větších než je vzdálenost desek považovat za pole dvojvrstvy. V teorii gravitačního pole může být pojem dvojvrstvy také zaveden, ovšem jen jako pojem fiktivní, protože záporné hmoty fyzikálně nepřipouštíme. Ovšem velmi často se studují různá poruchová gravitační pole, která jsou způsobena odchylkami v rozložení hmot od jistého průměru. Tyto rozdílové hmoty mohou již být jak kladné, tak i záporné (nadbytek či nedostatek hmot ve srovnání s průměrem), takže v teorii poruchového gravitačního pole se s pojmem dvojvrstvy můžeme setkat a tento pojem má plné fyzikální oprávnění [Pick et al., 1973].

V případě dvojvrstvy můžeme výše uvedený obecný vzorec (7.32) přepsat ještě v jiných tvarech, jak bude ukázáno v následující kapitole.

Obdobně, jako jsme uvažovali rozložení hmot nebo nábojů na nějaké křivce, mohli bychom uvažovat rozložení dipólů na křivce. Například pole zmagnetovaného tenkého válce bychom mohli aproximovat polem úsečky s lineárním rozložením magnetických dipólů. Protože takovéto modely se potřebují jen zřídka, nebudeme se jimi zde zabývat.

Rovněž nebudeme vyšetřovat rozložení vyšších multipólů po objemech, plochách a křivkách, což by nyní mělo logicky následovat. Jistě by se našlo množství zajímavých aplikací takových modelů např. ve fyzice pevných látek, ale v makroskopických teoriích gravitačního, elektrostatického a magnetického pole se nepoužívají (důvody se v učebnicích elektromagnetického pole neuvádějí, ale hlavní příčinou je pravděpodobně to, že pole takových soustav se obvykle uvažovat nemusejí, protože intenzity rychle klesají se vzdáleností, a kromě toho by byl matematický popis již značně složitý).

Kapitola 8

Výchozí vzorce pro Newtonův potenciál a příbuzné veličiny

8.1 Obecné vzorce pro potenciál

Odvoďme vzorce na výpočet potenciálu pro pole, která jsme uvažovali v předchozí kapitole. V integrálech, které udávaly intenzitu pole, budeme chtít integrand vyjádřit pomocí gradientu nějaké skalární funkce.

Zopakujme některá označení z předcházející kapitoly, viz obr. 2. Polohový vektor bodu P , v němž počítáme pole, jsme označili $\vec{r} = (x, y, z)$. Polohový vektor uvažovaného hmotného elementu dm (objemového, plošného nebo lineárního) jsme označili $\vec{r}' = (x', y', z')$. Vektor, který má počátek v hmotném elementu a koncový bod v bodě P , jsme označili $\vec{R}$, tj.

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x - x', y - y', z - z'). \quad (8.1)$$

Pro velikost vektoru $\vec{R}$ platí

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (8.2)$$

Ve vzorcích v předchozím paragrafu pravidelně vystupovala veličina $\vec{R}/R^3$. Ukážeme, že ji lze vyjádřit pomocí gradientu funkce $1/R$.

Funkce R je funkcí nečárkovaných souřadnic x, y, z a čárkovaných souřadnic x', y', z' . Pokud budeme počítat gradient vzhledem k nečárkovaným souřadnicím, budeme jej značit obvyklým symbolem grad . Pokud budeme počítat gradient vzhledem k čárkovaným souřadnicím, budeme k symbolu gradientu též připojovat čárku, tj. grad' . Tedy

$$\text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) = \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x}, \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial y}, \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial z} \right). \quad (8.3)$$

Počítejme první složku tohoto gradientu. Z (8.2) plyne

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial x} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{R^2} \frac{x - x'}{R} = -\frac{R_x}{R^3}. \quad (8.4)$$

Obdobné vzorce platí i pro zbývající dvě složky gradientu. Odtud plyne

$$\frac{\vec{R}}{R^3} = -\text{grad}\left(\frac{1}{R}\right). \quad (8.5)$$

Tento vzorec patří vůbec k nejdůležitějším vzorcům teorie potenciálu, bez přehánění bychom jej mohli označit za **základní vzorec teorie potenciálu**. Svým významem se řadí hned za Newtonův a Coulombův zákon a princip superpozice. Umožňuje popsat výše studovaná fyzikální pole pomocí jediné skalární funkce – potenciálu, jak hned ukážeme. Máme-li být zcela přesní, musíme však předeslat, že v některých speciálních případech nebude možné zavést potenciál užitím vzorce (8.5), ale ve většině případů to půjde.

8.1.1 Potenciál objemově, plošně a lineárně rozložených hmot nebo nábojů

Vzorce, odvozené v předcházejícím paragrafu pro intenzitu gravitačního pole působeného objemovými, plošnými a lineárními zdroji, můžeme užitím (8.5) přepsat v následujících tvarech

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iiint_V \varrho \frac{\vec{R}}{R^3} dV = G \iiint_V \varrho \text{grad}\left(\frac{1}{R}\right) dV = G \iiint_V \text{grad}\left(\frac{\varrho}{R}\right) dV, \quad (8.6)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \iint_S \sigma \frac{\vec{R}}{R^3} dS = G \iint_S \text{grad}\left(\frac{\sigma}{R}\right) dS, \quad (8.7)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -G \int_C \lambda \frac{\vec{R}}{R^3} ds = G \int_C \text{grad}\left(\frac{\lambda}{R}\right) ds, \quad (8.8)$$

kde ϱ je objemová hustota, σ je plošná hustota, λ lineární hustota, všechny tyto hustoty jsou funkcemi jen čárkovaných souřadnic, takže jsme je mohli zapsat až za znak gradientu, integrace se rovněž provádějí podle čárkovaných souřadnic.

Předpokládejme, že v uvedených vzorcích lze zaměnit pořadí integrace a derivace (gradientu). Pak bude možné vyjádřit intenzitu pomocí gradientu skalární funkce. Podle fyzikálních zvyklostí zavedeme tuto skalární funkci, kterou budeme nazývat potenciálem, takovým způsobem, aby se intenzita rovnala záporně vzatému gradientu potenciálu:

$$\vec{E} = -\text{grad } U. \quad (8.9)$$

Pro potenciály objemových, plošných a lineárních hmot pak postupně dostáváme

$$U(\vec{r}) = -G \iiint_V \frac{\varrho}{R} dV, \quad (8.10)$$

$$U(\vec{r}) = -G \iint_S \frac{\sigma}{R} dS, \quad (8.11)$$

$$U(\vec{r}) = -G \int_C \frac{\lambda}{R} ds. \quad (8.12)$$

Vzorce pro potenciály elektrostatického pole buzeného objemovými, plošnými a lineárními náboji ve vakuu dostaneme ihned ze vzorců (8.10) až (8.12), jestliže v nich nahradíme konstantu ($-G$) konstantou $1/(4\pi\epsilon_0)$ a pod hustotami ϱ , σ , λ rozumíme příslušné hustoty náboje.

Potenciály typu (8.10) až (8.12), obsahující v integrandu funkci $1/R$, budeme nazývat **Newtonovými potenciály**. Uvidíme, že v některých případech nebude možné výsledné pole popsat pomocí Newtonova potenciálu, i když působení mezi jednotlivými částicemi se řídí Newtonovým gravitačním zákonem nebo Coulombovým zákonem. Takovým případem bude logaritmický nebo lineární potenciál (viz kap. 11) a samozřejmě, v obecném případě, i potenciál rozložených dipólů.

8.1.2 Potenciál objemově rozložených dipólů

Vzorce pro potenciál prostorově a plošně rozložených stacionárních dipólů byly v podstatě uvedeny už na konci předcházejícího paragrafu, postačí pouze opět připojit předpoklad o možnosti záměny integrálu a derivace. Například intenzitu magnetostatického pole zmagnetovaného tělesa můžeme psát ve tvaru

$$\vec{H} = -\text{grad } U, \quad (8.13)$$

kde pro potenciál platí

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{R^3} dV, \quad (8.14)$$

vektor $\vec{M}$ je vektor magnetizace (dipólový moment v jednotkovém objemu).

Poslední vzorec pro magnetostatický potenciál se často zapisuje i v jiných, ekvivalentních, tvarech. Předně můžeme výraz $\vec{R}/R^3$ v tomto vzorci opět přepsat pomocí základního vzorce (8.5):

$$U = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) dV. \quad (8.15)$$

Zavedeme-li gradient podle čárkovaných souřadnic, označíme jej grad' , z (8.2) a (8.5) plyne

$$\text{grad}' \left(\frac{1}{R} \right) = \left(\frac{x-x'}{R^3}, \frac{y-y'}{R^3}, \frac{z-z'}{R^3} \right) = \frac{\vec{R}}{R^3} = -\text{grad} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (8.16)$$

Přechodem ke gradientu podle čárkovaných souřadnic musíme ve vzorci (8.15) změnit jen znaménko:

$$U = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{M} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{R} \right) dV. \quad (8.17)$$

V teorii i při praktických výpočtech se často používají ještě dva důležité vzorce, které se dostanou dalšími úpravami vzorců (8.15) a (8.17). Přistupme nejprve k odvození obecného vzorce, který plyne ze vzorce (8.17).

Užitím známé identity pro divergenci

$$\text{div} (b \vec{A}) = b \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } b \quad (8.18)$$

lze vzorec (8.17) zapsat ve tvaru

$$U = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{div}' \vec{M}}{R} dV + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \operatorname{div}' \left(\frac{\vec{M}}{R} \right) dV.$$

Upravíme-li poslední integrál pomocí Gaussovy věty, dostáváme

$$U = \iiint_V \frac{\varrho}{R} dV + \iint_S \frac{\eta}{R} dS, \quad (8.19)$$

kde jsme označili

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{div}' \vec{M}, \quad \eta = \frac{M_n}{4\pi}, \quad (8.20)$$

S je povrch tělesa V a M_n je normálová složka magnetizace (složka magnetizace ve směru vnější normály k ploše S). Připomeňme, že pro použití Gaussovy věty postačí, bude-li funkce $\vec{M}/R$ i se svými prvními parciálními derivacemi omezená a spojitá všude v tělese V a na jeho povrchu S . To bude např. splněno, pokud $\vec{M}$ bude omezené a spojitě i se svými prvními parciálními derivacemi a pole vyšetřujeme jen vně tělesa, takže vzdálenost R se nikde nerovná nule. Příklad pole ve vnitřních bodech by vyžadoval hlubší rozbor, který zde provádět nebudeme, protože většinou se budeme zabývat jen vnějším polem, např. v úlohách užitých geofyziky.

Všimněme si, že členy na pravé straně vzorce (8.19) jsou formálně stejné, až na konstantu, jako potenciály pro objemově a plošně rozložené hmoty nebo elektrické náboje, viz (8.10) a (8.11). Můžeme tedy veličinu ϱ , zavedenou v (8.20), považovat za jakousi objemovou hustotu „magnetických množství“ a η za příslušnou plošnou hustotu. Magnetostatický potenciál zmagnetovaného tělesa (a obdobně potenciál polarizovaného dielektrika) můžeme tedy vyjádřit jako součet dvou Newtonových potenciálů, jednoho objemového a jednoho plošného. Teoretický význam vzorců (8.19) a (8.20) tedy spočívá v tom, že umožňují začlenit vyšetřování magnetostatického pole do rámce teorie Newtonova potenciálu. S tím úzce souvisí i to, že také Gaussova a Schmidtova teorie zemského magnetického pole vycházejí ze vzorce (8.19), viz [Janovskij, 1964].

Všimněme si ještě, jak se vzorec (8.19) zjednoduší v případě homogenně zmagnetovaného tělesa, kdy $\vec{M}$ je konstantní vektor. Protože divergence konstantního vektoru je nulová, dostáváme $\varrho = 0$ a ve vzorci (8.19) zbude jen plošný integrál:

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{M_n}{R} dS. \quad (8.21)$$

Fyzikální vysvětlení tohoto výsledku je zřejmé; účinky vzájemně posunutých kladných a záporných „magnetických množství“, která mají nyní všude stejnou velikost, se uvnitř tělesa vzájemně ruší, nevyruší se pouze na povrchu tělesa.

Druhý důležitý vzorec, ovšem jen pro homogenně zmagnetované těleso, dostaneme ze vzorce (8.15). Předpokládáme-li, že vektor magnetizace $\vec{M}$ je konstantní, můžeme jej psát před integrál. Zaměníme-li ještě pořadí integrace a gradientu (v operaci grad derivujeme podle souřadnic pozorovatele, jedná se tedy o derivování integrálu podle parametru), dostáváme

$$U = -\frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \operatorname{grad} \iiint_V \frac{1}{R} dV.$$

Poznamenejme, že o předpokladech, kdy je možno zaměnit integrál a gradient, se zmíníme v následujícím paragrafu 8.2, podrobněji pak v kap. 12. Integrál v posledním výrazu představuje, až na konstantu ($-G$), gravitační potenciál homogenního tělesa, které má stejný objem a tvar jako uvažované zmagnetované těleso a jeho hustota hmoty je rovna jedné. Mezi magnetostatickým potenciálem homogenně zmagnetovaného tělesa a gravitačním potenciálem příslušného homogenního tělesa tedy platí vztah

$$U_{mag} = -\frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \text{grad } U_{grav}, \quad (8.22)$$

přičemž ovšem při výpočtu „gravitačního“ potenciálu U_{grav} klademe hustotu $\varrho = 1$ a vynecháváme konstantu ($-G$). Tvrzení, že potenciál homogenně zmagnetovaného tělesa lze určit z gravitačního potenciálu příslušného homogenního tělesa pomocí vzorce (8.22), se nazývá **Poissonova věta** [Janovskij, 1964].

K výpočtu potenciálu homogenně zmagnetovaného tělesa můžeme tedy použít vzorec (8.21) nebo (8.22). Kterému z nich dáme přednost, závisí na tvaru zmagnetovaného tělesa. Pro některá tělesa, např. hranol nebo válec, lze úlohu snadno vyřešit pomocí vzorce (8.21), pro jiná tělesa, jako koule nebo elipsoid, je výhodnější vyjít ze vzorců pro gravitační potenciál a použít (8.22), viz [Janovskij, 1964]. Obrovská praktická cena Poissonova vzorce (8.22) např. v užití geofyzice spočívá v tom, že vzorce pro gravitační potenciál homogenních těles, odvozené pro potřeby gravimetrického průzkumu, můžeme pomocí vzorce (8.22) poměrně snadno převést na vzorce, které se potřebují v magnetickém průzkumu.

8.1.3 Potenciál plošně rozložených dipólů, potenciál dvojvrstvy

Pro potenciál plošně rozložených magnetických dipólů obdobně dostáváme

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{R}}{R^3} dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{\mu} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{R} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \vec{\mu} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{R} \right) dS, \end{aligned} \quad (8.23)$$

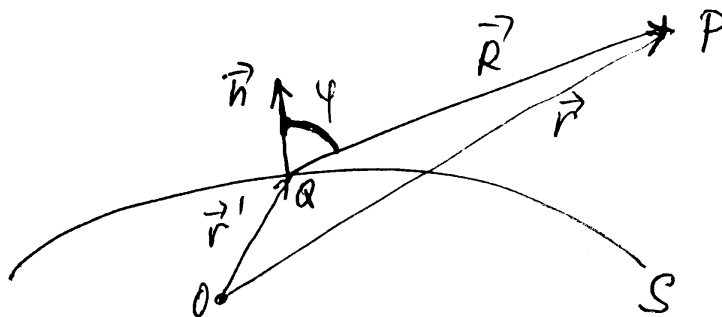
kde μ je plošná hustota magnetického momentu. Rozpisem skalárního součinu

$$\vec{\mu} \cdot \vec{R} = |\vec{\mu}| \cdot |\vec{R}| \cdot \cos \alpha,$$

kde α je úhel sevřený vektory $\vec{\mu}$ a $\vec{R}$, můžeme první ze vzorců (8.23) též zapsat ve tvaru

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S |\vec{\mu}| \frac{\cos \alpha}{R^2} dS. \quad (8.24)$$

Uvedme speciálně několik úprav vzorců (8.23) pro případ magnetické dvojvrstvy, kdy je podle definice vektor $\vec{\mu}$ všude kolmý k ploše S . Zvolme nějakým způsobem orientaci jednotkové normály $\vec{n}$ k ploše S . V případě dvojvrstvy můžeme psát $\vec{\mu} = \mu \vec{n}$, kde μ je kladné, pokud má vektor $\vec{\mu}$ stejnou orientaci jako $\vec{n}$, záporné v opačném případě. Označme φ úhel



Obrázek 4

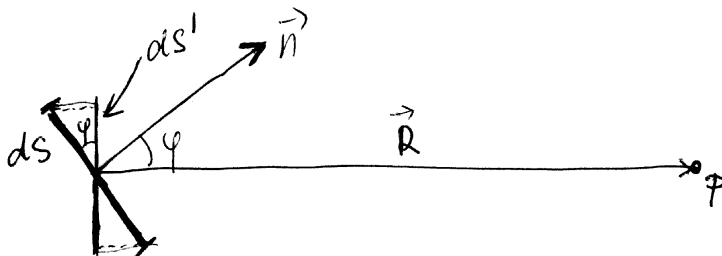
mezi normálou v nějakém bodě Q plochy S a spojnici tohoto bodu s bodem P , v němž potenciál počítáme (obr. 4). Pro skalární součin $\vec{\mu} \cdot \vec{R}$ pak platí

$$\vec{\mu} \cdot \vec{R} = \mu R \cos \varphi$$

a první ze vzorců (8.23) dává potenciál dvojvrstvy ve tvaru [Pick et al., 1973]

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\cos \varphi}{R^2} dS. \quad (8.25)$$

Ponecháváme čtenáři, aby porovnal tento vzorec se vzorcem (8.24). Přepišme poslední vzorec ještě v jiném tvaru. Výraz $dS \cos \varphi$ představuje průmět elementu plochy dS do roviny, která je kolmá ke spojnici bodů Q a P , viz obr. 5.



Obrázek 5

Velikost tohoto průmětu označme $dS' = dS \cos \varphi$. Označme $d\Omega$ prostorový úhel, pod kterým vidíme z bodu P plochu dS' (a tedy i plochu dS). Protože plocha dS' se nachází ve vzdálenosti R od bodu P , zřejmě platí

$$dS' = R^2 d\Omega.$$

Odtud plyne

$$\frac{\cos \varphi}{R^2} dS = \frac{dS'}{R^2} = d\Omega \quad (8.26)$$

a vzorec (8.25) nabývá jednoduchého tvaru [Votruba and Muzikář, 1955]

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu d\Omega, \quad (8.27)$$

kde element $d\Omega$ bereme kladný, je-li úhel φ ostrý jako na obr. 5 (z bodu P vidíme „kladnou“ stranu plochy dS); $d\Omega$ bereme záporné, je-li úhel φ tupý (z bodu P vidíme „zápornou“ stranu plochy dS). Kdybychom zvolili opačnou volbu znamének, objevilo by se ve vzorci (8.27) záporné znaménko [Kellogg, 1967]. Vzorec (8.27) není sice příliš vhodný k numerickým výpočtům, ale má velký význam v teorii. Uvedme ještě jeden vzorec pro potenciál dvojvrstvy, který se vyskytuje nejčastěji. V případě dvojvrstvy můžeme poslední ze vzorců (8.23) zapsat ve tvaru

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \vec{n} \cdot \text{grad}' \left(\frac{1}{R} \right) dS.$$

Skalární součin v tomto vzorci udává průmět gradientu do směru normály $\vec{n}$, tj. derivaci ve směru této normály. Odtud dostáváme vzorec pro potenciál magnetické dvojvrstvy ve tvaru

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) dS, \quad (8.28)$$

kde derivaci podle normály rozumíme derivaci ve směru normály podle čárkovaných souřadnic, tj. při derivování reciproké vzdálenosti bodů Q a P ponecháváme bod P pevný a bod Q posouváme podél normály, viz obr. 4. Někteří autoři volí směr normály opačně, než jsme zde zavedli, pak se ve vzorci (8.28) objeví záporné znaménko [Pick et al., 1973].

Můžeme tedy shrnout, že na výpočet potenciálu magnetické dvojvrstvy lze vedle obecných vzorců (8.23) použít kteréhokoliv ze vzorců (8.25), (8.27) nebo (8.28).

Diskuzi o mezích použitelnosti zde odvozených vzorců pro gravitační, elektrostatický a magnetostatický potenciál provedeme v následujících paragrafech 8.2 a 8.3.

Úlohy

1. Je-li $\vec{r} = (x, y, z)$ polohový vektor nějakého bodu a $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ jeho velikost, dokažte, že platí [Rektorys and spol., 1963]:

a) $\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{r}$;

b) $\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \text{grad } r = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

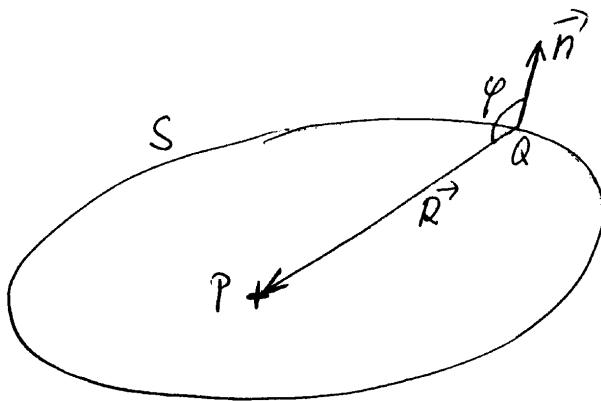
Všimněte si, že vzorce (8.5) a (8.16) jsou zobecněním posledního vzorce, kde místo $\vec{r}$ vystupuje $\vec{r} - \vec{r}'$.

2. Gaussův integrál. Uvažujme uzavřenou hladkou plochu S , její vnější normálu označme $\vec{n}$, viz obr. 4 a 6. Označme φ úhel mezi normálou v bodě plochy S a spojnici tohoto bodu s pólem P . Dokažte, že platí

$$\iint_S \frac{\cos \varphi}{R^2} dS = \begin{cases} -4\pi, & \text{je-li pól } P \text{ uvnitř } S, \\ -2\pi, & \text{pól } P \text{ na } S, \\ 0, & \text{pól } P \text{ vně } S. \end{cases} \quad (8.29)$$

Poznamenejme, že častěji se místo úhlu φ uvažuje ve vzorci (8.29) jeho doplněk, pak na pravých stranách jsou opačná znaménka [Pick et al., 1973].

Řešení: Vyplývá ihned ze vzorce (8.26). Jsme-li uvnitř, vidíme plochu S pod prostorovým úhlem 4π , ale vidíme její „zápornou“ stranu (vnější normála vychází z druhé strany). Jsme-li na hranici, je vidět opět vnitřek plochy S , ale pod prostorovým úhlem 2π . Je-li P vně, pak části plochy S „viditelné“ z P přísluší nějaký prostorový úhel Ω_0 , zbytku plochy přísluší prostorový úhel $(-\Omega_0)$, dohromady tedy nula.



Obrázek 6

8.2 Vztah mezi vzorci pro intenzitu a pro potenciál

Hlavní obecné poznatky, získané dosud v předešlé a v této kapitole, lze stručně shrnout následujícím způsobem. Intenzitu gravitačního, elektrostatického nebo magnetostatického pole působeného objemově, plošně nebo lineárně rozloženými zdroji můžeme v nejobecnějším případě vyjádřit pomocí integrálů Stieltjesova typu (pomocí Lebesguesových integrálů podle míry). Jestliže lze zavést hustotu zdrojů a tato hustota splňuje některé předpoklady (postačí spojitost hustoty), lze intenzitu již vyjádřit pomocí obvyklých integrálů, viz např. vzorce (8.6) až (8.8) pro gravitační pole. Protože dále v těchto skriptech budeme vždy předpokládat, že hustotu požadovaných vlastností lze zavést, budeme tyto vzorce pro intenzitu považovat za výchozí vzorce celé teorie. Teprve při splnění dalších předpokladů, které zajistí možnost záměny integrálu a derivace, je možné příslušná pole popsat pomocí potenciálů, které jsme výše zavedli. Tedy vzorce pro intenzitu budeme považovat za obecné, univerzálně platné, kdežto vzorce pro Newtonovy potenciály pouze za jejich speciální případ, použitelný jen za jistých předpokladů.

Samozřejmě, pokud to půjde, budeme dávat přednost popisu pole pomocí potenciálu, protože v tomto případě vystačíme jen s jednou skalární funkcí. Pouze v případech, kdy budou vznikat nějaké problémy s použitím Newtonových potenciálů, budeme se muset vrátit k obecnějším vzorcům pro intenzitu. V kap. 12 dokážeme, že Newtonův gravitační potenciál daný výše uvedenými vzorci správně popisuje pole prakticky ve všech případech, kdy uvažovaný integrační obor má konečné rozměry. Problémy však nastávají např. u pole

nekonečného drátu nebo nekonečné desky. I v těchto případech se sice nakonec podaří nějaké potenciály nalézt (pole jsou konzervativní), ale tyto potenciály nejsou Newtonovými potenciály. S obdobnou situací se setkáváme v elektrostatice, kde však navíc nelze vzorců pro Newtonův potenciál přímo použít i v některých úlohách s vodiči; například uzemněná deska kondenzátoru představuje plochu nulového potenciálu v konečnu, zatímco při odvozování vzorců pro Newtonův potenciál se předpokládalo, že tato hladina je v nekonečnu. Blíže to uvidíme na konkrétních příkladech v kap. 10 a 11. Pro přehlednost posudme zmíněné problémy ještě z hlediska budování fyzikální teorie.

V těchto skriptech jsme zvolili jistý postup při budování teorie, ale zatím jsme nediskutovali otázku, zdali nebylo možné postupovat i jinak. V této souvislosti čtenář může právem namítnout, že např. vzorce (8.10) až (8.12) pro objemový, plošný a lineární potenciál byly jednoduše odvozeny již v prvním dílu skript (pouze s jiným označením) použitím principu superpozice pro potenciály. Proč jsme zde nevyšli rovnou z těchto vzorců a namísto toho se napřed věnovali zdoluhavým diskusím o intenzitách? Pokusme se dát odpověď na tyto otázky.

Při budování teorie gravitačního a elektrostatického pole buzeného soustavou bodových zdrojů (viz první díl skript) jsme vyšli z Newtonova a Coulombova zákona a postulovali jsme platnost principu superpozice pro intenzitu. Viděli jsme, že zcela ekvivalentně bylo možné vyjít také z potenciálu bodového zdroje a postulovat princip superpozice pro potenciál. Oba přístupy byly zcela ekvivalentní díky tomu, že derivace součtu konečného počtu členů je rovna součtu derivací. Při přechodu k polím objemových, plošných a lineárních zdrojů jsme tedy měli dvě možnosti:

- a) vyjít za vzorce pro intenzitu bodového zdroje a postulovat platnost principu superpozice pro intenzitu i v případě objemových, plošných a lineárních zdrojů (tento postup jsme zvolili zde, stejně se postupuje např. v [Kellogg, 1967, Purcell, 1965]);
- b) vyjít ze vzorce pro potenciál bodového zdroje a postulovat princip superpozice pro potenciál (takto se postupuje např. v [Dubošin, 1961, Idel'son, 1936, Kvasnica, 1985, Pick et al., 1973, Votruba and Muzikář, 1955] a mnoha jiných učebnicích).

Na počátku neexistovaly žádné zásadní důvody, abychom dávali některému z uvedených přístupů přednost. Z důvodů formálních bychom dávali spíše přednost přístupu b), protože potenciál je skalární veličina. Samozřejmým požadavkem ovšem je, aby oba přístupy vedly ke stejným výsledkům. Nyní je však situace složitější než v případě soustavy hmotných bodů, protože místo konečných sum vystupují v příslušných výrazech integrály a je známo, že pořadí integrování a derivování nelze vždy zaměňovat, ale pouze při splnění jistých podmínek. Je tedy možné očekávat, že se vyskytnou nějaké případy, kdy přístupy a) a b) nebudou dávat stejné výsledky. V těchto případech bude třeba jeden přístup odmítnout.

Naštěstí se ukazuje, že pro velice širokou třídu reálných zdrojů pole dávají oba přístupy stejné výsledky, viz kap. 12. Pokud bychom se omezili jen na takovéto zdroje, jsou oba přístupy ekvivalentní a přednost bychom dali patrně přístupu b), protože se v něm pracuje s jednoduššími vzorci. Avšak například pro modely, které mají některé rozměry nekonečné, přístup b) selhává, integrály pro potenciál jsou divergentní (nekonečně velké), zatímco v přístupu a) žádné problémy nenastávají. Lze sice namítnout, že takové modely reálně neexistují, ale o užitečnosti takových modelů, jako je nekonečný drát nebo nekonečná

deska, jistě není třeba pochybovat. Protože i takovéto modely chceme zahrnout do naší teorie, zvolili jsme přístup a). Rovněž v některých elektrostatických úlohách s vodiči, jak jsme již uvedli, je třeba dávat přednost tomuto přístupu.

Ve skutečnosti byly důvody pro přijetí postupu a) ještě hlubší. Intenzitu pole považujeme totiž za primární veličinu, která bezprostředně vystupuje v Newtonově a Coulombově zákonu a těmto zákonům přisuzujeme velmi obecnou platnost, kdežto potenciál byl původně zaveden jako veličina pomocná. Podařilo se sice nalézt velmi důležitý fyzikální význam potenciálu jako práce, kterou musíme dodat jednotkové částici, abychom ji přenesli z nekonečna do daného bodu, ale takováto veličina si patrně nemůže zachovat svůj původní fyzikální smysl, pokud se i těleso bude rozprostírat do nekonečna.

Uvedené úvahy je tedy možné shrnout tak, že pro popis gravitačního, elektrostatického a magnetostatického pole je třeba za základní vzorce považovat vzorce pro intenzitu. Tyto vzorce budeme tedy zde považovat za matematickou formulaci příslušných fyzikálních zákonů. Vzorce pro potenciál je třeba považovat jen za vzorce odvozené. Nic na této situaci nemění ani skutečnost, že potenciál jako skalární veličina je velice užitečný pro popis uvedených polí, ani to, že rozdíly potenciálu udávají důležitou fyzikální veličinu – práci.

8.3 O spojitých rozloženích, rozdíl mezi matematikou a fyzikou

Představa o spojitém rozložení zdrojů pole je v rozporu s představou o atomové stavbě látek. Výše zavedené matematické modely hmotných těles, ploch či křivek se spojitou hustotou neodpovídají tedy fyzikální realitě. Vzniká tak otázka, zdali je možné použít tyto zjednodušené modely k popisu reálných jevů, a v případě kladné odpovědi je třeba stanovit meze použitelnosti takových modelů.

Modely se spojitým rozložením zdrojů nepopisují správně vlastnosti příliš malých oblastí, jejichž rozměry jsou souměřitelné či menší než vzdálenosti mezi částicemi, ale jsou dobrou aproximací k popisu středních vlastností oblastí, které obsahují mnoho částic. Ve smyslu středních hodnot je také třeba fyzikálně interpretovat hustotu jako střední množství hmoty (resp. náboje) rozložené v nějaké malé, ale konečné oblasti [Purcell, 1965].

Vedle uvedených problémů matematického popisu se v předložených modelech setkáme ještě s některými fyzikálními obtížemi. Ty spočívají v tom, že pevná látka, která je celá složena z nepohyblivých částic, mezi kterými působí jen přitažlivé síly nepřímo úměrné vzdálenosti, by nebyla stabilní a kolabovala by do nulového objemu. Tento problém lze překonat předpokladem o existenci dodatečných odpuzivých sil, které se projevují jen v malých vzdálenostech, nebo předpokladem, že se částice nacházejí v rychlém oběžném pohybu [Jeffreys and Swirles, 1966].

Uvedené matematické a fyzikální obtíže obejdeme tím, že spojitě modely budeme používat k výpočtům středních veličin. Teorie používající spojitá rozložení bude dávat dostatečně přesné hodnoty středních veličin uvnitř oblastí, jejichž lineární rozměry jsou podstatně větší než vzdálenosti mezi atomy, a za časy podstatně delší než jsou periody

pohybů v atomech (zhruba rozměry delší než 10^{-10} m a časové intervaly delší než 10^{-17} s, viz [Jeffreys and Swirles, 1966]).

8.4 Potenciální energie soustavy

S pojmem potenciálu souvisejí, kromě intenzity, ještě dvě důležité veličiny: potenciální energie soustavy a kapacita. Tyto veličiny mají nejen velký význam fyzikální, ale ukázaly se jako velice užitečné i v matematické teorii potenciálu [Král et al., 1977, Wermer, 1974]. Všimněme si v tomto paragrafu první z nich.

Potenciální energií příslušného rozložení zdrojů (potenciální energií soustavy, interakční energií soustavy, vlastní potenciální energií, energií příslušného pole) budeme rozumět práci, kterou musíme dodat všem elementům původně rozptýleným v nekonečných vzdálenostech od sebe, abychom z nich sestavili výsledné uspořádání. V případě soustavy n hmotných bodů byla tato potenciální energie dána vzorcem (4.69):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i U_i,$$

kde m_i je hmotnost i -té částice a U_i je potenciál zbývajících $n - 1$ částic v místě i -té částice. Zobecněním tohoto vzorce na případ objemových hmot dostaneme

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varrho U \, dV, \quad (8.30)$$

kde ϱ je hustota a U je Newtonův potenciál působený celým tělesem v uvažovaném místě, jak hned zdůvodníme. Vzorec (8.30) platí rovněž pro soustavu objemově rozložených nábojů, liší se pouze vzorec pro potenciál U .

Podle analogie se vzorcem pro soustavu hmotných bodů bychom měli potenciálem U ve vzorci (8.30) rozumět potenciál, který v místě objemového elementu dV působí všechny ostatní objemové elementy. Lze však ukázat, že příspěvek nekonečně malého objemového elementu k potenciálu v místě samotného elementu je nekonečně malý (v případě hmotného bodu byl nekonečně velký), viz kap. 12. Tedy k potenciálu, který jsme měli správně uvažovat, jsme přidali nekonečně malou veličinu. Kromě toho element hmoty, analogický veličině m_i , je roven ϱdV a je také nekonečně malý. Do příspěvku dW k potenciální energii soustavy jsme tak přidali veličinu malou druhého řádu a lze proto očekávat, že ani po zintegrování se tyto veličiny ve výsledku neprojeví. Přesnější odvození vzorce (8.30) bychom museli dělat pomocí postupů, používaných v kap. 12. Někteří autoři dokonce zastávají názor, že tento vzorec nelze odvozovat, ale je třeba jej postulovat jako nový fyzikální zákon, který podléhá ověřování pomocí pozorování a experimentů, viz [Kellogg, 1967].

V učebnicích elektromagnetického pole, viz též níže uvedený příklad 3, se odvozuje ještě vyjádření potenciální energie soustavy pomocí intenzity pole. Tím je odůvodněn název „energie pole“. Pro stacionární úlohy, kterými se v těchto skriptech zabýváme, nemá však toto vyjádření zvláštní význam, vhodnější je vzorec (8.30).

Pro potenciální energii soustavy plošně a lineárně rozložených hmot nebo nábojů platí vzorce, analogické vzorci (8.30):

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma U \, dS, \quad W = \frac{1}{2} \int_C \lambda U \, ds. \quad (8.31)$$

Úlohy

1. Na výpočet potenciální energie soustavy hmotných bodů jsme v prvním dílu skript odvodili ještě vzorec (4.68),

$$W = -\frac{G}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n, \frac{m_i m_j}{d_{ij}},$$

kde d_{ij} je vzdálenost i -tého a j -tého hmotného bodu a apostrofem označujeme, že při sčítání vynecháváme případy $i = j$. Zobecněte tento vzorec na případ spojitě rozložených hmot [Kellogg, 1967].

Odpověď:

$$W = -\frac{G}{2} \iiint_{(VV)} \frac{\varrho(\vec{r}') \varrho(\vec{r}'')}{|\vec{r}' - \vec{r}''|} d(VV).$$

Tento vzorec je v důsledku šestiřozměrného integrálu méně vhodný než vzorec (8.30).

2. Napište vzorec pro potenciální energii nabitěho tělesa, v němž je rozložen objemový náboj s hustotou ϱ a na jeho povrchu plošný náboj s hustotou σ [Brož, 1974, Kvasnica, 1985, Votruba and Muzikář, 1955].

Odpověď:

$$W = \frac{1}{2} \left[\iiint_V \varrho U \, dV + \iint_S \sigma U \, dS \right], \quad (8.32)$$

kde U je výsledný potenciál všech objemových a povrchových nábojů.

3. Předpokládejme, že elektrické náboje jsou rozloženy s prostorovou hustotou ϱ v nějaké omezené části prostoru V . Použitím výše uvedených vzorců a vzorce $\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$, známého z elektrostatiky, odvoďte vzorec pro energii elektrického pole

$$W = \frac{1}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV, \quad (8.33)$$

kde $\vec{E}$ je intenzita elektrického pole, $\vec{D}$ je elektrická indukce a integrace se provádí přes celý prostor.

Řešení: Protože hustota ϱ je nulová vně objemu V , můžeme ve výrazu (8.30) pro potenciální energii soustavy integrovat i přes větší objem, např. přes nějakou kouli K , která obsahuje celý objem V uvnitř:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_K \varrho U \, dV = \frac{1}{2} \iiint_K U \operatorname{div} \vec{D} \, dV.$$

Ze vzorce pro divergenci součinu, viz (8.18), plyne

$$U \operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div}(U \vec{D}) - \vec{D} \cdot \operatorname{grad} U = \operatorname{div}(U \vec{D}) + \vec{D} \cdot \vec{E}.$$

Odtud plyne, užijeme-li ještě Gaussovu větu,

$$W = \frac{1}{2} \iiint_K \vec{E} \cdot \vec{D} \, dV + \frac{1}{2} \iint_{S_K} U \vec{D} \, dS, \quad (8.34)$$

kde S_K je povrch koule K . Dostali jsme další vzorec pro potenciální energii nabitěho tělesa. Zvětšujeme nyní poloměr koule K , který označíme r , do nekonečna. Ve velkých vzdálenostech se bude pole tělesa V blížit poli hmotného bodu (zde je důležitý předpoklad omezenosti objemu V , jinak by to obecně neplatilo, viz podrobnosti v kap. 12), takže $U \sim 1/r$, $D \sim 1/r^2$, tedy $UD \sim 1/r^3$. Protože velikost plochy roste jen jako r^2 , plošný integrál v (8.34) v limitě vymizí a objemový integrál dá (8.33).

4. Zobecněte úlohu z předchozího příkladu v tom smyslu, že vedle objemových nábojů v objemu V budete uvažovat i plošné náboje na ploše S , tj. vyjděte ze vzorce (8.32). Ukažte, že i v tomto případě je energie elektrického pole dána vzorcem (8.33), viz [Kvasnica, 1985, Votruba and Muzikář, 1955].

Řešení: Začátek postupu je stejný jako v předchozí úloze. Protože však na nabitě ploše S je vektor $\vec{D}$ nespojitý, nemůžeme v těchto místech použít Gaussovu větu, plochu S musíme z uvažovaného objemu „vyříznout“ tím způsobem, že ji obklopíme nějakou plochou S' , která k S těsně přiléhá (protější strany plochy S' v limitě přejdou v S). Z elektrostatiky je známo, že v těsné blízkosti nabitě plochy je normálová složka elektrické indukce, ve směru od plochy, rovna polovině plošné hustoty náboje, tj. $D_n = \sigma/2$ (důkaz je snadný užitím Gaussovy věty z elektrostatiky, viz též kap. 11 a 13). Protože vnější normála k ploše S' míří ve směru k ploše S a velikost plochy S' je v limitě rovna dvojnásobku velikosti plochy S , dostáváme

$$\iint_{S'} U \vec{D} \, dS' = \iint_{S'} U \left(-\frac{\sigma}{2} \right) dS' = - \iint_S U \sigma \, dS,$$

což se zruší s plošným integrálem v (8.32). Dospíváme tak i v tomto případě ke vzorcům (8.34) a (8.33). Poznamenejme, že při odvozování vzorce (8.33) v předchozím a v tomto příkladu jsme potřebovali některé vzorce z elektrostatiky, o kterých podrobněji pojednáme teprve v dalších kapitolách. Této jisté nelogičnosti jsme se dopustili záměrně proto, abychom důležitý vzorec (8.33) uvedli pohromadě s ostatními vzorci pro potenciální energii soustavy.

8.5 Kapacita

Je-li fixována poloha bodového náboje a pozorovatele P , platí přímá úměrnost mezi potenciálem v bodě P a velikostí bodového náboje Q :

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} Q,$$

kde koeficient úměrnosti závisí na vzdálenosti R pozorovatele a náboje, tedy závisí na jisté geometrické charakteristice uvažované soustavy. V případě složitějších rozložení zdrojů neexistuje obvykle jednoduchý vztah mezi potenciálem a celkovým nábojem. Avšak v případě vodičů platí, že potenciál na povrchu vodiče je rovněž přímo úměrný celkovému náboji, konstantu úměrnosti označme $1/C$:

$$U = \frac{1}{C} Q.$$

Častěji se tento vzorec zapisuje ve tvaru

$$Q = C U. \quad (8.35)$$

Veličina C se nazývá kapacita a je velmi důležitou charakteristikou elektrických vodičů. Kapacita vodiče závisí na tvaru a velikosti vodiče. Soustava vodičů, speciálně konstruovaná tak, aby měla velkou kapacitu, se nazývá kondenzátor. Kapacita kondenzátoru závisí též na vzájemné poloze vodičů a permitivitě prostředí mezi nimi.

Na tomto místě nemáme ještě teorii vybudovanu natolik, abychom mohli obecně dokázat uvedené tvrzení o úměrnosti potenciálu a náboje na vodiči. Chtěli jsme však pojem kapacity zavést již zde, abychom jej mohli používat v konkrétních příkladech v následujících kapitolách, jakmile zjistíme úměrnost mezi potenciálem a nábojem.

Je-li známa kapacita, můžeme snadno vyjádřit elektrostatickou energii nabitého vodiče. Protože na povrchu vodiče v ustáleném stavu je potenciál konstantní, lze vzorec (8.31) pro potenciální energii zapsat v jednoduchém tvaru

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma U \, dS = \frac{1}{2} U \iint_S \sigma \, dS = \frac{1}{2} U Q, \quad (8.36)$$

kde Q je celkový náboj na vodiči. Dosadíme-li za Q z (8.35), dostáváme odtud známý vzorec pro elektrostatickou energii nabitého vodiče ve tvaru

$$W = \frac{1}{2} C U^2. \quad (8.37)$$

Tento vzorec udává také elektrostatickou energii nabitého kondenzátoru, jehož jedna deska se nachází na nulovém potenciálu (uzemněna) a na druhé je napětí U ; v tomto případě je sice plocha S tvořena dvěma deskami kondenzátoru, ale příspěvek uzemněné desky k integrálu (8.36) je nulový v důsledku $U = 0$.

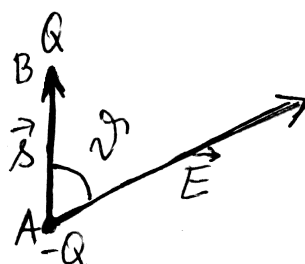
Všimněte si formální podobnosti vzorce (8.37) pro energii nabitého kondenzátoru a vzorce pro kinetickou energii pohybujícího se hmotného bodu $\frac{1}{2} m v^2$.

Kapitola 9

Výchozí vzorce pro působení mezi složitějšími objekty

9.1 Působení pole na dipól

Intenzitu pole, resp. potenciál, považujeme za veličinu, která příslušné pole plně popisuje. Intenzita je však síla, kterou pole působí na jednotkovou částici. Vzniká přirozeně otázka, jak pole působí na složitější objekty, než jsou částice, a do jaké míry je možné toto působení popsat pomocí intenzity. Vyšetřeme nejprve působení pole na dipól, o obecnějším případě pojednáme v následujícím paragrafu. Na látku probíranou v tomto a v následujícím paragrafu nebudeme v dalším textu nikde navazovat. Čtenář, kterého tato problematika blíže nezajímá, může proto tuto kapitolu vynechat a přejít k další kapitole.



Obrázek 7

Uvažujme elektrický dipól o momentu $\vec{p}$ ve vnějším, tj. cizím, elektrostatickém poli, jehož intenzita je $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$. Úhel mezi vektory $\vec{p}$ a $\vec{E}$ označme ϑ . Nahradme nejprve dipól dvojicí stejně velikých bodových nábojů opačného znaménka. Necht náboj $(-Q)$ se nachází v bodě A , náboj Q v bodě B , vektor s počátečním bodem v záporném náboji a koncovým bodem v kladném náboji označme $\vec{s}$, viz obr. 7. Moment dipólu se zavádí vztahem $\vec{p} = Q \vec{s}$. Souřadnice bodů podél osy dipólu, tj. podél přímky určené vektorem $\vec{s}$, označujeme ℓ . Počátek této osy zvolme v bodě A a orientujme ji kladně směrem k bodu B , tedy $\ell(A) = 0$, $\ell(B) = s$. Výsledná síla působící na oba náboje je

$$\vec{F} = Q (\vec{E}(B) - \vec{E}(A)) = Q \frac{\partial \vec{E}(C)}{\partial \ell} s = p \frac{\partial \vec{E}(C)}{\partial \ell},$$

kde jsme použili větu o střední hodnotě, C je jistý bod na úsečce AB . V limitě, jestliže se $\vec{s}$ zmenšuje k nule a Q současně roste do nekonečna tak, aby se vektor $\vec{p}$ neměnil, dostaneme sílu působící na dipól ve tvaru

$$\vec{F}(A) = p \frac{\partial \vec{E}}{\partial \ell}(A). \quad (9.1)$$

Tento vzorec ještě upravíme. Označme α, β, γ úhly, které s kartézskými souřadnicovými osami x, y, z svírá moment $\vec{p}$ a tudíž i osa dipólu ℓ . Pak platí

$$\begin{aligned} p \frac{\partial \vec{E}}{\partial \ell} &= p \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \ell} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \ell} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \ell} \right) = \\ &= p \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cos \gamma \right) = \\ &= p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \\ &= (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Poslední vzorec jsme mohli dostat ihned z (9.1) použitím vlastnosti, která je zřejmá z názoru, že derivace libovolné skalární funkce (složky vektoru) v daném směru je rovna průmětu gradientu do tohoto směru; odvození v (9.2) není vlastně ničím jiným než důkazem této vlastnosti. Vzorec (9.1) pro sílu působící na dipól můžeme tedy zapsat v ekvivalentním tvaru, který se často používá [Votruba and Muzikář, 1955],

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}. \quad (9.3)$$

Tento vzorec můžeme ještě dále upravit použitím identity [Rektorys and spol., 1963]

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \text{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + (\vec{a} \cdot \text{grad}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \text{grad}) \vec{a}.$$

Uvážíme-li, že $\vec{p}$ je konstantní vektor nezávislý na souřadnicích x, y, z a pro elektrostatické pole platí $\text{rot} \vec{E} = 0$, vyplývá odtud jednoduchý vzorec [Stratton, 1961]:

$$\vec{F} = \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{E}). \quad (9.4)$$

Odtud vidíme, že síla (9.4), kterou působí vnější elektrostatické pole na dipól, je rovněž konzervativní, protože ji lze vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F} = - \text{grad} V, \quad (9.5)$$

kde V je potenciální energie dipólu ve vnějším elektrostatickém poli:

$$V = - \vec{p} \cdot \vec{E}. \quad (9.6)$$

Kromě výsledné síly, označované též jako translační síla [Votruba and Muzikář, 1955], působí na dipól ještě dvojice sil. Určeme její otáčivý moment $\vec{T}$. Nahradme opět dipól dvojicí nábojů. Otáčivý moment vzhledem k pevnému bodu A (sídlo náboje $-Q$) je dán momentem síly, která působí na druhý náboj, tj. vektorovým součinem

$$\vec{T} = \vec{s} \times Q \vec{E}(B) = \vec{p} \times \vec{E}(B).$$

V limitě pro elementární dipól pak dostaneme

$$\vec{T}(A) = \vec{p} \times \vec{E}(A),$$

čili zkráceně bez vypisování souřadnic

$$\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (9.7)$$

Poznamenejme, že vzorce (9.1), (9.3) a (9.7) platí i v nestacionárním elektromagnetickém poli, avšak vzorce (9.4) až (9.6) nikoliv, protože v nestacionárním poli je obecně $\text{rot } \vec{E} \neq 0$.

Složitější vzorce, např. pro potenciální energii vyšších multipólů ve vnějším poli, zde odvozovat nebudeme, zájemce odkazujeme na učebnice elektřiny a magnetismu [Votruba and Muzikář, 1955].

Úlohy

1. Dokažte, že homogenní pole ($\vec{E}$ konstantní co do velikosti i směru) nepůsobí na dipól žádnou translační silou, pouze otáčivým momentem.

Řešení: Je-li $\vec{E}$ konstantní vektor, ze vzorce (9.3) ihned plyne $\vec{F} = 0$.

2. Předpokládejme, že se dipól nemůže posunout z daného místa, ale může se v tomto místě libovolně otáčet. Vyšetřete, které z poloh dipólu vzhledem k vnějšímu poli jsou rovnovážné a která z nich je stabilní.

Řešení: Podle (9.6) je potenciální energie dipólu dána vzorcem

$$V = -p E \cos \vartheta,$$

kde ϑ je úhel mezi momentem dipólu $\vec{p}$ a intenzitou $\vec{E}$. V rovnovážném poloze musí platit $\partial V / \partial \vartheta = 0$, tj. $p E \sin \vartheta = 0$. Rovnovážné polohy jsou tedy dvě, jedna pro $\vartheta = 0$ (moment dipólu má souhlasný směr se směrem pole) a druhá pro $\vartheta = \pi$ (moment dipólu má opačný směr než je směr pole). Poloha $\vartheta = 0$ je stabilní, protože v ní nabývá potenciální energie minimální hodnoty $V = -p E$. Poloha $\vartheta = \pi$ je labilní.

3. Na základě předchozí úlohy zdůvodněte, proč se magnetická střelka orientuje ve směru siločar magnetického pole.

Odpověď: V daném místě má při této orientaci minimální potenciální energii.

4. Odvoďte vzorec pro interakční energii dvou elektrických dipólů o momentech $\vec{p}$ a $\vec{p}'$, nacházejících se ve vzdálenosti R od sebe [Votruba and Muzikář, 1955].

Řešení: Ze vzorců (9.6), (7.25), (7.26) a (8.16) plyne

$$\begin{aligned} V &= \vec{p} \cdot \text{grad } U' = \vec{p} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}' \cdot \vec{R}}{R^3} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \text{grad} \left(\vec{p}' \cdot \text{grad}' \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

9.2 Vzájemné působení dvou tuhých těles

Vzájemné působení mezi dvěma tělesy, která nejsou částicemi, může mít velmi složitý charakter. V první řadě je třeba si uvědomit, že jedno těleso nepůsobí na těleso druhé jedinou silou, ale působí silami na jednotlivé elementy druhého tělesa. V případě deformovatelného tělesa tyto síly obecně nemohou být skládány, obecně jejich účinek nelze dokonce vyjádřit ani konečným počtem sil. Omezme se proto pouze na tuhá tělesa [Kellogg, 1967].

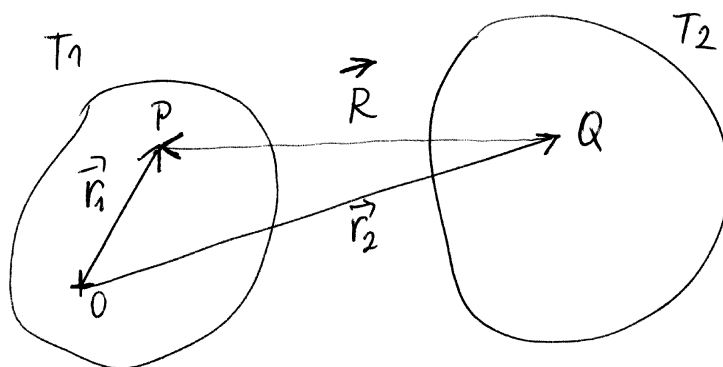
V učebnicích mechaniky se dokazuje, že účinek všech sil působících na tuhé těleso lze nahradit jednou silou působící v libovolně zvoleném bodě O a silovou dvojicí. Tato síla je výslednicí všech sil působících na těleso. Silová dvojice závisí na poloze bodu O a její moment je vektorovým součtem momentů všech sil vzhledem k bodu O , které na těleso působí. Jestliže na tuhé těleso působí síly $\vec{F}_i$ v bodech o polohových vektorech $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), pak pro výslednou sílu platí

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad (9.8)$$

a je-li bod O , v němž předpokládáme působení výsledné síly, počátkem souřadnicové soustavy, dostáváme pro moment silové dvojice vyjádření

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (9.9)$$

Jestliže síly působící na tuhé těleso jsou rozloženy spojitě, sumační znaménka musí být nahrazena integrály.



Obrázek 8

Uvažujme dvě tuhá tělesa, těleso T_1 zaujímající oblast prostoru V_1 a těleso T_2 zaujímající oblast V_2 . Vyšetřujeme gravitační přitažlivost, kterou těleso T_2 působí na těleso T_1 . Prvním krokem je opět rozdělení těles na elementy, soustředění hmoty každého elementu do jednoho jeho bodu a vyšetření přitažlivosti takto vzniklých soustav částic. Nechť ΔV_1 označuje nějaký element objemu V_1 , který obsahuje bod P o polohovém vektoru $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, a ΔV_2 je nějaký element objemu V_2 , který obsahuje bod Q o polohovém vektoru $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, viz obr. 8. Zavedeme-li vektor $\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, je $R = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ vzdálenost bodů P a Q . Nechť ρ_1 a ρ_2 jsou střední hodnoty hustot v elementech ΔV_1 a ΔV_2 .

Potom částice v bodě Q v elementu ΔV_2 působí na částici v bodě P v elementu ΔV_1 silou, jejíž x -ová složka je

$$\Delta F_x^{(12)} = -G \varrho_1 \varrho_2 \Delta V_1 \Delta V_2 \frac{x_1 - x_2}{R^3},$$

kde R je vzdálenost bodů P a Q . Moment této síly vzhledem k počátku má x -ovou složku

$$\begin{aligned} \Delta M_x^{(12)} &= -G \varrho_1 \varrho_2 \Delta V_1 \Delta V_2 \left[y_1 \frac{z_1 - z_2}{R^3} - z_1 \frac{y_1 - y_2}{R^3} \right] = \\ &= G \varrho_1 \varrho_2 \frac{y_1 z_2 - y_2 z_1}{R^3} \Delta V_1 \Delta V_2. \end{aligned}$$

Tyto složky, působené dvojicemi částic, musíme nyní sečíst přes všechny dvojice a provést limitu, jestliže se průměry elementů blíží k nule. Dospíváme k následujícímu výsledku [Kellogg, 1967]:

V souhlase s rozšířeným zněním Newtonova gravitačního zákona lze přitažlivost, kterou tuhé těleso T_2 působí na tuhé těleso T_1 , vyjádřit pomocí síly

$$\vec{F}^{(12)} = -G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \frac{\varrho_1 \varrho_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{R^3} dV_1 dV_2, \quad (9.10)$$

která působí v počátku soustavy souřadnic, a pomocí dvojice sil, jejíž moment je

$$\vec{M}^{(12)} = G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \varrho_1 \varrho_2 \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{R^3} dV_1 dV_2; \quad (9.11)$$

tuto přitažlivost lze ovšem popsat i jakoukoliv jinou ekvivalentní dvojicí vektorů – síly a silové dvojice.

Povšimněme si, že z těchto vzorců ihned plyne zákon akce a reakce

$$\vec{F}^{(21)} = -\vec{F}^{(12)}, \quad \vec{M}^{(21)} = -\vec{M}^{(12)}.$$

Vzorce (9.10) a (9.11) představují analytickou formulaci Newtonova gravitačního zákona v jeho rozšířeném znění pro případ tuhých těles. Jsou to nejobecnější vzorce pro popis gravitačního působení, které v těchto skriptech uvádíme.

Nyní bychom měli vyšetřit, zdali uvedené tvrzení o působení mezi dvěma tělesy je ve shodě s Newtonovým gravitačním zákonem pro hmotné body [Kellogg, 1967]. Nechť se tedy průměr obou těles zmenšuje k nule, přičemž těleso T_1 stále obsahuje počátek souřadnic O a těleso T_2 stále obsahuje nějaký pevný bod Q_0 , jehož polohový vektor označíme $\vec{r}_{20}$. Vyšetřeme nejprve moment silové dvojice. Užitím věty o střední hodnotě integrálního počtu a vlastnosti, že hustoty nejsou nikdy záporné, můžeme psát

$$\vec{M}^{(12)} = G \frac{\vec{r}_1' \times \vec{r}_2'}{R^3} \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \varrho_1 \varrho_2 dV_1 dV_2 = G \frac{\vec{r}_1' \times \vec{r}_2'}{R^3} m_1 m_2,$$

kde $\vec{r}_1'$ je polohový vektor nějakého bodu ve V_1 a $\vec{r}_2'$ polohový vektor nějakého bodu ve V_2 , R' je vzdálenost těchto bodů, m_1 a m_2 jsou hmotnosti těles. Jakmile se rozměry těles blíží k nule (postačí dokonce, aby se blížily k nule jen rozměry tělesa T_1), vektor $\vec{r}_1'$ se blíží k nule a tedy i moment silové dvojice se blíží k nule. Protože je moment nulový,

plyne odtud, že silové působení tělesa na částici se redukuje na jednu výslednou sílu, která působí na tuto částici. Obdobně budeme postupovat při úpravě vzorce (9.10) pro sílu. Jestliže se tělesa stahují do hmotných bodů, jeden v počátku a druhý v bodě Q_0 , síla se blíží veličině

$$\vec{F}^{(12)} = G \frac{\vec{r}_{20}}{r_{20}^3} m_1 m_2,$$

což souhlasí s Newtonovým zákonem pro hmotné body. Tedy souhlas rozšířeného gravitačního zákona se zákonem pro hmotné body je ověřen.

Pohled na šestirozměrné integrály ve vzorcích (9.10) a (9.11) a představa, že bychom takové integrály měli počítat v uvedené formě, působí nepochybně skličujícím dojmem. Ukážeme však, že uvedené šestirozměrné integrály lze převést na postupný výpočet dvou trojných integrálů. Kromě toho v řadě úloh vymizí moment silové dvojice nebo jej nepotřebujeme počítat [Kellogg, 1967].

Uvažujme malou část tělesa T_1 obsaženou v objemu ΔV_1 a obsahující pevný bod $P_0(\vec{r}_{10})$. Počítejme sílu $\Delta \vec{F}$, kterou na tuto část působí těleso T_2 . Tato síla je dána vzorcem (9.10), v němž je třeba integrační obor V_1 nahradit oborem ΔV_1 . Budeme předpokládat spojitě hustoty a jednoduché oblasti integrace, takže šestirozměrný integrál může být nahrazen dvojnásobným výpočtem trojného integrálu:

$$\Delta \vec{F} = -G \iiint_{\Delta V_1} \varrho_1 \left[\iiint_{V_2} \frac{\varrho_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{R^3} dV_2 \right] dV_1.$$

Vnitřní integrál je pouze funkcí $\vec{r}_1$ a pokud ϱ_1 nemění znaménko, může být tento integrál zapsán před vnější integrál užitím věty o střední hodnotě integrálního počtu:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= -G \iiint_{V_2} \frac{\varrho_2 (\vec{r}_1' - \vec{r}_2)}{R'^3} dV_2 \iiint_{\Delta V_1} \varrho_1 dV_1 = \\ &= -G \iiint_{V_2} \frac{\varrho_2 (\vec{r}_1' - \vec{r}_2)}{R'^3} dV_2 \cdot \Delta m, \end{aligned}$$

kde $P'(\vec{r}_1')$ je nějaký bod v elementu ΔV_1 , R' je jeho vzdálenost od proměnného bodu $Q(\vec{r}_2)$ ve V_2 a Δm je hmotnost elementu ΔV_1 . Vydělíme-li nyní tuto sílu veličinou Δm a budeme zmenšovat průměr elementu ΔV_1 k nule tak, aby bod P_0 stále zůstal uvnitř ΔV_1 , dospíváme k limitě

$$\vec{E}(\vec{r}_{10}) = \lim \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m} = -G \iiint_{V_2} \frac{\varrho_2 (\vec{r}_{10} - \vec{r}_2)}{R_0^3} dV_2,$$

kde $R_0 = \overline{P_0 Q}$. Vektor $\vec{E}(\vec{r}_{10})$ udává specifickou sílu, tj. sílu na jednotku hmotnosti, v bodě P_0 působenou tělesem T_2 . Porovnáním posledního vzorce se vzorcem z paragrafu 7.3 však zjistíme, že $\vec{E}(\vec{r}_{10})$ je také síla působená tělesem T_2 na jednotkovou částici v bodě P_0 (intenzita v bodě P_0). Odtud vidíme, že pojmy specifické síly a intenzity jsou totožné.

Význam specifické síly spočívá v tom, že umožňuje nalézt sílu působící na celé těleso T_1 násobením specifické síly v bodě $P(\vec{r}_1)$ hustotou ϱ_1 a integrací přes objem V_1 :

$$\vec{F}^{(12)} = \iiint_{V_1} \varrho_1 \vec{E}(\vec{r}_1) dV_1. \quad (9.12)$$

Tím dostáváme jiné vyjádření integrálu (9.10). I když možnost vyjádření celkové síly v tomto tvaru jsme mohli očekávat, uvedený postup blíže ukázal na vazbu mezi posledním vzorcem a výchozím vzorcem (9.10). Obdobně bychom mohli konstruovat vzorec pro moment silové dvojice (9.11). Odtud je vidět, proč je znalost intenzity pole, jako síly působící na jednotkovou částici, tolik důležitá [Kellogg, 1967].

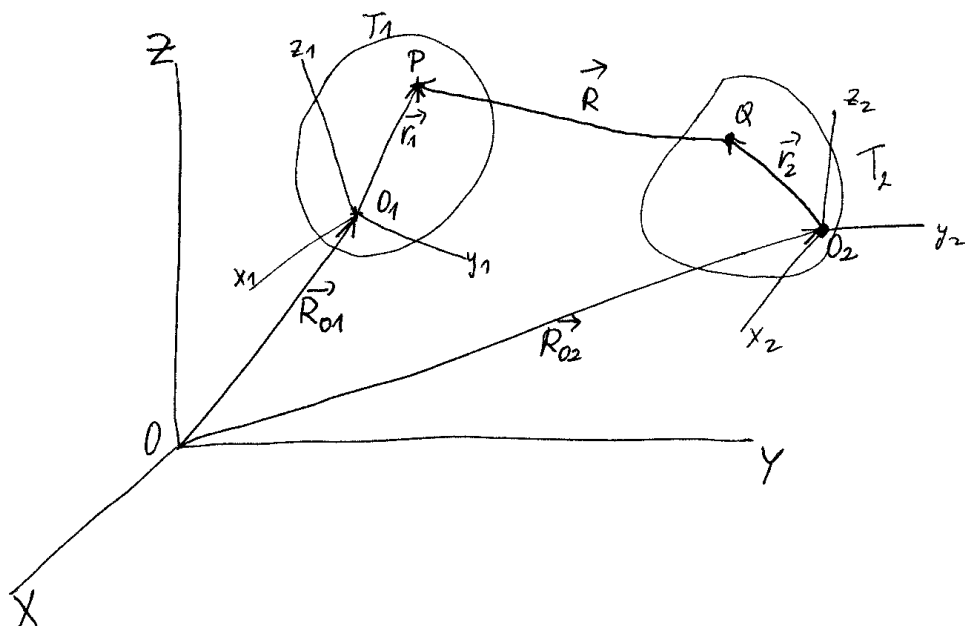
Závěrem tohoto paragrafu se ještě pokusme o nalezení jistého potenciálu, kterým by bylo možné popsat vzájemné gravitační působení dvou tuhých těles. Tvar integrandu ve vzorci (9.10) ukazuje na to, že i zde bude možné zavést gradient nějaké skalární funkce. Podle analogie se vzorci (8.16) ihned dostáváme

$$\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{R^3} = \frac{\vec{R}}{R^3} = -\text{grad}_1 \left(\frac{1}{R} \right) = \text{grad}_2 \left(\frac{1}{R} \right),$$

kde indexy 1 a 2 u gradientů označují, zdali se derivuje podle souřadnic bodů prvního nebo druhého tělesa. Vzorec (9.10) lze tak vyjádřit např. ve tvaru

$$\vec{F}^{(12)} = G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \varrho_1 \varrho_2 \text{grad}_1 \left(\frac{1}{R} \right) dV_1 dV_2.$$

Tento zápis svádí k tomu, abychom gradient napsali ihned před všechny integrály, jak jsme to dělali v paragrafu 8.1. Zatím to však provést nemůžeme a to hned ze dvou důvodů; jednak v integrandu ještě vystupuje hustota ϱ_1 , která rovněž závisí na souřadnicích s indexy 1, a kromě toho se přes tyto souřadnice integruje, takže grad_1 nepředstavuje typickou derivaci podle parametru. Posledně uvedený vzorec je zajímavý, ale k dalším úvahám se příliš nehodí. Ukázal však, v čem je problém, že totiž je třeba oddělit skutečné parametry od proměnných, přes které se integruje.



Obrázek 9

Hustota ϱ_1 v bodě P závisí pouze na poloze tohoto bodu v tělese T_1 , rovněž ϱ_2 závisí pouze na poloze bodu Q v tělese T_2 . Avšak vzdálenost R bodů P , Q závisí nejen na

poloze těchto bodů v příslušných tělesech, ale též na vzájemné poloze obou těles. Vzájemnou polohu těles T_1 a T_2 můžeme např. popsat pomocí vzájemné polohy dvou kartézských souřadnicových soustav, pevně spojených s jednotlivými tělesy (obr. 9). Označme S_1 souřadnicovou soustavu s počátkem O_1 a osami x_1, y_1, z_1 , která je pevně spojena s tělesem T_1 , soustavu S_2 s počátkem O_2 a osami x_2, y_2, z_2 spojenou s T_2 a ještě další soustavu S , referenční, s počátkem O a osami X, Y, Z ; poznamenejme, že některá označení v obr. 9 se liší od obr. 8. Polohové vektory $\vec{R}_{01} = (X_{01}, Y_{01}, Z_{01})$ a $\vec{R}_{02} = (X_{02}, Y_{02}, Z_{02})$ udávají polohu počátků soustav S_1 a S_2 vzhledem k S . Polohový vektor bodu P v soustavě S_1 označme $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, polohový vektor téhož bodu v soustavě S označme $\vec{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$, tj. $\vec{R}_1 = \vec{R}_{01} + \vec{r}_1$. Polohové vektory bodu Q v soustavách S_2 a S obdobně označíme $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ a $\vec{R}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, kde $\vec{R}_2 = \vec{R}_{02} + \vec{r}_2$. Mezi souřadnicemi bodu P v soustavách S a S_1 musí platit lineární vztahy, protože obě soustavy jsou kartézské (jen navzájem posunuté a otočené [Rektorys and spol., 1963]):

$$\begin{aligned} X_1 &= X_{01} + a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1, \\ Y_1 &= Y_{01} + a_{21} x_1 + a_{22} y_1 + a_{23} z_1, \\ Z_1 &= Z_{01} + a_{31} x_1 + a_{32} y_1 + a_{33} z_1, \end{aligned} \quad (9.13)$$

kde a_{ij} jsou směrové kosiny udávající vzájemnou orientaci os obou soustav [Rektorys and spol., 1963]. Obdobné vztahy platí pro souřadnice bodu Q :

$$\begin{aligned} X_2 &= X_{02} + b_{11} x_2 + b_{12} y_2 + b_{13} z_2, \\ Y_2 &= Y_{02} + b_{21} x_2 + b_{22} y_2 + b_{23} z_2, \\ Z_2 &= Z_{02} + b_{31} x_2 + b_{32} y_2 + b_{33} z_2. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Vektor $\vec{R}$, určený počátečním bodem Q a koncovým bodem P , lze vyjádřit jako

$$\vec{R} = \vec{R}_1 - \vec{R}_2 = (X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2). \quad (9.15)$$

Jeho velikost je

$$R = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}. \quad (9.16)$$

Zapíšeme-li integrál (9.10) ve tvaru

$$\vec{F}^{(12)} = -G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \varrho_1(\vec{r}_1) \varrho_2(\vec{r}_2) \frac{\vec{R}_1 - \vec{R}_2}{R^3} dV_1 dV_2 \quad (9.17)$$

a dosadíme sem za $\vec{R}$ užitím vzorců (9.13) až (9.16), po integraci přes objem V_1 vymizí závislost na x_1, y_1, z_1 a po integraci přes V_2 vymizí závislost na x_2, y_2, z_2 . Při daných tělesech T_1 a T_2 je pak integrál (9.17) funkcí zbývajících veličin vystupujících v (9.13) a (9.14), tj. závisí na parametrech $X_{01}, Y_{01}, Z_{01}, X_{02}, Y_{02}, Z_{02}, a_{ij}, b_{ij}$, ($i, j = 1, 2, 3$), které charakterizují polohy obou těles (lze ukázat, že z devíti koeficientů a_{ij} , resp. b_{ij} jsou pouze tři nezávislé a bývají často nahrazovány třemi Eulerovými úhly).

Složky vektoru $\vec{R}/R^3$ v (9.17) budeme nyní chtít vyjádřit jako derivace funkce $1/R$ podle některých výše uvedených parametrů. Užitím (9.16) a první z rovnic (9.13) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial X_{01}} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial X_1}{\partial X_{01}} = - \frac{X_1 - X_2}{R^3} \cdot 1.$$

Odtud plyne, že vzorec (9.17) můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F}^{(12)} = G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \varrho_1(\vec{r}_1) \varrho_2(\vec{r}_2) \text{grad}_{01} \left(\frac{1}{R} \right) dV_1 dV_2, \quad (9.18)$$

kde symbolem grad_{01} rozumíme vektor, jehož složky se dostanou derivováním podle parametrů X_{01} , Y_{01} a Z_{01} . Protože tyto parametry vystupují v integrandu pouze ve funkci $1/R$, můžeme příslušné derivování považovat za derivování integrálu podle parametru. Jsou-li splněny potřebné podmínky pro záměnu derivace a integrálu, můžeme (9.18) vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F}^{(12)} = -\text{grad}_{01} U^{(12)}, \quad (9.19)$$

kde

$$U^{(12)} = -G \iiint_{V_1} \iiint_{V_2} \frac{\varrho_1 \varrho_2}{R} dV_1 dV_2. \quad (9.20)$$

Skalární funkce $U^{(12)}$ se obvykle nazývá vzájemným potenciálem dvou těles. Závisí obecně na 12 nezávislých parametrech, které určují polohu obou těles, tedy např. na parametrech X_{01} , Y_{01} , Z_{01} , X_{02} , Y_{02} , Z_{02} a po třech nezávislých z parametrů a_{ij} a b_{ij} . Zopakujme ještě, jak bylo uvedeno na začátku paragrafu, že $\vec{F}^{(12)}$ je výsledná gravitační síla vztažená k bodu $O_1(X_{01}, Y_{01}, Z_{01})$ prvního tělesa, kterou na první těleso T_1 působí těleso T_2 (příslušný bod je označen jako O_1 obr. 9, ale na obr. 8 jako O).

Vyjadřováním momentu silové dvojice pomocí vzájemného potenciálu se zde již zabývat nebudeme, ale odkazujeme zájemce např. na knihy [Dubošin, 1961, Dubošin, 1975].

Kapitola 10

Gravitační a elektrostatické pole sféricky symetrických těles

„... já si vážně myslím, ... že hlavní oprávnění matematické existence je v řešení problémů, a že tedy skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení.“

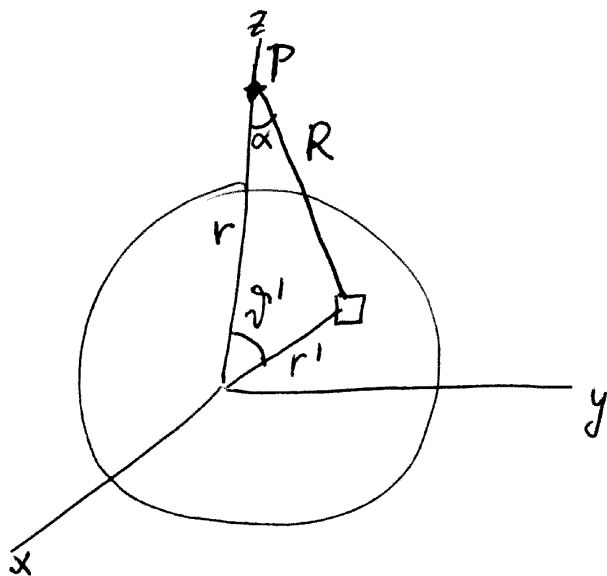
(P.R.Halmos [Halmos, 1982])

Dříve, než přistoupíme ke studiu obecných vlastností potenciálů, vyšetříme v kap. 10 a 11 pole speciálních těles. Často se v učebnicích postupuje v opačném pořadí. Zde však chceme začít s konkrétními příklady, protože některé speciální výsledky mohou být použity i v obecné teorii, vlastnosti speciálních polí rovněž ilustrují některé obecné vlastnosti a zejména pak uvedené modely nacházejí četné aplikace ve fyzice, geofyzice a astronomii. Omezíme se převážně jen na vyšetřování gravitačních polí příslušných těles, přenos výsledků na elektrostatická pole není obtížný, viz předchozí kapitolu; místo konstanty $(-G)$ je třeba psát $1/(4\pi\epsilon)$, kde ϵ je permitivita příslušného prostředí, v případě vakua bude $\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ F/m.

10.1 Intenzita pro sféricky symetrickou (Newtonovu) kouli

Uvažujme kouli, ve které je hustota ϱ pouze funkcí vzdálenosti od středu r' , tj. $\varrho = \varrho(r')$. Tomuto kulově symetrickému tělesu se někdy říká Newtonova koule [Idel'son, 1936]. Speciálním případem je např. homogenní koule, kterou se zde rovněž budeme zabývat. Newtonova koule je velmi často používaným modelem ve fyzice, astronomii, geofyzice a geodézii.

Poloměr koule označme a . Počítejme gravitační pole v nějakém bodě P ve vzdálenosti r od středu koule (obr. 10). Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby měla počátek ve středu koule a osa z procházela bodem P . Označme r' , ϑ' a φ' sférické souřadnice elementů koule. Výpočet intenzity gravitačního pole provedeme ve sférických souřadnicích.



Obrázek 10

cích [Kellogg, 1967, Neumann, 1887]. Pro element objemu ve sférických souřadnicích platí známý vztah

$$dV = r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' \quad (10.1)$$

a pro vzdálenost R bodu P a elementu koule platí podle kosinové věty

$$R^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \vartheta'. \quad (10.2)$$

Vzhledem k symetrii úlohy bude mít intenzita nenulovou pouze radiální složku $E_r(P)$, která při naší volbě souřadnic souhlasí se složkou intenzity $E_z(P)$. Kromě toho v bodě P platí $z = r$. Užitím (7.15) dostáváme

$$\begin{aligned} E_r(P) = E_z(P) &= -G \iiint_V \varrho \frac{z - z'}{R^3} dV = \\ &= -G \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho(r - r' \cos \vartheta') \frac{r'^2 \sin \vartheta'}{(r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \vartheta')^{3/2}} dr' d\vartheta' d\varphi' = \\ &= -2\pi G \int_0^a \varrho \left[\int_0^\pi f(\vartheta') \frac{dg(\vartheta')}{d\vartheta'} d\vartheta' \right] dr', \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \varrho &= \varrho(r'), \\ f(\vartheta') &= r - r' \cos \vartheta', \\ g(\vartheta') &= \frac{-r'}{r \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos \vartheta'}}. \end{aligned}$$

Integrací per partes podle ϑ' dostaneme

$$E_r(r) = -2\pi G \int_0^a \varrho \frac{r'}{r} \left[-1 + \frac{r - r'}{|r - r'|} + \frac{r + r' - |r - r'|}{r} \right] dr'. \quad (10.3)$$

Výraz v hranaté závorce v integrandu je roven $2r'/r$ pro $r \geq r'$ a je nulový pro $r < r'$.

Jestliže bod P leží vně koule, je r větší než jakékoliv r' . Z posledního vzorce pak pro pole vně koule plyne

$$E_{r,e}(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^a \varrho(r') r'^2 dr', \quad (10.4)$$

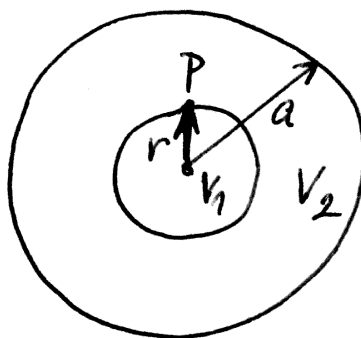
kde index e označuje, že se jedná o vnější pole (externí). Zavedme do tohoto vzorce celkovou hmotnost koule M , pro niž zřejmě platí

$$M = \iiint_V \varrho dV = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho(r') r'^2 \sin \vartheta' dr' d\vartheta' d\varphi' = 4\pi \int_0^a \varrho(r') r'^2 dr. \quad (10.5)$$

Intenzitu gravitačního pole vně a na povrch koule lze tedy psát v jednoduchém tvaru

$$E_{r,e}(r) = -\frac{GM}{r^2}; \quad (r \geq a). \quad (10.6)$$

Tento vzorec je stejný jako vzorec pro intenzitu gravitačního pole hmotného bodu o hmotnosti M umístěného v počátku. Dostali jsme tak známý výsledek, že gravitační pole vně a na povrchu kulově symetrického tělesa je stejné jako gravitační pole hmotného bodu, který se nachází ve středu koule a v němž je soustředěna veškerá hmota koule. Tento výsledek také například zdůvodňuje, proč lze při výpočtech drah planet považovat planety i Slunce s dostatečnou přesností za hmotné body. Na druhé straně má tento výsledek, tj. nezávislost vnějšího pole na konkrétním tvaru funkce $\varrho(r')$, velmi nepříznivé důsledky pro řešení některých jiných úloh. Například odtud vyplývají velmi pesimistické závěry o možnosti gravimetrického výzkumu zemského nitra. Ze vzorce (10.6) plyne, že kdyby Země byla kulově symetrická, nebylo by možné žádným měřením gravitačního pole vně Země nebo na jejím povrchu určit nic více než celkovou hmotnost Země. Z gravimetrických dat nelze tedy určovat radiální průběh hustoty v Zemi; bez doplňkových údajů každá taková snaha představuje nejednoznačnou úlohu, mluvíme o nejednoznačnosti interpretace gravimetrických dat. Při určování průběhu hustoty s hloubkou se proto využívají ještě jiné údaje, zejména seismické a astronomické. Z měření gravitačního pole můžeme určovat jen odchylky v rozložení hmot od kulové symetrie. K některým z těchto otázek se ještě vrátíme na konci této kapitoly.



Obrázek 11

Je-li bod P vnitřním bodem koule, musíme integrál v (10.3) rozdělit na dva, první přes interval $(0, r)$ a druhý přes interval (r, a) , viz obr. 11. Druhý integrál je nulový, protože je

$r < r'$ a integrand v (10.3) je nulový. Odtud plyne vzorec pro intenzitu gravitačního pole ve vnitřním (interním) bodě koule ve tvaru

$$E_{r,i}(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr' = -\frac{G m(r)}{r^2}, \quad (10.7)$$

kde

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr' \quad (10.8)$$

je hmotnost koule V_1 o poloměru r (obr. 11). Tedy ve vnitřním bodě P přispívají k intenzitě pouze hmoty koule V_1 , jejíž povrch prochází bodem P . Příspěvek hmot z kulové vrstvy V_2 , které se nacházejí ve větších vzdálenostech od středu koule než bod P , je nulový. Konkrétní závislost intenzity na vzdálenosti r závisí na tvaru funkce ϱ . Několik konkrétních speciálních případů budeme vyšetřovat až dále.

Přes některé podobnosti pole Newtonovy koule s polem hmotného bodu existují i zásadní rozdíly. V místě hmotného bodu je intenzita nekonečná, kdežto uvnitř Newtonovy koule je intenzita všude konečná, jak hned ukážeme. Označme ϱ_{max} maximální hodnotu hustoty v kouli a předpokládejme, že ϱ_{max} je konečné číslo. Z (10.8) pak plyne

$$m \leq \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_{max}$$

a dosazením do (10.7) dostáváme

$$|E_{r,i}(r)| \leq \frac{4}{3} \pi G r \varrho_{max}. \quad (10.9)$$

Intenzita pole je tedy všude konečná, ve středu koule je dokonce nulová. Rozdíl od pole hmotného bodu souvisí s tím, že v místě hmotného bodu je hustota nekonečná, ale zde uvažujeme jen konečné hustoty. Dokážeme ještě více, že za daných předpokladů je intenzita všude spojitá. Spojitost vnějšího pole je zřejmá ze vzorce (10.6), spojitost na povrchu $r = a$ z toho, že vzorce (10.6) a (10.7) zde dávají stejné hodnoty. Pro vnitřní pole uvažujeme rozdíl

$$\begin{aligned} |E_{r,i}(r + \Delta r) - E_{r,i}(r)| &= \frac{4\pi G}{r^2} \int_r^{r+\Delta r} \varrho(r') r'^2 dr' \leq \\ &\leq \frac{4}{3} \pi G \varrho_{max} \frac{3r^2 \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3}{r^2} \leq \\ &\leq 4\pi G \varrho_{max} \Delta r. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Uvedený rozdíl intenzit lze udělat libovolně malý, zvolíme-li dostatečně malé Δr . To znamená, že intenzita je spojitá. Poznamenejme, že intenzita je spojitá i v místech, kde se hustota mění skokem, tj. na povrchu koule a na případných rozhraních uvnitř koule.¹

¹Až do tohoto místa jsou rukopisná verze a strojopisná verze shodné. Text od tohoto místa až do konce paragrafu je do strojopisu přidán (vložen). Rukopis pokračuje tam, kde začíná paragraf 10.2, a úlohy jsou v rukopise až za jeho koncem.

Pro první derivace intenzity již uvedená vlastnost spojitosti obecně neplatí. Ukážeme, že první derivace intenzity pro Newtonovu kouli jsou nespojité ve všech místech, kde je nespojitá hustota, tj. na povrchu koule a na hustotních rozhraních uvnitř koule.

Derivaci intenzity podle průvodiče r ve vnějším bodě dostaneme snadno derivováním vzorce (10.6):

$$\frac{dE_{r,e}(r)}{dr} = \frac{2GM}{r^3} = -\frac{2E_{r,e}(r)}{r} \quad \text{pro } r \geq a. \quad (10.11)$$

Toto je funkce spojitá všude vně koule. Pro derivaci intenzity ve vnitřním bodě koule plyne z (10.7):

$$\frac{dE_{r,i}(r)}{dr} = \frac{2Gm(r)}{r^3} - \frac{G}{r^2} \frac{dm(r)}{dr}. \quad (10.12)$$

K výpočtu derivace $dm(r)/dr$ je třeba použít větu o derivování integrálu podle parametru při proměnných mezích [Rektorys and spol., 1963, Jarník, 1955]:

Jsou-li $\alpha(r)$ a $\beta(r)$ funkce se spojitou derivací v intervalu $\langle r_1, r_2 \rangle$ a jsou-li $f(r, s)$ a $\partial f / \partial r$ spojitě v obrazci $r_1 \leq r \leq r_2$, $\alpha(r) \leq s \leq \beta(r)$, pak platí

$$\frac{d}{dr} \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r, s) ds = \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} \frac{\partial f(r, s)}{\partial r} ds + \beta'(r) \cdot f(r, \beta(r)) - \alpha'(r) \cdot f(r, \alpha(r)). \quad (10.13)$$

Protože ve funkci $m(r)$, dané vzorcem (10.8), vystupuje proměnná r pouze v horní mezi integrálu, plyne odtud

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \varrho(r) r^2. \quad (10.14)$$

Dosazením do (10.12) dostáváme výsledný vzorec

$$\frac{dE_{r,i}(r)}{dr} = -\frac{2E_{r,i}(r)}{r} - 4\pi G \varrho(r). \quad (10.15)$$

Protože $E_{r,i}$ je funkce spojitá (jak jsme výše dokázali) a na povrchu koule přechází spojitě na $E_{r,e}$, plyne odtud, že derivace intenzity (10.15) je nespojitá pro všechna r , pro něž je nespojitá hustota ϱ .

Vzorec (10.15) je speciálním případem tzv. Brunsova vzorce, který má velký význam v teorii tíhových redukci a v teorii tvaru rovnovážných kapalin [Idel'son, 1936].

Počítejme ještě divergenci intenzity. V kartézských souřadnicích se divergence vektoru $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ definuje známým vzorcem

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (10.16)$$

Odvoďme nejprve vzorec pro divergenci ve sférických souřadnicích ve speciálním případě, kdy $\vec{E}$ vytváří centrální pole, jako je tomu v našem případě. Je-li

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (10.17)$$

kde $\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor, zřejmě platí

$$E_x = E_r(r) \frac{x}{r}, \quad E_y = E_r(r) \frac{y}{r}, \quad E_z = E_r(r) \frac{z}{r}.$$

Protože je $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, plyne odtud $\partial r / \partial x = x/r$ a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{\partial E_r(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r} + E_r(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial E_r(r)}{\partial r} \frac{x^2}{r^2} + \frac{E_r(r)}{r} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Obdobně lze vyjádřit i další dva členy ve výrazu pro divergenci. Sečtením pak dostaneme vzorec pro divergenci centrálního pole ve známém tvaru

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{dE_r(r)}{dr} + \frac{2 E_r(r)}{r}. \quad (10.18)$$

Dosadíme-li sem vzorce (10.11) a (10.15) pro derivace intenzity Newtonovy koule, dostáváme pro vnější pole

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (10.19)$$

a pro vnitřní pole

$$\operatorname{div} \vec{E} = -4\pi G \varrho, \quad (10.20)$$

kde ϱ je hustota v tom místě, ve kterém určujeme divergenci. Užitím Gaussovy věty integrálního počtu dostáváme z posledních dvou rovnic Gaussův zákon:

$$\iint_S E_n dS = -4\pi G M, \quad (10.21)$$

kde S je libovolná uzavřená plocha, E_n je složka intenzity ve směru vnější normály k ploše S a M je celková hmota uzavřená plochou S . V kap. 12 ukážeme, že vzorce (10.19) až (10.21), zde odvozené jen pro Newtonovu kouli, mají mnohem obecnější platnost.

Úlohy

1. Vyjděte z platnosti Gaussova zákona (10.21) a ukažte, že z něj ihned plynou vzorce (10.6) a (10.7) pro intenzitu gravitačního pole Newtonovy koule.
2. Tentokrát za výchozí rovnice zvolte diferenciální rovnice (10.19) a (10.20). Odvoďte z nich vzorce pro intenzitu gravitačního pole Newtonovy koule (10.6) a (10.7).

Řešení: Nejprve řešme rovnici pro vnější pole. Vzhledem k symetrii úlohy vede rovnice (10.19) na obyčejnou homogenní diferenciální rovnici (index r pro označení radiální složky vynecháváme):

$$\frac{dE(r)}{dr} + \frac{2 E(r)}{r} = 0. \quad (10.22)$$

Toto je Eulerova diferenciální rovnice, kterou lze substitucí $r = e^t$ převést na rovnici s konstantními koeficienty a tu snadno vyřešit. Vyjde

$$E(r) = \frac{C}{r^2}, \quad (10.23)$$

kde C je nějaká konstanta. Pro vnitřní pole máme nehomogenní rovnici

$$\frac{dE(r)}{dr} + \frac{2E(r)}{r} = -4\pi G \varrho(r). \quad (10.24)$$

Její obecné řešení je součtem partikulárního řešení této rovnice a obecného řešení homogenní rovnice (10.22). Partikulární řešení určíme metodou variace konstant, tj. v řešení (10.23) homogenní rovnice zaměníme konstantu C funkcí $C(r)$. Dosazením do (10.24) dostáváme rovnici

$$\frac{dC(r)}{dr} = -4\pi G r^2 \varrho(r),$$

jejíž řešení, až na aditivní konstantu, lze zapsat ve tvaru

$$C(r) = -4\pi G \int_0^r r'^2 \varrho(r') dr'.$$

Obecné řešení rovnice (10.24) má tedy tvar

$$E(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \varrho(r') dr' + \frac{D}{r^2}, \quad (10.25)$$

kde D je nějaká konstanta. Protože ve středu koule ($r = 0$) je intenzita nulová (z důvodů symetrie úlohy), musíme položit $D = 0$ a tím dostáváme vzorec pro vnitřní pole (10.7). Zbývá určit konstantu C ve vzorci (10.23) pro vnější pole; použijeme požadavku, aby na povrchu koule byla intenzita spojitá.

3. Vyjádření intenzity vnitřního pole pomocí střední hustoty [Idel'son, 1936]. Místo $m(r)$ je možné zavést střední hustotu v kouli o poloměru r . Označíme-li ji jako $D(r)$, lze ji zřejmě definovat vztahem

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 D(r). \quad (10.26)$$

Vyjádřete intenzitu vnitřního pole pomocí $D(r)$.

Odpověď:

$$E_{r,i}(r) = -\frac{4}{3} \pi G r D(r). \quad (10.27)$$

4. Tisserandův parametr [Idel'son, 1936]. Funkce $D(r)$, zavedená v (10.26), má velký význam v teorii tvaru Země a jiných nebeských těles. Výraz $r D'/D$ se nazývá Tisserandův parametr. V jakých mezích mohou ležet hodnoty tohoto parametru při libovolném rozložení hustoty uvnitř Newtonovy koule a speciálně v případě kapalné Newtonovy koule?

Řešení: Porovnáním (10.8) a (10.26) dostáváme

$$r^3 D(r) = 3 \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr'.$$

Derivováním podle r odtud plyne

$$3r^2 D(r) + r^3 D'(r) = 3\rho(r)r^2,$$

neboli

$$r \frac{D'}{D} = \frac{3\rho}{D} - 3.$$

Protože hustota může nabývat nejmenší hodnoty nulové, plyne odtud minimální hodnota $r \frac{D'}{D} = -3$. Naopak v případě kulové slupky, viz níže, roste hustota ρ v místě slupky nade všechny meze a přitom D zůstává omezené. V tomto případě dostáváme horní mez $r \frac{D'}{D} = +\infty$. Jedná-li se o kapalinu v ustáleném stavu, nesmí hustota směrem od středu koule růst, jinak by nastala nestabilní situace a hustší kapalina by klesla směrem ke středu a vytlačila řidší kapalinu. Mezní případ, kdy je kapalina ještě stabilní, je případ homogenní kapaliny. V tomto případě je $\rho = D$ a $r \frac{D'}{D} = 0$. V případě kapalně Newtonovy koule leží tedy hodnota Tisserandova parametru v intervalu $\langle -3, 0 \rangle$.

5. Odvoďte, že Brunsův vzorec (10.15) pro vnitřní pole lze vyjádřit ve tvaru [Idel'son, 1936]

$$\frac{dE_r(r)}{dr} = -4\pi G \left[\rho(r) - \frac{2}{3} D(r) \right], \quad (10.28)$$

kde D bylo zavedeno v (10.26). Zavedeme-li gravitační zrychlení g kladně ve směru ke středu Země, $g = -E_r$, lze tento vzorec zapsat ve tvaru

$$\frac{dg(r)}{dr} = 4\pi G \left[\rho(r) - \frac{2}{3} D(r) \right]. \quad (10.29)$$

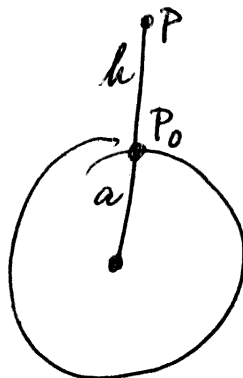
Návod: Vzorec (10.27) dosadte do výrazu na pravé straně (10.15).

6. Saigeyho teorém [Idel'son, 1936, Pick et al., 1973]. Gravitační zrychlení působené Zemí není největší na zemském povrchu, ale v jisté hloubce pod povrchem. Tento závěr odvodil Saigey (čti: seže). Dokažte toto tvrzení, jestliže víte, že střední hustota Země je $5,52 \text{ g/cm}^3$ a hustota na povrchu Země je asi $2,7 \text{ g/cm}^3$.

Řešení: Ve středu Země je $\rho(0) = D(0)$ a z (10.29) plyne $\frac{dg(0)}{dr} = \frac{4}{3}\pi G \rho(0) > 0$. V blízkosti středu Země tedy gravitační zrychlení roste při vzdalování od středu. U zemského povrchu naopak klesá se vzdáleností od středu, neboť $\rho = 2,7$, ale $\frac{2}{3}D = 3,68$. Derivace dg/dr musí být tedy nulová někde pod povrchem a tam nabývá g maxima. Abychom určili místo, kde k tomu dochází, museli bychom znát zákon, jakým se mění hustota uvnitř Země. Známé hustotní modely Země dávají $g_{max} = 10,68 \text{ m/s}^2$ na hranici zemského pláště a jádra v hloubce 2900 km [Jacobs, 1975].

7. Fayeova redukce. Abychom mohli hodnoty gravitačního zrychlení určené v různých místech na zemském povrchu mezi sebou porovnávat, musíme je přepočítat (redukovat) na jednu hladinu, obvykle hladinu moře. Poznamenejme, že s velmi obdobnou situací se setkáváme v meteorologii při přepočtech tlaku vzduchu na hladinu moře.

Nejjednodušší redukcí pro přepočet gravitačního zrychlení je tzv. redukce ve volném vzduchu, neboli redukce Fayeova, která je založena na předpokladu, že mezi hladinou moře a pozorovatelem v nadmořské výšce h neexistují žádné hmoty (obr. 12). Odvodte, že mezi gravitačním zrychlením na hladině moře g_0 a gravitačním zrych-



Obrázek 12

lením g_h v nadmořské výšce h platí přibližně vzorec

$$g_0 = g_h + \Delta g_F, \quad (10.30)$$

kde

$$\Delta g_F = \frac{2g_0}{a} h \quad (10.31)$$

se nazývá Feyovou redukcí, a je poloměr Země. Protože (10.31) představuje jen opravný člen, můžeme v něm místo neznámé hodnoty g_0 dosadit nějakou střední (normální) hodnotu na hladině moře, např. $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$. Ukažte, že pak přibližně platí

$$\Delta g_F = 3,08 h,$$

kde Δg_F je udáno v $\mu\text{m/s}^2$ a výška h v metrech. Poznamenejme, že v gravimetrii neměříme samotné gravitační zrychlení, ale tzv. tíhové zrychlení, což je výslednice gravitačního zrychlení a odstředivého zrychlení, působeného rotací Země. Protože však odstředivé zrychlení tvoří nejvýše jen asi 1/300 gravitačního zrychlení, můžeme uvedené vzorce pro Δg_F používat i pro tíhové zrychlení. Přesnější vzorce pro Fayeovu redukci tíhových měření, uvažující odstředivé zrychlení a zploštění Země, jsou uvedeny např. v [Pick et al., 1973].

Řešení: Pro vnější pole sféricky symetrického tělesa platí:

$$g_0 = \frac{GM}{a^2},$$

$$g_h = \frac{GM}{(a+h)^2} = \frac{GM}{a^2(1+h/a)^2} \doteq g_0 \left(1 - 2\frac{h}{a}\right).$$

Odtud plyne (10.30) a (10.31). Vzorec (10.31) rovněž ihned plyne ze vzorců (10.18) a (10.19).

8. Elektrické pole v atomu vodíku [Purcell, 1965]. Neutrální atom vodíku v normálním stavu se v jistém smyslu chová jako soustava nábojů, skládající se z bodového náboje velikosti $+e$, obklopeného prostorově rozloženým záporným nábojem, jehož hustota je dána výrazem $\varrho(r) = C \exp(-2r/a_0)$. Zde a_0 označuje Bohrovu poloměr, rovný $5,292 \cdot 10^{-11}$ m, a C je konstanta, jejíž hodnota se bere tak, aby celkový záporný náboj byl přesně roven e . Čemu se rovná celkový elektrický náboj uvnitř koule o poloměru a_0 ? Jaká je intenzita elektrického pole v této vzdálenosti od jádra?

Odpověď:

$$C = e/(\pi a_0^3).$$

Celkový náboj v kouli o poloměru a_0 je kladný o velikosti $q = 5e/\tilde{e}^2 \doteq 0,68e$, kde $\tilde{e} \doteq 2,718$ je základ přirozených logaritmů. Intenzita v této vzdálenosti je

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a_0^2} = 2,7 \cdot 10^{13} \text{ V/m},$$

kde jsme použili $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

10.2 Potenciál pro Newtonovu kouli

Přistupme k výpočtu gravitačního potenciálu Newtonovy koule. Uvidíme, že tento výpočet je podstatně jednodušší než výpočet intenzity. Z obecného vzorce (8.10) a vzorců (10.1) a (10.2) dostáváme pro potenciál vyjádření

$$\begin{aligned} U(P) &= -G \iiint_V \frac{\varrho}{R} dV = \\ &= -G \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\varrho r'^2 \sin \vartheta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}} dr' d\vartheta' d\varphi' = \\ &= -2\pi G \int_0^a \varrho r' \left[\frac{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta'}}{r} \right]_{\vartheta'=0}^{\vartheta'=\pi} dr' = \\ &= -\frac{2\pi G}{r} \int_0^a \varrho r' (r + r' - |r - r'|) dr'. \end{aligned} \tag{10.32}$$

Jestliže se bod P nachází vně koule, je $|r - r'| = r - r'$ a pro potenciál dostáváme

$$U_e(r) = -\frac{GM}{r}. \tag{10.33}$$

Poslední výraz je také potenciál hmotného bodu, který se nachází ve středu koule a v němž je soustředěna veškerá hmota koule. Je-li bod P vnitřním bodem koule, musíme integraci v (10.32) rozdělit na dvě části: pro r' v intervalu $(0, r)$ je $|r - r'| = r - r'$ a v intervalu (r, a) je $|r - r'| = -(r - r')$. Vzorec pro vnitřní potenciál má tedy tvar

$$\begin{aligned} U_i(r) &= -\frac{2\pi G}{r} \left[\int_0^r 2\varrho r'^2 dr' + \int_r^a 2\varrho r r' dr' \right] = \\ &= -\frac{Gm}{r} - 4\pi G \int_r^a \varrho(r') r' dr' \quad (0 \leq r \leq a), \end{aligned} \tag{10.34}$$

kde m je hmotnost koule o poloměru r , viz (10.8).

Lze se přesvědčit, že radiální složky intenzity (10.6) a (10.7) lze dostat jako záporně vzaté derivace příslušných potenciálů (10.33) a (10.34) podle r ; pro vnější pole je důkaz elementární, pro vnitřní pole dostáváme derivováním (10.34) vzorec

$$\frac{dU_i}{dr} = \frac{Gm}{r^2} - \frac{G}{r} \frac{dm}{dr} - 4\pi G \frac{d}{dr} \int_r^a \varrho(r') r' dr'.$$

K výpočtu derivací ve druhém a třetím členu na pravé straně tohoto výrazu je třeba použít větu o derivování integrálu podle parametru při proměnných mezích², viz vzorce (10.13) a (10.14). Dostaneme tak

$$\frac{dU_i}{dr} = \frac{Gm}{r^2} - \frac{G}{r} 4\pi \varrho(r) r^2 + 4\pi G \varrho(r) r = \frac{Gm}{r^2} = -E_{r,i}.$$

Gravitační pole Newtonovy koule můžeme tedy popsat pomocí potenciálu U , daného vzorcem (10.33) a (10.34), pro intenzitu pak platí $\vec{E} = -\text{grad } U$. Kdybychom měli napřed zaručeno, že intenzitu lze v tomto případě vyjádřit jako záporně vzatý gradient příslušného Newtonova potenciálu, mohli jsme odvozování intenzity v předcházejícím paragrafu vynechat. Stačilo by počítat jen příslušný integrál pro Newtonův potenciál, který toto pole plně popisuje; poznamenejme, že takto se postupuje ve většině učebnic. Příslušná obecná věta, zajišťující možnost výpočtu intenzity z Newtonova potenciálu, bude s příslušnými předpoklady sice uvedena až v kap. 12, ale nic nebránilo, abychom ji zatím použili bez důkazu. Důvod, proč jsme tak neučinili a odvozovali nezávisle vzorce pro intenzitu a pro potenciál, spočíval v tom, že jsme chtěli porovnat složitost obou postupů. Ukázalo se, že z matematického hlediska je v tomto případě jednodušší počítat potenciál než intenzitu. Protože však (na rozdíl od některých jiných autorů) za základní vzorce popisující příslušné fyzikální zákony považujeme vzorce pro intenzitu, a nikoliv vzorce pro potenciál, začali jsme vyšetřování pole Newtonovy koule odvozováním vzorců pro intenzitu.

Zapišme ještě vzorce pro divergenci intenzity pomocí potenciálu. Protože divergence gradientu dává Laplaceův operátor Δ ,

$$\text{div } \vec{E} = \text{div}(-\text{grad } U) = -\Delta U,$$

pro potenciál vně Newtonovy koule z rovnice (10.19) vyplývá Laplaceova rovnice

$$\Delta U = 0. \quad (10.35)$$

Pro vnitřní potenciál dostáváme z (10.20) rovnici Poissonovu

$$\Delta U = 4\pi G \varrho. \quad (10.36)$$

Poznamenejme, že Poissonova rovnice pro Newtonovu kouli platí v místech, kde je hustota spojitá; plyne to z věty o derivování integrálu podle parametru, uvedené v předchozím paragrafu.

²Od tohoto místa až do konce tohoto paragrafu se rukopis a strojopis liší. Oba texty se opět shodují počínaje následujícím paragrafem.

Jestliže nějaká funkce má spojité derivace až do druhého řádu a splňuje Laplaceovu rovnici, nazýváme ji funkcí harmonickou. Gravitační potenciál vně Newtonovy koule je tedy harmonickou funkcí.

V dalším textu, zejména pak v kap. 12, uvidíme, že odvozené vlastnosti a mnohé vzorce mají mnohem obecnější platnost, než jen pro Newtonovu kouli. V případě objemového potenciálu tím máme na mysli zejména spojitost potenciálu a jeho prvních derivací v celém prostoru, nespojitost některých druhých derivací potenciálu v místech nespojitosti hustoty, platnost Laplaceovy rovnice pro vnější pole a Poissonovy rovnice pro vnitřní pole. Samozřejmě uvedené vlastnosti neplatí naprosto univerzálně, ale při splnění jistých, ale dosti obecných předpokladů.

Vzorce odvozené v tomto a v předchozím paragrafu nacházejí četné aplikace při studiu gravitačního pole a tvaru Země a v gravimetrickém průzkumu. Některých z těchto otázek si ještě všimneme na konci této kapitoly. Dříve však odvodíme vzorce pro některé speciální případy závislosti hustoty na vzdálenosti od středu koule. Protože vnější pole bude ve všech případech popsáno stejnými vzorci, které byly odvozeny výše, nebudeme tyto vzorce opakovat a budeme v následujících třech paragrafech vyšetřovat pouze vnitřní pole.

10.3 Homogenní koule

Je-li koule homogenní, tj. $\varrho = \text{konst.}$, pro intenzitu gravitačního pole uvnitř koule dostáváme z (10.7) vzorec

$$E_{r,i} = -\frac{G m(r)}{r^2} = -\frac{4}{3} \pi G \varrho r. \quad (10.37)$$

Pole uvnitř homogenní koule je centrální a má velmi zajímavou vlastnost, jeho intenzita totiž roste lineárně od středu koule. S takovou závislostí síly na vzdálenosti se setkáváme u harmonického oscilátoru (pružina, malé kmity matematického kyvadla aj.). Gravitační pole uvnitř homogenní koule působí tedy jako kvasielastická síla [Idel'son, 1936]. Kdyby se mohl nějaký hmotný bod uvnitř homogenní koule pohybovat (viz příklad 2 uvedený níže), mohli bychom jeho pohyb popsat užitím teorie harmonického oscilátoru.

Vzorec (10.34) pro vnitřní potenciál nabývá v případě homogenní koule tvaru

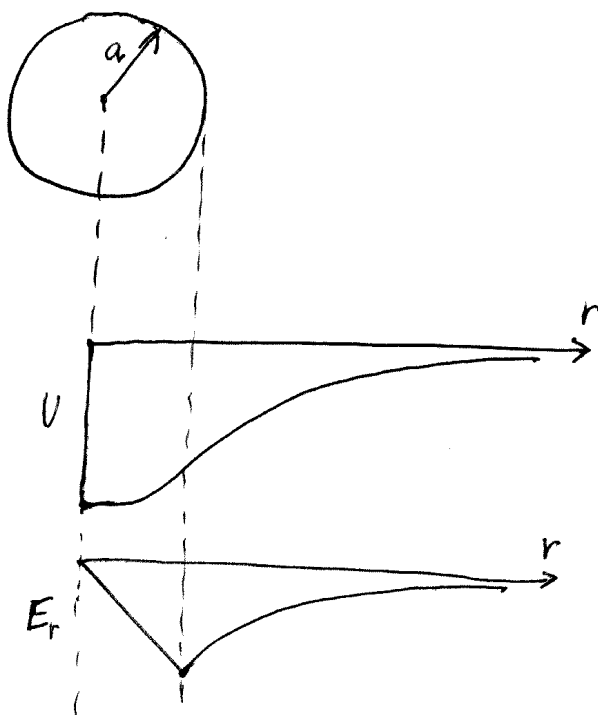
$$U_i(r) = -2 \pi G \varrho \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right). \quad (10.38)$$

Průběh gravitačního potenciálu a intenzity pro homogenní kouli je znázorněn na obr. 13, viz [Kittel et al., 1965]. Mezi potenciály ve středu a na povrchu koule platí podle (10.38) vztah $U(0) = \frac{3}{2} U(a)$.

Všimněme si následující důležité vlastnosti [Idel'son, 1936]. Vnější potenciál homogenní koule, v důsledku (10.33), je vyjádřen lomenou a přitom iracionální funkcí souřadnic

$$U(x, y, z) = -\frac{G M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

avšak uvnitř homogenní koule je potenciál U kvadratickým polynomem souřadnic, viz (10.38). Potenciál homogenní koule je tedy příkladem funkce, která zůstává spojitá

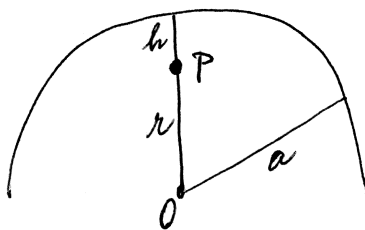


Obrázek 13

při přechodu přes hranici hmot, ale mění svůj analytický charakter, v tomto případě se z kvadratického polynomu mění na lomenou iracionální funkci. Tato vlastnost se zachovává i v obecnějších případech. Například v následujícím dílu skript ukážeme, že potenciál uvnitř homogenního elipsoidu je kvadratickou funkcí souřadnic,

$$U(x, y, z) = G \varrho (K + A x^2 + B y^2 + C z^2),$$

kde K, A, B, C jsou konstanty, závislé pouze na poměru poloos; naproti tomu potenciál vně homogenního elipsoidu je transcendentní funkcí souřadnic. Uvedená vlastnost se tedy u homogenního elipsoidu projevuje dokonce ještě výrazněji než u homogenní koule.



Obrázek 14

S uvedenou vlastností souvisí otázka analytického prodloužení potenciálu z vnější oblasti do oblasti vnitřní. Tuto otázku postavil Poincaré do těsné souvislosti s teorií tíhových redukci [Idel'son, 1936]. Objasňme, co zde rozumíme analytickým prodloužením. Necht se bod P nachází v malé hloubce h pod povrchem homogenní koule o poloměru a (obr. 14), takže pro průvodič tohoto bodu platí $r = a - h$. Potenciál v tomto bodě je podle (10.38) roven

$$U(P) = -2\pi G \varrho a^2 + \frac{2}{3}\pi G \varrho (a - h)^2. \quad (10.39)$$

Vypočítejme nyní potenciál v tomto bodě užitím vzorce (10.33), tj. jakoby bod P byl bodem vnějším. Jinými slovy, prodlužme vnější potenciál do hloubky h pod povrch při zachování jeho analytických vlastností. Označíme-li prodloužený potenciál znakem U' , v bodě P platí

$$U'(P) = -\frac{GM}{r} = -\frac{4}{3}\pi G \varrho \frac{a^3}{a-h}. \quad (10.40)$$

Nyní nás zajímá rozdíl obou potenciálů. Předpokládejme, že $h \ll a$. Rozložme (10.40) užitím následujícího rozvoje v mocninách malé veličiny $u = h/a$:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \dots$$

Po jednoduchých úpravách a zanedbání malých členů vyššího řádu dostáváme

$$U(P) - U'(P) = 2\pi G \varrho h^2. \quad (10.41)$$

Pro příslušná gravitační zrychlení g a g' , braná kladně směrem ke středu koule, odtud plyne

$$g(P) - g'(P) = -4\pi G \varrho h. \quad (10.42)$$

Skutečné gravitační zrychlení v bodě pod povrchem je tedy menší přibližně o hodnotu $4\pi G \varrho h$ než hodnota, kterou dostaneme prodloužením vnějšího pole do stejného bodu; viz změnu v průběhu intenzity na povrchu koule v obr. 13. Vzorce (10.41) a (10.42) odvodil prvně Poincaré. Ze vzorce (10.42) plyne, že derivace dg/dh pro vnitřní a vnější pole se liší přibližně o hodnotu $-4\pi G \varrho$, což bylo možné očekávat také již na základě vzorců (10.11) a (10.15).

Vlastní gravitační energii homogenní koule dostaneme ze vzorců (8.30) a (10.38):

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_V \varrho U \, dV = \\ &= -\pi G \varrho^2 \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(a^2 - \frac{r'^2}{3}\right) r'^2 \sin \vartheta' \, dr' \, d\vartheta' \, d\varphi' = \\ &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{a}, \end{aligned} \quad (10.43)$$

kde M je hmotnost koule.

Píšeme-li v uvedených vzorcích $1/(4\pi\epsilon_0)$ místo konstanty $(-G)$ a náboj Q místo M , dostaneme výrazy pro elektrostatické pole homogenní koule (předpokládáme, že se jedná o rozložení prostorového náboje ve vakuu s permitivitou ϵ_0). Z (10.43) tak dostaneme vlastní elektrostatickou energii rovnoměrně nabitě koule ve tvaru

$$W_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{a}. \quad (10.44)$$

Abychom mohli vypočítat vlastní elektrostatickou energii elektronu, je třeba znát jeho poloměr [Kittel et al., 1965]. Protože obecná teorie elektronu neexistuje, můžeme postupovat opačně, určit jeho poloměr na základě energie. Celkovou energii elektronu můžeme

určit pomocí Einsteinova vztahu $E = m c^2$, kde m je hmotnost a c je rychlost světla. Kdyby veškerá energie elektronu byla elektrostatickou energií homogenní koule, platilo by

$$m_e c^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{e^2}{a},$$

kde m_e je hmotnost a e náboj elektronu. Z tohoto vzorce by bylo možné určit poloměr elektronu a . Avšak stavba elektronu není známa. Model ve formě homogenní koule není možné považovat za plně vyhovující, protože není jasné, čím se drží náboj elektronu pohromadě. Proč se elektron nerozletí pod vlivem coulombovského odpuzování jednotlivých elementů tohoto náboje? V současné době neexistuje teorie, která by objasňovala stavbu elektronu. Protože nemáme přesné údaje o stavbě elektronu, je použití koeficientu $3/5$ v posledním vzorci velice problematické, proto jej vynecháme. Použijeme-li číselných hodnot $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, viz [Brož et al., 1980], dostáváme pak jakýsi poloměr

$$a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Tato veličina se nazývá klasickým poloměrem elektronu. Má nějaký vztah k elektronu, ale nevíme přesně jaký. Nicméně se tato délka nazývá charakteristickou délkou.

Úlohy

1. Odhad hmotnosti Galaxie. Uvažujte Galaxii jako kouli s rovnoměrným rozložením hmoty. Slunce obíhá kolem středu Galaxie ve vzdálenosti $10,0 \pm 0,8$ kiloparseků (1 parsek = $3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$) rychlostí přibližně 250 km/s [Allen, 1973, Brož et al., 1980].
 - (a) Určete oběžnou dobu Slunce kolem středu Galaxie, zvanou galaktický rok.
 - (b) Určete hmotnost části Galaxie uvnitř koule, jejíž střed se nachází ve středu Galaxie a povrch prochází Sluncem.

Odpovědi:

- (a) Asi 250 milionů let. Je zajímavé, že se tato doba zhruba rovná periodě některých geologických cyklů na Zemi. Někteří autoři to nepovažují za náhodu, ale hledají v tom hlubší souvislosti.
- (b) Na kruhové dráze se odstředivé zrychlení rovná přítažlivému zrychlení, tedy

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G M}{r^2}, \quad (10.45)$$

kde v je rychlost oběžného pohybu, r poloměr dráhy, M hmotnost části Galaxie. Odtud $M = 2,9 \cdot 10^{41} \text{ kg} = 1,5 \cdot 10^{11} M_\odot$, kde $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ je hmotnost Slunce. Celková hmotnost Galaxie se udává $1,4 \cdot 10^{11} M_\odot$ [Allen, 1973, Brož et al., 1980]. Vzácná shoda naší hodnoty s hodnotou skutečnou je trochu náhodná, vznikla kompenzací dvou efektů, které jsme neuvažovali: zploštění Galaxie a hmoty vně sluneční dráhy.

2. Pohyby uvnitř galaxií [Kittel et al., 1965]. Uvažujme opět model galaxie ve tvaru koule s rovnoměrným rozložením hvězd, charakterizovaným hustotou ϱ . Uvažujme pohyby hvězd jen uvnitř galaxie.

- (a) Jaká síla působí ve vzdálenosti r od středu galaxie?
- (b) Jaká je oběžná rychlost hvězdy, obíhající kolem středu galaxie po kruhové dráze?
- (c) Jaká je perioda oběhu po kruhové dráze? Platí zde třetí Keplerův zákon?

Odpovědi:

- (a) Intenzitu gravitačního pole udává vzorec (10.37).
 - (b) Rychlost v závisí lineárně na poloměru dráhy r , $v = r\sqrt{\frac{4}{3}\pi G \varrho}$.
 - (c) Perioda $T = \sqrt{3\pi/(G \varrho)}$ je pro všechny kruhové dráhy stejná, nezávislá na poloměru dráhy r . Třetí Keplerův zákon zde proto neplatí. Nezávislost T na r bylo možné též očekávat na základě teorie harmonického oscilátoru; perioda malých kmitů matematického kyvadla nezávisí na velikosti výchylky. Ve skutečné galaxii obíhají hvězdy blíže ke středu rychleji, protože ke středu galaxie jsou hmoty více zkoncentrovány.
3. Průběh tlaku v homogenní Zemi [Kittel et al., 1965]. Uvažujte homogenní kouli o hustotě ϱ a poloměru a , která je v hydrostatické rovnováze.
- (a) Určete průběh tlaku, působeného vlastní gravitací, v závislosti na vzdálenosti r od středu koule.
 - (b) Určete velikost tlaku ve středu takové koule, která má poloměr rovný střednímu poloměru Země $a = 6371$ km a hustotu rovnou střední hustotě Země $\varrho = 5,52$ g/cm³.

Řešení:

- (a) Přírůstek tlaku dp při zvětšení hloubky o dh je dán známým vzorcem

$$dp = \varrho g dh,$$

kde $g = |E_{r,i}(r)|$ je zrychlení, r je vzdálenost od středu Země, $dh = -dr$. Bereme-li tlak kladně ve směru ke středu Země, je

$$p(r) = - \int_a^r \varrho \frac{4}{3} \pi G \varrho r dr = \frac{2}{3} \pi G \varrho^2 (a^2 - r^2).$$

- (b) $1,7 \cdot 10^5$ MPa. Ve skutečnosti je ve středu Země tlak větší, $3,6 \cdot 10^5$ MPa, v důsledku růstu hustoty směrem ke středu Země [Jacobs, 1975].

4. Určete vlastní gravitační energii Slunce, které považujte za homogenní kouli s hmotností přibližně $2 \cdot 10^{30}$ kg a poloměrem 700 000 km [Kittel et al., 1965].

Odpověď: $W = -2 \cdot 10^{41}$ J. Je to obrovská energie. V této souvislosti si lze učinit představu o tom, jak obrovská energie se uvolní, až se Slunce na konci svého vývoje změní na bílého trpaslíka, který bude mít poloměr menší než 1/10 současného poloměru [Kittel et al., 1965].

5. Počáteční teplo Země.

- (a) Určete vlastní gravitační energii Země, jejíž hmotnost je $5,97 \cdot 10^{24}$ kg a střední poloměr 6 371 km.
- (b) Předpokládejme, že Země vznikla gravitační koncentrací chladných částic, původně rozptýlených ve velkých vzdálenostech od sebe. Dále předpokládejme, že tato koncentrace proběhla rychle (bez ztrát energie na záření). Je uvolněná gravitační energie dostatečná k tomu, aby se celá Země roztavila [Chen, 1974]? Pro jednoduchost volte měrné teplo v Zemi konstantní a rovné měrnému teplu hornin $0,8 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ [Goguel, 1976] (pro vodu je $4,2 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Odpovědi:

- (a) $W = -2 \cdot 10^{32}$ J.
- (b) Zvýšení teploty asi o 47 000 K, tedy celá Země by se roztavila.

6. Počítejte obdobnou úlohu jako v předchozím příkladu pro Měsíc, který má poloměr 1 736 km a hmotnost 81,3 krát menší, než je hmotnost Země.

Odpovědi:

- (a) $W = -1 \cdot 10^{29}$ J.
- (b) Zvýšení teploty asi o 2 100 K, což by teoreticky mohlo stačit na roztavení celého Měsíce. Skutečné zvýšení teploty bude zřejmě podstatně menší v důsledku vyzařování a v důsledku toho, že částice nepadají z nekonečna. Podrobnější rozbor však ukazuje, že přesto ve svrchních vrstvách Měsíce došlo k ohřevu na teploty větší než je bod tání křemičitanů [Horedt, 1980].

7. Zdroje energie hvězd. Solární konstanta, tj. tok energie plochou kolmou ke slunečním paprskům ve vzdálenosti Země, činí $1\,326 \text{ W/m}^2$ [Brož et al., 1980].

- (a) Vypočítejte celkový výkon vyzařovaný Sluncem, je-li střední vzdálenost Slunce a Země (1 AU) rovna $149,598 \cdot 10^6$ km.
- (b) Na jak dlouho by při takovém výkonu stačila celková gravitační energie Slunce? Může být gravitační energie hlavním zdrojem energie Slunce?

Odpovědi:

- (a) $3,7 \cdot 10^{23}$ kW

- (b) $2 \cdot 10^7$ let, což je málo ve srovnání se stářím Slunce $5 \cdot 10^9$ let, mohutnějším zdrojem energie záření Slunce je energie jaderná, nikoliv gravitační [Kittel et al., 1965].

8. Zdroj vnitřní energie Jupitera. V infračervené oblasti spektra vyzařuje planeta Jupiter ze svého povrchu asi 14 W/m^2 , což je zhruba dvojnásobek toku energie, která je slunečního původu (uvádí se poměr $1,9 - 2,5$, viz [Gehrels, 1976]). Jupiter tedy musí mít nějaký vnitřní zdroj tepla. Předpokládejme, že toto teplo vzniká z gravitační energie v důsledku smršťování Jupitera. Jakou rychlostí by se musel Jupiter smršťovat, aby se uvolňoval tepelný tok zhruba 7 W/m^2 ? Považujte Jupiter za homogenní kouli o hmotnosti $1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ a poloměru $69\,800 \text{ km}$.

Odpověď: $0,5 \text{ mm/rok}$. Potřebné smršťování je tak pomalé, že tento mechanismus získávání tepla z vnitřní gravitační energie můžeme považovat za zcela přijatelný. Přesnější teorie samozřejmě uvažují hustotu závislou na hloubce i jiné jevy, viz [Gehrels, 1976]. Poznamenejme, že obdobné vyzařování bylo zjištěno i u dalších obřích planet (Saturn, Uran, Neptun), ovšem potřebná rychlost kontrakce by byla větší než v případě Jupitera, takže se hledají jiná vysvětlení; např. u Saturnu vystupování vodíku z centrálních částí planety k povrchu a naopak klesání helia.

9. Kulový blesk. Jedná se o dosti ojedinělý jev, který dosud neumíme ani teoreticky vysvětlit, ani experimentálně připravit. Dokonce se i pozorování často neshodují, odhady některých parametrů se liší až o několik řádů. Zdá se, že nejsou v rozporu s pozorováními tyto možné parametry kulového blesku: koule o poloměru 10 cm , vnitřní energie 10 kJ [Stachanov, 1979]. Považujte kulový blesk za homogenně elektrostaticky nabitou kouli s nábojem jednoho znaménka a určete celkový náboj, potenciál na povrchu a intenzitu pole na povrchu. Tento model je evidentně chybný (nevysvětluje, co drží kulový blesk pohromadě aj.), ale snad poskytuje jistou představu o tom, s jak extrémními hodnotami některých fyzikálních parametrů se musejí potýkat teorie kulového blesku.

Odpovědi: $4 \cdot 10^{-4} \text{ C}$; $4 \cdot 10^7 \text{ V}$; $4 \cdot 10^8 \text{ V/m}$.

10. Homogenně zmagnetovaná koule. Využijte vzorců pro gravitační pole homogenní koule k odvození vzorců pro magnetostatické pole homogenně zmagnetované koule.

Řešení: Zvolme počátek souřadnicové soustavy ve středu koule. Užitím Poissonovy věty (8.22) a vzorců pro gravitační pole (10.33) a (10.38) dostáváme pro vnější magnetický potenciál U_e a vnitřní magnetický potenciál U_i homogenně zmagnetované koule následující vzorce:

$$U_e(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \text{grad} \frac{V}{r},$$

$$U_i(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \vec{M} \cdot \text{grad} \left[2\pi \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) \right],$$

kde $\vec{M}$ je vektor magnetizace, V je objem a a poloměr koule, $\vec{r}$ polohový vektor bodu pozorování, $r = |\vec{r}|$. Označme $\vec{M}_c$ celkový magnetický moment koule, $\vec{M}_c = \vec{M} V$. Užijeme-li vztah $\text{grad}(1/r) = -\vec{r}/r^3$, který plyne z (8.16), dostáváme známý vzorec

$$U_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{M}_c \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (10.46)$$

který je stejný jako vzorec pro magnetický dipól, viz (7.28) a (4.13). Dostali jsme tak výsledek, že magnetické pole vně homogenně zmagnetované koule je stejné jako magnetické pole dipólu o stejném magnetického momentu. Pro intenzitu vnějšího magnetického pole, např. z analogie se vzorci (7.29) nebo (7.31), ihned plyne

$$\vec{H}_e(\vec{r}) = -\text{grad } U_e(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 3 \frac{\vec{M}_c \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - \vec{M}_c \right\}. \quad (10.47)$$

Pro vnitřní pole dostáváme

$$\vec{U}_i(\vec{r}) = \frac{1}{6} \vec{M} \cdot \text{grad } r^2 = \frac{1}{3} \vec{M} \cdot \vec{r}, \quad (10.48)$$

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = -\text{grad } U_i(\vec{r}) = -\frac{1}{3} \vec{M}. \quad (10.49)$$

Vidíme, že $\vec{H}_i$ je úměrné magnetizaci $\vec{M}$, ale má opačný směr. Koeficient úměrnosti $N = 1/3$ se nazývá demagnetizačním koeficientem (demagnetizačním faktorem). Poznamenejme, že v soustavě CGSM je $N = 4\pi/3$, viz [Janovskij, 1964].

11. Popište tvar magnetických siločar pro homogenně zmagnetovanou kouli; využijte k tomu výsledků z předcházející úlohy.

Odpověď: Vně koule jsou magnetické siločáry stejné jako u dipólu. Uvnitř jsou všechny přímkové, rovnoběžné se směrem magnetizace.

12. Fridmanova rovnice. Za teoretický základ se v moderní kosmologii berou relativistické teorie, nejčastěji obecná teorie relativity. Až po nalezení relativistických kosmologických rovnic bylo shledáno, že mnohé z nich mohou být odvozeny též z Newtonovy teorie, užijeme-li vhodných analogií. V tomto příkladu se budeme zabývat některými z těchto otázek [Silk, 1980]. Podle Hubbleova zákona je rychlost vzdalování galaxií v úměrná jejich vzdálenosti r :

$$v = H r,$$

kde H je tzv. Hubbleova konstanta (není to vlastně konstanta, protože závisí na čase t , $H = H(t)$). Současnou hodnotu této konstanty přesně neznáme, ale zřejmě leží někde mezi $50 - 100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ($\text{Mpc} = \text{megaparsek}$). Uvažujme část vesmíru ve tvaru rozpínající se koule, která je dostatečně velká, abychom ji mohli považovat za homogenní. Poloměr koule označme $R = R(t)$. Hmoty vně koule neuvažujeme (jakoby koule tvořila celý vesmír). Ze zákona zachování mechanické energie pro částice na povrchu koule odvoďte rovnici

$$H^2 - \frac{8\pi}{3} G \varrho = -\frac{k}{R^2}, \quad (10.50)$$

kde $\varrho = \varrho(t)$ je hustota koule a mechanickou energii na povrchu koule jsme označili jako $(-k/2)$. Rovnice (10.50) je totožná s Fridmanovou rovnicí, známou z relativistické kosmologie, která je základní rovnicí v modelu velkého třesku. Při přechodu k relativistické teorii je rozdíl pouze v interpretaci veličin R a k . Veličina R není již poloměrem kulového vesmíru v newtonské kosmologii, ale univerzálním měřítkovým faktorem (položíme-li $R(t_0) = 1$ v nějakém čase t_0 , kdy vzdálenost nějakých dvou galaxií je r_0 , pak v čase t bude vzdálenost těchto galaxií $r = R(t) r_0$; za t_0 se obvykle volí současnost). V relativistické teorii se konstanta k nazývá křivostí prostoru a připisují se jí tři možné hodnoty: $+1$ (uzavřený prostor), 0 (otevřený eukleidovský prostor) nebo -1 (otevřený hyperbolický prostor).

Řešení: Pro element o jednotkové hmotnosti na povrchu koule je součet kinetické a potenciální energie roven

$$\frac{1}{2} v^2 - G \frac{M}{R} = \text{konst.},$$

kde podle Hubbleova zákona pro rychlost na povrchu koule ($r = R$) platí $v = HR$. Dosadíme-li ještě za hmotnost koule M a konstantu píšeme ve tvaru $(-k/2)$, dostáváme ihned Fridmanovu rovnici (10.50).

13. Einsteinův-de Sitterův vesmír. Položíme-li ve Fridmanově rovnici $k = 0$, pak tato rovnice popisuje tzv. Einsteinův-de Sitterův vesmír. V tomto vesmíru pro hustotu platí

$$\varrho = \frac{3 H^2}{8 \pi G}.$$

Určete přibližnou současnou hodnotu této hustoty, nazývané kritickou hustotou ρ_{krit} ; volte $H = 50 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Položme současnou hodnotu měřítkového faktoru rovnu jedné. Pak ze zákona zachování hmoty plyne, že součin hustoty a poloměru koule (úměrný R^3) je konstantní, tj.

$$\varrho R^3 = \varrho_{krit}.$$

Zřejmě též platí

$$H(t) = v/r = (dr/dt)/r = (dR/dt)/R,$$

neboť $r = R(t) r_0$, viz předchozí příklad. Sestavte příslušnou diferenciální rovnici a jejím vyřešením určete R a ρ jako funkce času. Určete stáří vesmíru pro tento model, tj. čas, který uplynul od velkého třesku.

Řešení: $H = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$; $\rho_{krit} = 4,7 \cdot 10^{-30} \text{ g/cm}^3$. Diferenciální rovnice, plynoucí z (10.50), má tvar

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{8}{3} \pi G \rho_{krit} \right)^{1/2} R^{-1/2}.$$

Přepíšme tuto rovnici pro převrácenou hodnotu dt/dR , viz [Rektorys and spol., 1963]. Předpokládáme-li, že $R = 0$ pro $t = 0$, dostáváme řešení ve tvaru

$$t = \frac{2}{3} \left(\frac{8}{3} \pi G \rho_{krit} \right)^{-1/2} R^{3/2},$$

čili

$$R(t) = (6 \pi G \rho_{krit})^{1/3} t^{2/3}$$

a

$$\rho(t) = \rho_{krit}/R^3 = \frac{1}{6 \pi G t^2}.$$

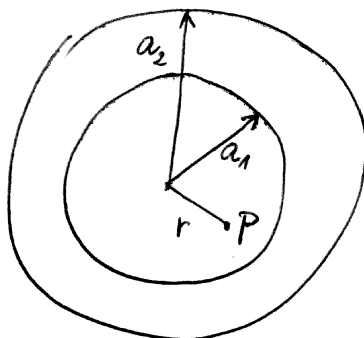
Porovnáme-li poslední vzorec s prvním vzorcem v tomto příkladu, dostaneme

$$t = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H}.$$

Dosažením výše uvedené číselné hodnoty pro Hubbleovu konstantu vyjde stáří vesmíru asi 13 miliard let. Poznamenejme, že řešení Fridmanovy rovnice pro $k \neq 0$ lze nalézt rovněž v [Silk, 1980] a v mnoha dalších učebnicích.

10.4 Homogenní dutá koule

Přistupme k výpočtu pole duté koule s vnitřním poloměrem a_1 a vnějším poloměrem a_2 , viz obr. 15.



Obrázek 15

(Toto těleso, vymezené dvěma soustřednými kulovými plochami, se také nazývá kulovou vrstvou [Sretenskij, 1946]; upozorníme však, že v geometrii se pod kulovou vrstvou obvykle rozumí těleso, které vznikne seříznutím koule dvěma rovnoběžnými rovinami [Rektorys and spol., 1963]. V [Trkal, 1956] je toto těleso též označováno jako mezikoulí.)

Jak jsme již uváděli, vzorce (10.6) a (10.33) pro intenzitu a potenciál vně koule platí i pro případ homogenní kulové vrstvy. Ve vzorci (10.3) pro intenzitu pole je nyní třeba pouze místo integračních mezí 0, a psát integrační meze a_1 , a_2 . Uvnitř kulové vrstvy ($a_1 \leq r \leq a_2$) dostaneme vzorec pro intenzitu obdobný vzorci (10.7) ve tvaru

$$E_r(r) = -\frac{4}{3} \pi G \varrho \frac{r^3 - a_1^3}{r^2}; \quad (10.51)$$

uvnitř dutiny ($r \leq a_1$) je pole nulové,

$$E_r(r) = 0. \quad (10.52)$$

Všimněme si, že pole uvnitř kulové vrstvy se již, na rozdíl od pole uvnitř plné homogenní koule, nemění lineárně se vzdáleností r . Poznamenejme, že vzorec (10.51) jsme mohli napsat rovnou bez jakéhokoliv počítání, jestliže bychom ve vzorci (10.37) z minulého odstavce odečetli účinek vyjmuté homogenní koule o poloměru a_1 , který je roven $-G m_1/r^2$, kde $m_1 = \frac{4}{3} \pi \varrho a_1^3$ je hmotnost vyjmuté koule.

Vzorec (10.52) je vyjádřením Newtonovy věty [Idel'son, 1936]: koncentrická homogenní kulová vrstva nepřitahuje body ležící v její dutině a na její hranici. Přitažlivé síly se zde vzájemně ruší.

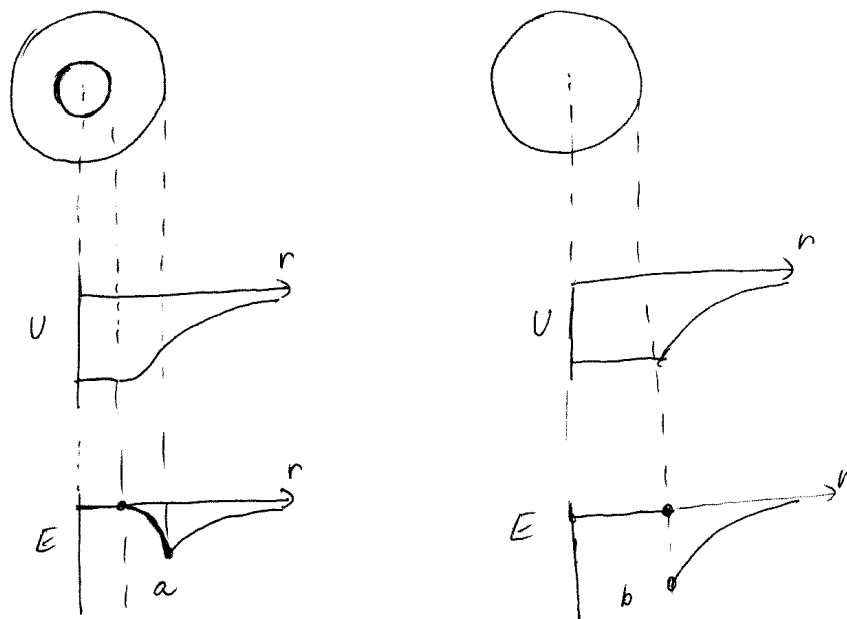
Vzorce pro gravitační potenciál duté koule dostaneme rovněž úpravou vzorce (10.32) nebo přímo ze vzorce (10.38) pro plnou kouli odečtením příspěvku vyjmuté koule, na jejímž místě je nyní dutina. Uvnitř vrstvy ($a_1 \leq r \leq a_2$) dostaneme

$$U(r) = -2\pi G \varrho \left(a_2^2 - \frac{r^2}{3} \right) + \frac{4}{3} \pi G \varrho \frac{a_1^3}{r}; \quad (10.53)$$

uvnitř dutiny ($r \leq a_1$) vyjde potenciál konstantní,

$$U(r) = -2\pi G \varrho \left(a_2^2 - a_1^2 \right). \quad (10.54)$$

Přenecháváme čtenáři, aby i zde ověřil, že záporně vzatý gradient potenciálu dává intenzitu, že potenciál a intenzita jsou všude spojité a v místech hmot platí Poissonova rovnice, mimo hmoty platí Laplaceova rovnice. Průběh potenciálu a intenzity duté homogenní koule je znázorněn na obr. 16a.



Obrázek 16: Potenciál a intenzita gravitačního pole duté homogenní koule (a) a homogenní kulové slupky (b).

Úlohy

1. Odvodili jsme, že gravitační a elektrostatické pole duté homogenní koule se soustřednými plochami je uvnitř dutiny nulové. Ukažte, že pokud v homogenní kouli

vytvoříme kulovou dutinu nesoustřednou, nebude již pole uvnitř dutiny nulové, ale bude mít ve všech bodech dutiny konstantní směr a velikost, tj. bude homogenní [Kellogg, 1967]. Jaká je intenzita pole v dutině?

Návod: Kouli s dutinou můžeme považovat za superpozici původní plné koule a malé plné koule o velikosti dutiny s hustotou opačného znaménka. Příspěvky od obou koulí popisují vzorce typu (10.37). Intenzita v dutině vyjde stejná jako intenzita v původní plné kouli v místě, kde je nyní střed dutiny (ve středu dutiny se tedy pole nezměnilo).

2. Vlastní elektrostatická energie homogenní kulové vrstvy. Určete tuto energii, je-li náboj rozložen s konstantní hustotou ρ mezi soustřednými kulovými plochami o poloměrech a_1, a_2 , kde $a_1 < a_2$. Permittivitu prostředí položte všude rovnou permitivitě vakua ε_0 .

Řešení: Elektrostatický potenciál uvnitř vrstvy dostaneme ze vzorce (10.53) záměnou $(-G)$ za $1/(4\pi\varepsilon_0)$:

$$U(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[a_2^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \frac{a_1^3}{r} \right]. \quad (10.55)$$

Pro vlastní energii platí podle (8.30)

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \rho U \, dV = \frac{\pi \rho^2}{15\varepsilon_0} [4a_2^5 + 6a_1^5 - 10a_1^3 a_2^2]. \quad (10.56)$$

Speciálně, dosadíme-li $a_1 = 0$, dostaneme vzorec (10.44) pro homogenní kouli.

3. Vlastní elektrostatická energie tenké kulové vrstvy. V předchozím příkladu předpokládejte, že $a_2 = a_1 + h$, kde h je malé ve srovnání s a_1 . Ukažte, že přibližně platí

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{a_1}, \quad (10.57)$$

kde Q je celkový náboj a zanedbali jsme členy řádu h^3 a vyšší. Tento vzorec platí přesně v limitě pro $h \rightarrow 0$, jiné jeho odvození bude uvedeno v následujícím paragrafu.

10.5 Homogenní kulová slupka

Velice významná je homogenní kulová slupka, která vznikne z duté koule limitním přechodem tak, že vnější a vnitřní kulovou plochu k sobě přibližujeme až na nulovou vzdálenost, přičemž se celková hmotnost zachovává. Předpokládejme, že se poloměr vnější plochy a_2 nemění a pouze poloměr a_1 se zvětšuje k a_2 při zachování celkové hmotnosti. Protože intenzita vnějšího pole se nemění a intenzita uvnitř dutiny je nulová, v limitě odtud dostáváme, že intenzita pole homogenní kulové slupky je v místě slupky nespojitá.

Označíme-li $a = a_2$ poloměr homogenní kulové slupky a M její hmotnost, pro radiální složku intenzity gravitačního pole dostáváme, viz vzorce (10.6) a (10.52),

$$\begin{aligned} E_r(r) &= -\frac{G M}{r^2} & \text{pro } r > a, \\ E_r(r) &= 0 & \text{pro } 0 \leq r < a. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Skok v radiální složce intenzity činí $-G M/a^2$ při pohybu ve směru průvodiče. Zavedeme-li plošnou hustotu σ užitím vztahu $M = 4 \pi a^2 \sigma$, můžeme skok radiální složky intenzity vyjádřit ve tvaru

$$E_r(a+) - E_r(a-) = -4 \pi G \sigma. \quad (10.59)$$

V tomto vzorci již nevystupuje poloměr slupky. Obdobný vzorec pro skok intenzity elektrostatického pole na homogenní kulové slupce s plošnou hustotou náboje σ dostaneme záměnou konstanty $(-G)$ konstantou $1/(4 \pi \varepsilon_0)$:

$$E_r(a+) - E_r(a-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (10.60)$$

Uvidíme, že vzorce (10.59) a (10.60) mají mnohem obecnější platnost; zůstávají v platnosti i v případě obecné jednoduché vrstvy (kap. 13). Kromě toho, protože uvnitř vodičů je pole nulové, bude na povrchu vodiče platit mezi normálovou složkou intenzity a hustotou náboje jednoduchý vztah $E = \sigma/\varepsilon_0$.

Vyšetřeme potenciál kulové slupky. Vnější potenciál duté koule se při uvedeném limitním přechodu rovněž nemění. Vzorec (10.54) pro vnitřní potenciál však bezprostředně použít nemůžeme, protože $a_2 - a_1$ se blíží k nule, ale hustota ϱ roste do nekonečna. Dosaďme proto do (10.54) za ϱ ze vzorce $M = \frac{4}{3} \pi \varrho(a_2^3 - a_1^3)$:

$$U(r) = -\frac{2 \pi G M(a_2 - a_1)(a_2 + a_1)}{\frac{4}{3} \pi(a_2 - a_1)(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2)}.$$

Po zkrácení členu $a_2 - a_1$ v limitě pro $a_1 \rightarrow a_2$ dostaneme, že potenciál uvnitř kulové slupky je roven konstantě $-G M/a_2$, což je hodnota vnějšího potenciálu na povrchu slupky. Pro potenciál homogenní kulové slupky tedy platí (označíme-li poloměr slupky opět $a = a_2$)

$$\begin{aligned} U(r) &= -\frac{G M}{r} & \text{pro } r \geq a, \\ U(r) &= -\frac{G M}{a} & \text{pro } 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (10.61)$$

Potenciál se při průchodu kulovou slupkou mění spojitě, zatímco intenzita se mění nespojitě (obr. 16b). Uvidíme, že také tato vlastnost je obecnou vlastností polí jednoduchých vrstev.

V případě elektrostatického pole homogenní kulové slupky nabývají vzorce pro potenciál tvaru

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{pro } r \geq a, \\ U(r) &= \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{Q}{a} & \text{pro } 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (10.62)$$

Upozorníme ještě, že v dalším textu budeme pod pojmem „vrstva“ obvykle rozumět vrstvu nekonečně tenkou. Místo o kulové slupce budeme pak mluvit o kulové vrstvě. Pokud se bude jednat o vrstvu konečné tloušťky, bude to výslovně řečeno, případně budeme používat označení jako dutá koule, deska aj.

Poznamenejme, že za tímto paragrafem opět předkládáme čtenáři k řešení několik fyzikálních úloh. Z hlediska obecných otázek matematické teorie bychom chtěli upozornit zejména na úlohu č. 6 o kulovém kondenzátoru, kde se naráží na otázku mezi použitelnosti Newtonova potenciálu; zatímco vzorec pro intenzitu dává správný výsledek, bezprostřední použití běžných vzorců pro Newtonův potenciál vede k chybě.

Úlohy

1. Ověření Coulombova zákona. Nepřímou úměrnost mezi silou, kterou na sebe působí dva bodové náboje, a čtvercem vzdálenosti můžeme přímo experimentálně ověřovat, ale je zřejmé, že takové měření nemůže být příliš přesné. Na základě výsledků z tohoto paragrafu navrhněte jiný, přesnější, test nepřímé úměrnosti mezi silou a čtvercem vzdálenosti [Maxwell, 1881].

Odpověď: Ověřovat, že uvnitř nabitě kulové slupky je intenzita pole nulová, viz následující příklad. V průběhu historie byla provedena řada velmi přesných měření tohoto druhu. Historicky významná jsou měření Cavendishova a Maxwellova. Dosud nejpresnější jsou měření Plimptona a Lawtona z r. 1936. Jejich aparatura se skládala ze dvou kovových soustředných koulí o poloměrech 1, 5 a 1, 2 m, navzájem odizolovaných. Vnější koule byla nabíjena až na potenciál 3000 V, avšak mezi koulemi nebyly zjištěny žádné rozdíly v potenciálu, třebaže bylo možné detekovat rozdíly 10^{-6} V. Na základě těchto měření bylo určeno, že exponent ve jmenovateli Coulombova zákona je roven dvěma s absolutní přesností $2 \cdot 10^{-9}$ [Sedlák and Bakule, 1980].

2. Předpokládejme, že v Newtonově gravitačním zákonu klesá síla se vzdáleností jako $1/R^{2+\varepsilon}$, kde ε je malé číslo. Vypočítejte gravitační potenciál uvnitř homogenní kulové slupky o plošné hustotě σ a poloměru a .

Odpověď:

$$U(r) = -\frac{2\pi G\sigma a}{(1-\varepsilon^2)r} \left[(a+r)^{1-\varepsilon} - (a-r)^{1-\varepsilon} \right].$$

Pro $\varepsilon = 0$ je $U(r) = -4\pi G\sigma a = \text{konst.}$ Je-li $\varepsilon \neq 0$, nemůže již být potenciál uvnitř slupky konstantní, o čemž se lze přesvědčit např. rozvojem $U(r)$ do Maclaurinovy řady podle r .

3. Vypočítejte potenciální energii koule o poloměru a , která je nabita nábojem Q :
 - (a) je-li koule z nevodivého materiálu a předpokládáme-li, že náboj je rovnoměrně rozložen po celém objemu koule;
 - (b) je-li koule vodivá, tj. je-li náboj rovnoměrně rozložen po povrchu koule [Brož, 1974, Idel'son, 1936]:

Řešení:

(a) Potenciální energie je dána vzorcem (10.44).

(b) Podle (8.31) a (10.62) je

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \sigma U \, dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} \iint_S \sigma \, dS = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a}; \quad (10.63)$$

viz vzorec (10.57) odvozený jiným způsobem.

V případě (a) je energie o 20 % větší ve srovnání s případem (b).

4. Zdůvodněte, proč v případě nabitě vodivé koule se elektrické náboje ustálí na jejím povrchu.

Odpověď: V důsledku odpuzivých sil se náboj rozmístí kulově symetricky s hustotou, která bude u povrchu koule větší než u středu koule. Abychom však zdůvodnili, že se náboje rozloží na samém povrchu koule (vytvoří kulovou slupku), musíme vyšetřovat vlastní potenciální energii. Jak je známo z mechaniky, stav stabilní rovnováhy je charakterizován minimální hodnotou potenciální energie. V předchozím příkladu jsme například viděli, že pro homogenně nabitou kouli je vlastní potenciální energie větší než pro kulovou slupku o stejném náboji. Obdobně předpokládáme, že náboje jsou rozloženy v tenké kulové vrstvě o vnitřním poloměru a_1 , který je menší než poloměr koule a . Příslušná vlastní potenciální energie je dána vzorcem (10.57). Jestliže náboje z této vrstvy přesuneme na povrch koule, vlastní potenciální energie se zmenší. Lze proto očekávat, že minima potenciální energie dosáhneme tehdy, jestliže všechny náboje z vnitřku koule přeneseme na její povrch; matematický důkaz vyžaduje řešení příslušné variační úlohy [Idel'son, 1936]. Ještě obtížnější je matematický důkaz, že elektrické náboje se rozloží na povrchu vodiče i v případě vodiče obecného tvaru.

5. Kapacita koule. Odvoďte vzorec pro kapacitu vodivé koule o poloměru a . Zjistěte, jakou kapacitu by měla koule o velikosti Země.

Řešení: Elektrostatický potenciál na povrchu kulové slupky je dán vztahem (10.62), v němž je třeba dosadit $r = a$. Vidíme, že pro danou kouli platí úměrnost mezi U a Q . Porovnáním se vzorcem $Q = C U$, jímž se zavádí kapacita, dostáváme pro kapacitu koule vzorec

$$C = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (10.64)$$

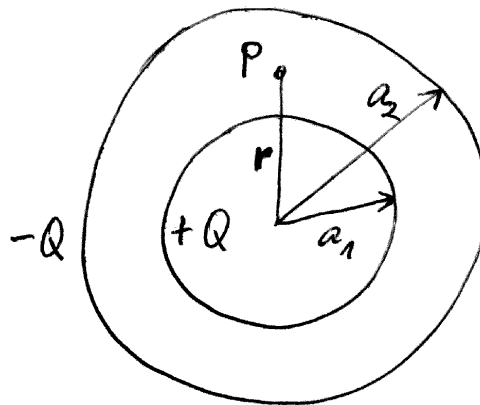
Dosadíme-li $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ a $a = 6371 \text{ km}$, dostáváme $C = 709 \text{ } \mu\text{F}$. Ani koule o velikosti Země nemá příliš velkou kapacitu. Samotná koule je tedy špatný kondenzátor.

6. Kapacita kulového kondenzátoru. Kulový kondenzátor se skládá ze dvou soustředných vodivých kulových ploch. Plochy nabijeme tím způsobem, že na jednu z nich přivedeme náboj $+Q$; elektrostatickou indukcí vznikne na druhé ploše náboj $-Q$

(z této původně elektricky nenabitě plochy se uzemněním odvede náboj $+Q$ do země). Pro kondenzátor definujeme vzájemnou kapacitu vztahem

$$C = \frac{Q}{U_1 - U_2}, \quad (10.65)$$

vyjadřujícím poměr náboje Q na vodiči kladně nabitým k rozdílu potenciálů $U_1 - U_2$ mezi vodiči, přičemž $U_1 > U_2$. Určete kapacitu kulového kondenzátoru, jehož plochy mají poloměry a_1 , a_2 , kde $a_1 < a_2$, mezi plochami je vakuum [Brož, 1974].



Obrázek 17

Řešení: Nechť náboj Q sídlí na vnitřní ploše, náboj $-Q$ na vnější ploše (obr. 17). K určení potenciálu U_1 na vnitřní ploše a U_2 na vnější ploše se bezprostředně nabízí použití vzorce (10.62):

$$U_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a_1}, \quad U_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a_2}.$$

Po dosazení do (10.65) bychom dostali

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Tento vzorec je v rozporu s pozorováními, která ukazují, že kapacita kondenzátoru je tím větší, čím je menší vzdálenost mezi plochami kondenzátoru; ve vzorci pro kapacitu bychom měli spíše očekávat rozdíl poloměrů, nikoliv jejich součet. Někde jsme udělali chybu. Zřejmě v tom, že jsme při výpočtu nevzali v úvahu uzemnění jedné desky. Tímto uzemněním se hladina nulového potenciálu posouvá do konečna, v důsledku toho uvedený vzorec pro potenciály neplatí, neboť byly odvozeny za předpokladu o nulovém potenciálu pouze v nekonečnu. Jinými slovy, při přenášení nábojů na jednu plochu kondenzátoru se na druhé ploše indukují náboje opačného znaménka, které vzorce typu (10.62) uvažují chybně, jakoby tyto náboje byly rovněž přineseny z nekonečna. Situaci nelze zachránit ani tím, že bychom k potenciálům přičetli stejnou konstantu, v rozdílech potenciálů by se stejně odečetla. Setkáváme se tak v těchto skriptech s prvním konkrétním případem selhání vzorců pro Newtonův potenciál, jak jsme na to upozorňovali v paragrafu 8.2. Musíme se proto vrátit ke vzorcům pro intenzitu. V prostoru mezi kulovými plochami je intenzita pole

působená vnějšími náboji nulová, vnitřní náboje dávají intenzitu s radiální složkou (viz vzorec (10.58) pro gravitační pole)

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (a_1 < r < a_2). \quad (10.66)$$

Protože intenzita míří od vnitřní plochy ke vnější, bude větší potenciál na vnitřní ploše. Rozdíl potenciálů $U_1 - U_2$ je podle definice potenciálu roven práci, kterou musíme dodat jednotkovému kladnému náboji, abychom jej přenesli ze druhé plochy na plochu první; pole vykonává práci opačného znaménka. Tedy

$$U_1 - U_2 = - \int_{a_2}^{a_1} E_r dr = \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right). \quad (10.67)$$

Dosazením do (10.65) dostáváme správný vzorec pro kapacitu kulového kondenzátoru

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}. \quad (10.68)$$

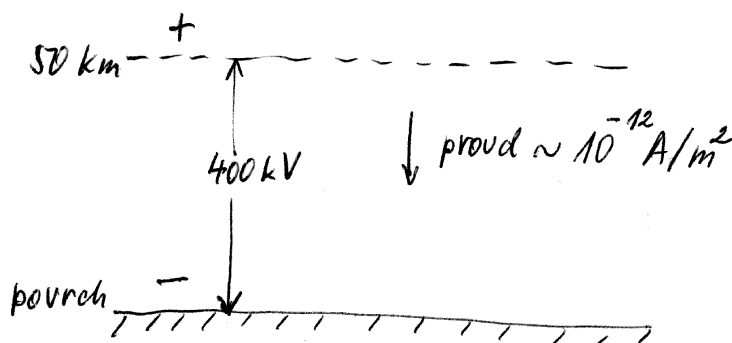
Tímto příkladem jsme se podrobněji zabývali proto, abychom ilustrovali, že ve všech problematických situacích je třeba dávat přednost výpočtům intenzity před nekritickým použitím vzorců pro Newtonův potenciál; vzorce pro intenzitu je třeba považovat za obecněji platné, než vzorce pro Newtonův potenciál.

7. Elektrické pole v atmosféře. Nad zemským povrchem existuje stálé vertikální elektrické pole, jehož intenzita míří směrem z atmosféry k zemskému povrchu (atmosféra nabitá kladně, zemský povrch záporně). V rovinatém terénu za jasného dne má intenzita velikost kolem 100 V/m; intenzita kolísá v průběhu dne přibližně o $\pm 15\%$, závisí též na znečištění ovzduší, vlhkosti aj. [Feynman et al., 1964]. Domníváme se, že „plochou“ nabitou kladně je vrstva atmosféry ve výškách kolem 50 km, která má již dostatečně vysokou elektrickou vodivost (obr. 18). S výškou intenzita pole klesá, ve výšce 50 km je už velice slabá. Celkový rozdíl potenciálu mezi touto výškou a zemským povrchem je téměř 400 kV. V důsledku malé, ale nenulové, vodivosti atmosféry teče z atmosféry do země proud, jehož celková intenzita je asi 1800 A. Jedná se tedy o složitější kondenzátor, než jaký jsme uvažovali v předchozím příkladu, mezi deskami kondenzátoru se zde nachází částečně vodivá látka. Určete:

- celkový elektrický výkon, celkový odpor a hustotu proudu;
- velikost záporného náboje Země;
- kapacitu příslušného kondenzátoru;
- přibližnou dobu, za kterou by se uvedený kondenzátor vybil, kdyby nebyl nějakým mechanismem stále dobíjen.

Odpovědi:

- 700 MW, 200 Ω , $3,5 \cdot 10^{-12}$ A/m²;
- Z (10.66) plyne $Q = 4,5 \cdot 10^5$ C;



Obrázek 18: Typické charakteristiky elektrických vlastností čisté atmosféry [Feynman et al., 1964].

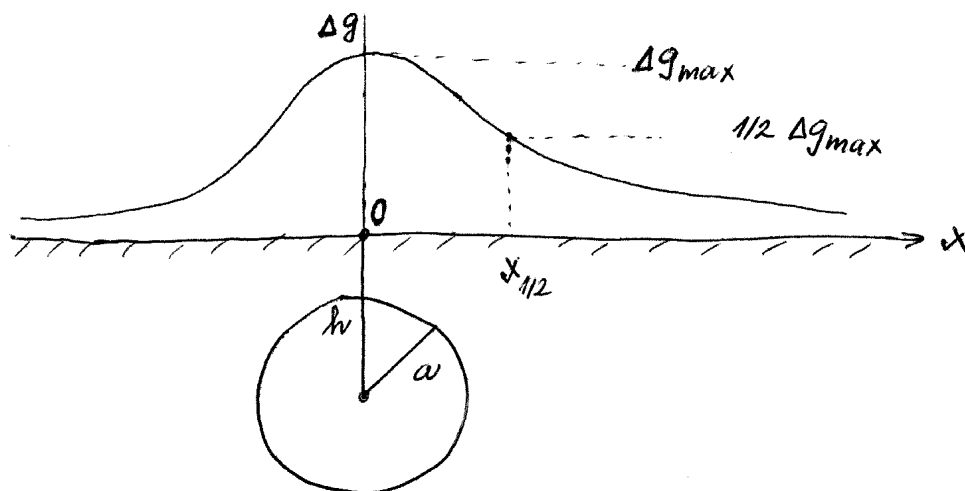
- (c) Z (10.65) plyne $C = 1 \text{ F}$ (vzorec (10.68) dává hodnotu o řád menší, ale tento vzorec není zde použitelný, protože pole klesá s výškou rychleji než udává vzorec (10.66));
- (d) Za čas $t = RC$, kde R je odpor a C kapacita, klesne náboj e -krát ($e \doteq 2,72$ je základ přirozených logaritmu). Vychází $t = 4$ minuty. Náboj by klesl na tisícinu původní hodnoty, tedy prakticky by vymizel, asi za půl hodiny. Tento kondenzátor musí být tedy neustále dobíjen. Předpokládá se, že toto dobíjení obstarávají bouřky, zejména v tropických oblastech; jeden blesk přináší na zemský povrch záporný náboj o velikosti asi $20 - 30 \text{ C}$, podrobný mechanismus však není znám [Feynman et al., 1964].

10.6 Přímá a obrácená gravimetrická úloha pro kouli

Úkolem gravimetrického průzkumu je výzkum rozložení hmot pod zemským povrchem na základě měření jejich gravitačních účinků na zemském povrchu. Pro gravimetrický výzkum jsou vhodná zejména taková geologická tělesa, která se svou hustotou výrazně liší od okolních hornin. Průměrná hustota hornin v povrchových částech zemské kůry činí asi $2,7 \text{ g/cm}^3$ (průměrná hustota žul). Větší hustoty mají např. hlubinné vyvřeliny a ložiska rud, naopak menší hustoty mají mnohé usazené horniny, ložiska kamenné soli, uhlí, nafty, zemního plynu aj.

Všimněme si zde otázky gravimetrického určení parametrů geologického tělesa ve tvaru koule, jejíž hustota se liší od hustoty okolí o konstantní hustotu $\Delta\rho$. Předpokládejme, že tato koule má střed v hloubce h pod zemským povrchem, její poloměr označme a (obr. 19). Předpokládejme, že zemský povrch, na kterém provádíme měření gravitačního pole, je rovinný. Nás nyní zajímá jen ta část gravitačního pole, která je působena rozdílovými (anomálními) hmotami; toto pole budeme nazývat gravitační anomálií. Protože se nejčastěji měří vertikální složka gravitačního pole, omezme se na vyšetřování anomálie jen pro tuto složku, tj. na anomálii zrychlení volného pádu g . Tuto anomálii budeme označovat Δg .

Poznamenejme, že při měřeních na rotující Zemi se ke gravitační síle přičítá ještě síla odstředivá. Výslednému poli, složenému z gravitačního pole a pole odstředivé síly, se říká



Obrázek 19

pole tíhové. Proto se v geofyzice mluví o tíhových měřeních a tíhových anomáliích. My si budeme dále všimnout jen gravitačního pole, protože gravitační a tíhové anomálie jsou stejné (pokud takzvané normální pole, od něhož odměřujeme anomálie, plně zahrnuje pole odstředivé síly).

Zavedme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby se její počátek 0 nacházel na zemském povrchu nad středem koule, osy x a y ležely na zemském povrchu a osa z byla orientována směrem dolů. Vzhledem k symetrii úlohy se omezíme jen na popis v rovině (x, z) , viz obr. 19. Naším úkolem je určit vertikální složku intenzity Δg gravitačního pole na zemském povrchu, které je působeno homogenní koulí o hustotě $\Delta \rho$, jejíž střed se nachází v hloubce h pod povrchem a jejíž poloměr je a . Zřejmě platí

$$\Delta g(x) = \frac{G M h}{r^2} \frac{1}{r},$$

kde M je hmotnost koule (rozdílová hmotnost) a $r = \sqrt{x^2 + h^2}$ je vzdálenost příslušného bodu na zemském povrchu od středu koule. Dosazením dostáváme hledaný vzorec

$$\Delta g(x) = \frac{G M h}{(x^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (10.69)$$

Průběh této funkce je znázorněn v horní části obr. 19 (pro kladnou rozdílovou hmotnost M).

Jsou-li dány parametry uvažované koule, umožňuje vzorec (10.69) počítat gravitační anomálii na zemském povrchu. Tomuto postupu, kdy pro daný model prostředí určujeme příslušné fyzikální pole, říkáme přímá úloha. Opačný postup, kdy z naměřeného fyzikálního pole se snažíme určit parametry modelu, nazýváme obrácenou úlohou. S obrácenými úlohami se setkáváme v mnoha fyzikálních oborech, ale velice typické jsou v geofyzice, kdy z měření různých fyzikálních veličin na zemském povrchu se snažíme určit stavbu prostředí pod povrchem.

Odvoďme vzorec pro obrácenou úlohu v našem případě. Z naměřené gravitační anomálie chceme určit polohu středu koule a její rozdílovou hmotnost M . Poloměr koule

nebo rozdílovou hustotu nelze určit pouze z gravimetrických měření, protože tyto veličiny nevystupují ve vzorci (10.69).

Určit bod na zemském povrchu, pod nímž se nachází střed koule, není obtížné. Je zřejmé, že tímto bodem je místo na zemském povrchu, kde gravitační anomálie nabývá největší hodnoty (zde jsme zvolili počátek souřadnicové soustavy). Zbývá určit hloubku h a hmotnost M . K určení těchto dvou neznámých v principu postačí určit nějaké dva nezávislé údaje z křivky gravitační anomálie, např. hodnoty $\Delta g(x)$ pro dvě různé hodnoty souřadnice x . Jinou možností, která se často používá, je určení největší hodnoty anomálie $\Delta g_{max} = \Delta g(0)$ a vzdálenosti $x_{1/2}$ podél zemského povrchu, v níž hodnota anomálie klesne na poloviční hodnotu. Ze vzorce (10.69) plyne

$$\begin{aligned}\Delta g_{max} &= \frac{G M}{h^2}, \\ \frac{1}{2} \Delta g_{max} &= \frac{G M h}{(x_{1/2}^2 + h^2)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{10.70}$$

Vydělíme-li levé a pravé strany těchto rovnic, po krátké úpravě dostaneme

$$h = \frac{x_{1/2}}{\sqrt{2^{2/3} - 1}} \doteq 1,305 x_{1/2}.\tag{10.71}$$

Dosadíme-li takto určenou hodnotu h do některé z rovnic (10.70), můžeme již snadno určit i rozdílovou hmotnost M .

Některé další vzorce na řešení obrácené úlohy pro kouli jsou uvedeny například v [Dehlinger, 1978, Mareš and kol., 1979, Pick et al., 1973], viz též následující úlohy.

Úlohy

1. Odvoďte vzorce na řešení obrácené gravimetrické úlohy pro kouli, které využívají hodnotu Δg_{max} a polohu inflexního bodu na křivce $\Delta g(x)$.

Řešení: Pro Δg_{max} použijeme první ze vzorců (10.70). V inflexním bodě x_i je druhá derivace $d^2g(x)/dx^2$ nulová, užitím (10.69) dostaneme

$$h = 2 x_i.\tag{10.72}$$

2. Jak klesne hodnota gravitační anomálie pro kouli ve vzdálenosti $x = h$ od bodu maximální anomálie, kde h je hloubka středu koule?

Odpověď:

$$\Delta g(h) = \Delta g_{max}/\sqrt{8} \doteq 0,35 \Delta g_{max}.$$

10.7 Obecné poznámky k obráceným úlohám v gravimetrii

Už jednoduchá obrácená úloha pro kouli ukázala na některé problémy, které se vyskytují při řešení obrácených gravimetrických úloh obecně. V první řadě je to principiální ne-

jednoznačnost řešení obrácených gravimetrických úloh (mohli jsme určit hmotnost koule, ale nikoliv její poloměr). K dalším problémům patří i sama otázka vydělení gravitační anomálie z měření v nerovném terénu a možnost složitého tvaru hledaných těles a jejich nehomogenita. K řešení složitých obrácených úloh se mohlo přistoupit až tehdy, když byly k dispozici počítače. Bylo třeba hledat nové teoretické přístupy, jejich výzkum není ve většině případů dosud zakončen. Teorie obrácených úloh, nejen gravimetrických, se tak v současné době stala předmětem velmi intenzivního studia, viz např. přehled v [Janovskaja and Porochova, 1983]. Bylo publikováno velké množství prací, přičemž však předkládané postupy se mezi sebou často velice liší. Čtenáři to pak může působit potíže, aby si udělal potřebný přehled a z navrhovaných postupů si vybral ty nejvhodnější. Cílem níže uvedených poznámek je pomoci v této situaci čtenáři, který má hlubší zájem o obrácené gravimetrické úlohy. Budeme si všímat obrácených úloh obecně, nikoliv jen speciálního problému hledání Newtonovy koule.

Ještě asi před dvěma desetiletími se při obecném řešení obrácené gravimetrické úlohy důsledně rozlišovaly dvě etapy: kvalitativní interpretace a kvantitativní interpretace. Pod kvalitativní interpretací se, zhruba řečeno, rozumělo vydělení typu rušícího tělesa, které by mohlo působit danou anomálii. Výběr tělesa se řídil zejména tvarem izochar na mapě gravitačních anomálií (protáhlým izocharám se přiřadilo protáhlé těleso atd.). Na správném výběru typu rušícího tělesa velice závisela správnost celé interpretace, důležitou roli v tomto stádiu řešení úlohy hrály zkušenosti interpretátora. V další etapě, kvantitativní interpretaci, se určovaly číselné parametry zvoleného tělesa (hloubka, hmotnost, sklon aj.). Současným potřebám již tento dvoustupňový postup nevyhovuje, zejména nevyhovuje příliš subjektivní první etapa. Podle názoru v [Strachov, 1982b] by současná metoda interpretace gravimetrických měření, opět při jisté schematizaci, měla obsahovat etapy tři: zjištění, lokalizaci a zpřesnění. Zjištěním rozumíme zjištění existence gravitační anomálie v měřených datech, což pak znamená i zjištění existence anomálního tělesa. Jedná se hlavně o ověření, zdali měřené rozdíly nejsou způsobeny jen nerovnostmi terénu či jinými hmotami, o jejichž existenci víme (výplň sedimentární pánve aj.). V této etapě se provádějí zejména různé redukce naměřených dat a konstrukce map příslušných anomálií. Lokalizací se rozumí hlavně identifikace počtu rušících těles (zdali pozorovaná anomálie je působena jedním či více tělesy) a určení některých obecných charakteristik těchto těles (kulovitost či protáhllost těles, přibližná poloha těžiště, celková hmotnost aj.). Tato etapa se realizuje pomocí různých transformací potenciálových polí, jako je analytické prodloužení pole pod povrch (singularity prodlouženého pole přibližně vymezují polohu rušících těles) nebo výpočet některých integrálních charakteristik rušících těles. Tato etapa interpretace by již měla poskytnout dosti dobrý počáteční model, který se v etapě zpřesnění dále vylepšuje.

Řešení výše uvedené obrácené úlohy pro kouli bylo sice mnohoznačné (nešlo určit poloměr), ale hloubku středu koule a hmotnost bylo možné určit jednoznačně. Vlastně se jednalo o jednoznačné určení parametrů ekvivalentního hmotného bodu, který vně koule vytváří stejné pole. S obdobnou situací se setkáváme i ve složitějších úlohách. Řešení obrácené úlohy tak můžeme z tohoto hlediska rozdělit na dva kroky, první jednoznačný a druhý mnohoznačný. V prvním kroku se určují takové ekvivalentní elementární zdroje (např. soustava hmotných bodů), které dávají stejné vnější pole a lze je určit jednoznačně. Ve druhém kroku se k těmto jednoznačně určeným „náhradním“ zdrojům hledají reálná

tělesa, tj. obecně tělesa třírozměrná, která dávají stejné vnější pole. K omezení mnohoznačnosti tohoto kroku se musí využít některých dodatečných informací, např. znalostí geologických, seismických aj. V tomto druhém kroku se hmoty soustředěné v bodových či jiných elementárních zdrojích „vymetají“ do prostoru tak, aby se vnější pole nezměnilo. Tento pojem „vymetání“ zavedl Poincaré, viz [Idel'son, 1936]. Otázkám vymetání bylo v geofyzikální literatuře věnováno v posledních letech velké množství prací. Takovéto postupy jsou jistě zajímavé z hlediska matematického [Kráľ et al., 1977], jejich oprávnění z hlediska praktického je do jisté míry odůvodněno tím, že se snažíme udělat řešení obrácené úlohy jednoznačným co nejdále, dokud to je jen možné.

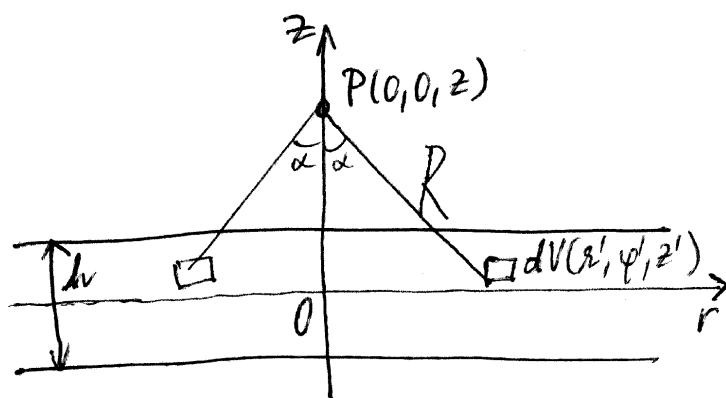
Z uvedených poznámek vzniká pravděpodobně dojem, že hlavním současným trendem v metodách řešení obrácených gravimetrických úloh je snaha o rozdělení úloh na celou řadu dílčích, často jen pomocných, operací. Je však třeba poznamenat, že existují i tendence právě opačné, snažící se o řešení obrácené úlohy vcelku (s uvážením různých dodatečných podmínek pro zajištění jednoznačnosti), bez jakéhokoliv členění do různých dílčích operací. Jedná se o současné hledání velkého počtu neznámých parametrů, což např. působí větší problémy se stabilitou řešení a zvyšuje i nároky na výpočetní čas a paměť počítače, ale na druhé straně odstraňuje mnohé nepodstatné a často nepřesné mezikroky. Podaří-li se rozvinout tyto metody tak, aby vyhovovaly všem požadavkům praxe, bude to znamenat, že mnohé i velmi důmyslné dílčí postupy, jako je např. analytické prodlužování nebo metoda vymetání, ztratí v budoucnosti mnoho ze svého současného významu. Z hlediska těchto postupů lze bez velkého přehánění říci, že např. intenzivní rozvíjení metod vymetání v poslední době představuje vývojovou etapu, která je již vlastně překonaná, aniž byla v geofyzice završena.

Kapitola 11

Gravitační a elektrostatické pole nekonečné rovinné homogenní desky

Většina látky probírané v této kapitole a v dalším dílu těchto skript nepředstavuje z matematického hlediska nic jiného, než příklady na výpočet různých vícerozměrných integrálů. Z tohoto hlediska může být tato látka též využita v matematických cvičeních. Jednotlivými příklady se přesto budeme zabývat podrobněji z toho důvodu, že nacházejí mnohé aplikace zejména v geofyzice a budou ilustrovat některé obecné vlastnosti potenciálových polí.

11.1 Nekonečná rovinná deska



Obrázek 20

Uvažujme nekonečnou rovinnou desku všude stejné tloušťky h s konstantní hustotou ρ [Novotný, 1977]. Zvolme válcovou soustavu souřadnic r, φ, z tak, aby osa z byla kolmá na desku a procházela bodem P , v němž počítáme gravitační pole, počátek 0 souřadnicové soustavy zvolme ve středu desky (obr. 20). Nechtě válcový element objemu dV má souřadnice r', φ', z' a nechtě R je jeho vzdálenost od bodu $P(0, 0, z)$. Platí

$$\begin{aligned} dV &= r' dr' d\varphi' dz', \\ R^2 &= r'^2 + (z - z')^2. \end{aligned} \tag{11.1}$$

Počítejme nejprve intenzitu gravitačního pole desky. Z geometrie úlohy je zřejmé, že intenzita $\vec{E}$ bude rovnoběžná s osou z . Ke každému elementu dV lze totiž nalézt stejný element symetricky vzhledem k ose z (obr. 20); výsledná intenzita od těchto dvou elementů má nenulovou jen z -ovou složku, složky rovnoběžné s deskou se vzájemně ruší. Z obecných vzorců (7.15) užitím (11.1) plyne pro intenzitu v bodě P nad deskou (souřadnice z větší než libovolná z') vzorec

$$\begin{aligned} E_z(P) &= -G \iiint_V \varrho \frac{z - z'}{R^3} dV = \\ &= -G \varrho \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(z - z') r' dr' d\varphi' dz'}{[r'^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \\ &= -2\pi G \varrho \int_{-h/2}^{h/2} \left[-\frac{z - z'}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} \right]_{r'=0}^{r'=\infty} dz' = \\ &= -2\pi G \varrho h. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Je zřejmé, že v bodech pod deskou změní E_z pouze znaménko. Pro velikost intenzity pole $|\vec{E}(P)| = |E_z(P)|$ v bodech mimo desku odtud dostáváme

$$|\vec{E}(P)| = 2\pi G \varrho h. \quad (11.3)$$

Tento vzorec udává přitažlivost nekonečné homogenní desky v bodech mimo desku. V gravimetrii je znám pod pojmem „Bouguerova redukce“ nebo „Bouguerův člen“. Používá se, vedle Fayeovy redukce i jiných redukcí, při přepočtech gravitačního zrychlení naměřeného v nadmořské výšce h na hladinu moře.

Všimněme si, že velikost intenzity je stejná ve všech bodech mimo desku, že je nezávislá na vzdálenosti od desky. V každém z poloprostorů, vydělených deskou, se tedy vytváří homogenní silové pole. (Pokuste se názorně vysvětlit, jak je možné, že v tomto případě intenzita neklesá, jestliže se vzdalujeme od desky.) Tento model je opět zajímavý z hlediska gravimetrického průzkumu. Necht se v zemi nachází vrstva zvýšené nebo snížené hustoty, rovnoběžná se zemským povrchem. Předpokládejme nyní, že je vrstva sice konečná, ale dostatečně rozlehlá v horizontálním směru. Z gravimetrických měření na zemském povrchu kdesi nad středem vrstvy, tj. daleko od okrajů vrstvy, můžeme určit jen součin tloušťky vrstvy a rozdílu hustot, nemůžeme však určit, jaké hloubce se vrstva nachází.

Protože výše uvedená nekonečná homogenní deska vytváří ve vnějších bodech homogenní pole, bude existovat potenciál, který bude lineární funkcí souřadnice z . Užitím (11.2) a symetrie úlohy vzhledem k rovině $z = 0$ dostáváme následující vzorec pro potenciál v bodech vně desky:

$$U(z) = 2\pi G \varrho h |z| + C \quad \text{pro } |z| \geq h/2. \quad (11.4)$$

Pro jednoduchost bychom mohli položit $C = 0$. Při konstrukci obr. 21 však použijeme ještě jinou volbu.

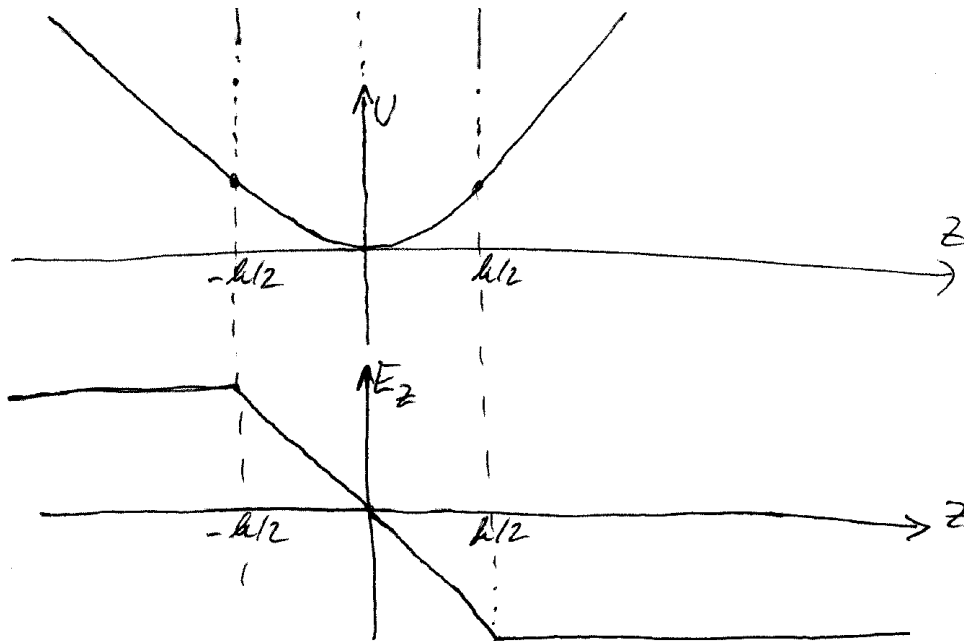
Intenzitu a potenciál uvnitř desky snadno dostaneme rozdělením desky na dvě části rovinou, která je rovnoběžná se stěnami desky a prochází uvažovaným bodem, a sečtením příslušných příspěvků. Vyjde

$$E_z(z) = -4\pi G \varrho z \quad \text{pro } |z| \leq h/2. \quad (11.5)$$

Pro potenciál uvnitř desky, až na aditivní konstantu, kterou položíme rovnou nule, zřejmě platí

$$U(z) = 2\pi G \rho z^2 \quad \text{pro } |z| \leq h/2. \quad (11.6)$$

Průběh potenciálu a intenzity je schematicky znázorněn na obr. 21, přičemž jsme konstantu C v (11.4) zvolili tak, aby potenciál byl spojitý. Lze snadno ověřit, že nalezený potenciál splňuje Laplaceovu rovnici vně desky a Poissonovu rovnici ve vnitřních bodech desky, viz (10.35), (10.36) a následující kapitolu. Tím je úloha vyřešena. Ve zbývajících částech tohoto paragrafu a v následujícím paragrafu pojednáme o možnosti či nemožnosti použití některých jiných postupů k řešení dané úlohy.



Obrázek 21: Průběh gravitačního potenciálu a intenzity pro nekonečnou desku ve směru kolmém k desce.

V uvažovaném případě lze provést výpočet intenzity pole velice jednoduše také užitím Gaussova zákona, viz (10.21). Stačí zkonstruovat válec, jehož plášť je rovnoběžný s osou z a podstavy jsou na tuto osu kolmé, přičemž jedna podstava prochází bodem P , druhá prochází bodem souměrným podle počátku. Na tvaru a velikosti podstavy nezáleží. K toku intenzity povrchem válce přispívá pouze tok podstavami, protože tok pláštěm je nulový. Další postup je snadný, odvoďte tímto způsobem vzorce (11.2) a (11.5). Výše uvedené složitější odvození, vycházející z obecných vzorců pro intenzitu (7.15), jsme zde dělali ze stejných důvodů, které byly uvedeny v paragrafu 10.1, tj. z důvodu ucelenosti teorie a proto, že vzorce pro intenzitu považujeme za základní.

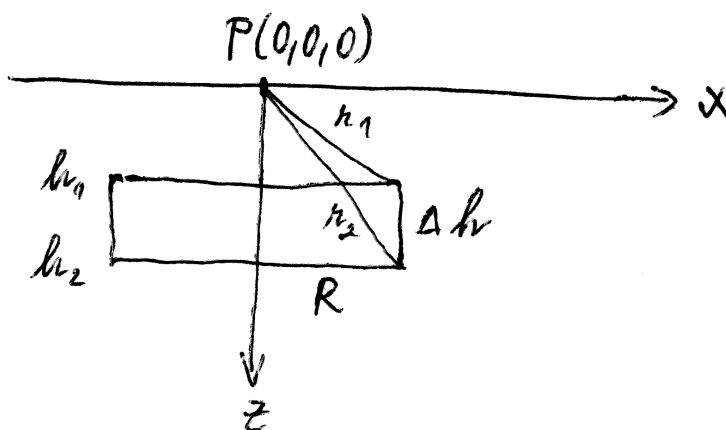
Úlohy

V úlohách 1 a 2 se má určit vertikální složka intenzity gravitačního pole působeného některými tělesy, která vzniknou „vyříznutím“ z nekonečné desky. Tato tělesa nacházejí četné aplikace v gravimetrii a gravimetrickém průzkumu, některé další příklady uvedeme níže. Použijme některá označení podle [Mareš and kol., 1979], viz připojené obrázky.

1. Kruhový válec se svislou osou (obr. 22). Necht válec má poloměr R a podstavy v hloubkách h_1 a h_2 . Dokažte, že na ose válce na zemském povrchu platí

$$E_z(0, 0, 0) = 2 \pi G \varrho (r_1 + \Delta h - r_2), \quad (11.7)$$

kde $\Delta h = h_2 - h_1$, $r_i = \sqrt{R^2 + h_i^2}$, $i = 1, 2$.



Obrázek 22

2. Sektor kruhového válce se svislou osou (obr. 23). Uvažujme těleso, které je ohraničené vodorovnými rovinami v hloubkách h_1 a h_2 , válcovými plochami s osou z o poloměrech R_1 a R_3 a dvěma rovinami proloženými osou z , které spolu svírají úhel α . Odvoďte vzorec

$$E_z(0, 0, 0) = G \varrho \alpha (r_1 - r_2 + r_3 - r_4),$$

kde číslování bodů udává obr. 23,

$$R_1 = R_2, R_3 = R_4, h_1 = h_4, h_2 = h_3,$$

$$r_i = \sqrt{R_i^2 + h_i^2}, \quad i = 1 \text{ až } 4.$$

Poznamenejme, že tělesa tohoto tvaru jsou často používána při praktických výpočtech tíhových redukcí, kdy celý integrační obor se rozdělí na takového segmenty.

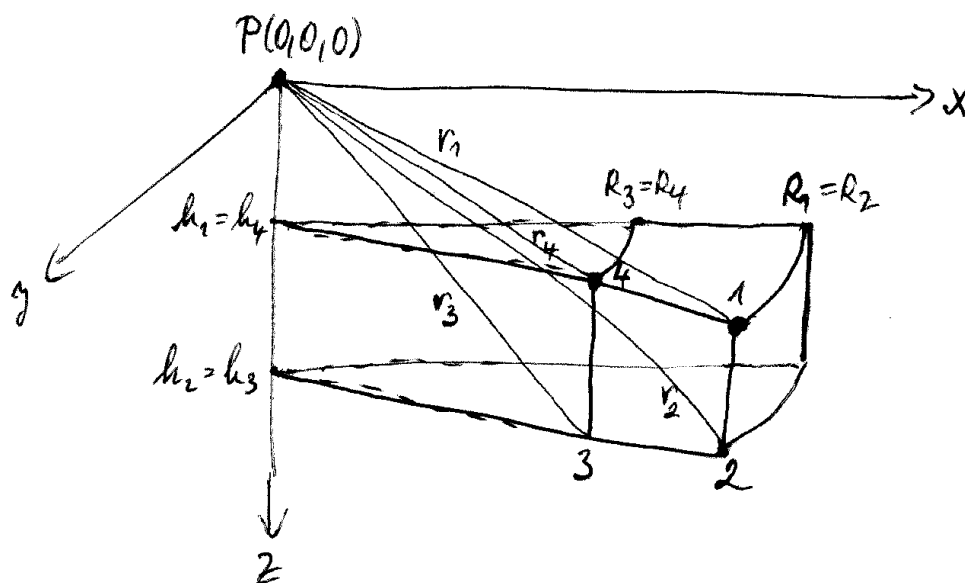
3. Odvoďte potenciál nekonečné homogenní desky užitím Laplaceovy a Poissonovy rovnice.

Řešení: Vzhledem k symetrii úlohy bude potenciál funkcí pouze jedné souřadnice z kolmé k desce, $U = U(z)$, viz obr. 20. Laplaceova rovnice, která platí v bodech mimo desku, bude mít v tomto případě jednoduchý tvar

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Integrací odtud plyne

$$\frac{\partial U}{\partial z} = C_1, \quad U = C_1 z + C_2.$$



Obrázek 23

Poissonova rovnice v bodech uvnitř desky nabývá obdobně tvaru

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi G \varrho.$$

Její obecné řešení má tvar

$$U = 2\pi G \varrho z^2 + C_3 z + C_4.$$

Položíme-li hladinu nulového potenciálu do roviny $z = 0$, dostaneme $C_4 = 0$. V důsledku symetrie úlohy podle roviny $z = 0$ musí být též $C_3 = 0$. Tím dostáváme vzorec (11.6) pro vnitřní potenciál. Uvažujme dále jen poloprostor $z > 0$. Konstanty C_1 a C_2 ve výrazu pro vnější potenciál určíme z požadavku, aby potenciál a jeho první derivace byly spojitě na hranici desky $z = h/2$. Vyjde

$$U = 2\pi G \varrho h (z - h/4) \quad \text{pro } z \geq h/2,$$

což souhlasí se vzorcem (11.4). Stojí ještě za povšimnutí, že Laplaceova a Poissonova rovnice samotné nepopisují studované pole plně, jejich řešení obsahují některé konstanty, které mohly být určeny až přijetím dodatečných předpokladů o spojitosti. Museli jsme odněkud jinud vědět či tušit, že těmi správnými dodatečnými (okrajovými) podmínkami je právě spojitost potenciálu a jeho první derivace. Na druhé straně vzorec pro intenzitu (7.15) vedly jednoznačně k řešení úlohy, příslušné spojitosti se nemusely předpokládat, ale naopak přímo z těchto vzorců vyplývaly.

11.2 O nemožnosti zavedení Newtonova potenciálu pro nekonečnou desku

Potenciál pro nekonečnou desku jsme v předešlém paragrafu odvodili přímo z nalezených jednoduchých výrazů pro intenzitu. Obdobně jako v případě Newtonovy koule bychom

měli ukázat, že stejné vzorce pro potenciál nekonečné desky dostaneme i z obecného vzorce pro Newtonův potenciál (8.10). Bohužel v tomto případě nic takového ukázat nelze! Bezprostřední výpočet Newtonova potenciálu pro uvažovanou desku vede totiž na divergentní integrál (integrál je v tomto případě v absolutní hodnotě nekonečně velký), jak hned odvodíme.

Hledejme nejprve Newtonův potenciál pro homogenní kruhový válec, jehož osou je osa z procházející uvažovaným bodem P . Výšku válce označme h , jeho poloměr r^* . Z tohoto válce dostaneme nekonečnou desku limitním přechodem pro $r^* \rightarrow \infty$. Pro potenciál na ose válce platí:

$$\begin{aligned} U(P) &= -G \iiint_V \frac{\varrho}{R} dV = -G \varrho \int_0^{r^*} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{r' dr' d\varphi' dz'}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} = \\ &= -2\pi G \varrho \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sqrt{r'^2 + (z - z')^2} \right]_{r'=0}^{r'=r^*} dz'. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Kdybychom mohli provést limitní přechod za znamením integrálu, je divergence posledního integrálu ihned zřejmá, neboť integrand roste do nekonečna pro $r^* \rightarrow \infty$. Postupujme však přesněji. Uvažujme pro jednoduchost jen body nad deskou, tj. $z > h/2$. Užitím vzorce pro neurčitý integrál (viz [Rektorys and spol., 1963] a příklady za tímto paragrafem)

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right] + C \quad (11.9)$$

lze potenciál na ose válce vyjádřit ve tvaru

$$U(P) = \pi G \varrho r^* [d \cdot u - (d + h)w + r^* \ln(w/u)], \quad (11.10)$$

kde $d = z - h/2$ je vzdálenost pozorovatele P od horní podstavy válce a

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{1 + \left(\frac{d}{r^*}\right)^2} - \frac{d}{r^*}, \\ w &= \sqrt{1 + \left(\frac{d+h}{r^*}\right)^2} - \frac{d+h}{r^*}. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Pro velká r^* dostáváme užitím příslušných Maclaurinových rozvojų vyjádření

$$U(P) = -2\pi G \varrho h r^* + 2\pi G \varrho h (d + h/2) + \frac{1}{r^*}(\dots). \quad (11.12)$$

Toto je Newtonův potenciál na ose kruhového válce, který má velký poloměr. Přechodem k nekonečné desce, tj. pro $r^* \rightarrow +\infty$, dostaneme $U(P) = -\infty$ v důsledku prvního členu na pravé straně.

Vidíme, že pokud je teorie gravitačního nebo elektrostatického pole založena na obecných vzorcích pro Newtonův potenciál, což je běžné ve většině učebnic, tato teorie ztroskotává v případě nekonečné desky. V učebnicích se o tomto selhání raději mlčí, protože jeho příčiny při zvoleném přístupu obvykle zůstávají zahaleny tajemstvím. Běžně se totiž

v příslušných výkladech vychází z obecných vzorců pro Newtonův potenciál. Jakmile se však přistoupí k nekonečné desce nebo jinému nekonečnému modelu (např. nekonečný válec nebo drát), započne se výklad výpočtem intenzity a teprve z ní se určí potenciál, jak jsme to dělali na začátku tohoto paragrafu. Případně se o potenciálu pro nekonečnou desku vůbec nemluví.

Z hlediska přístupu, který používáme v těchto skriptech, je výklad uvedeného selhání teorie Newtonova potenciálu velice snadný. Za základ totiž bereme popis pole pomocí intenzity. Pouze v případech, kdy lze zaměnit pořadí integrace a derivace (gradientu) v příslušných vzorcích, lze zavést popis pomocí Newtonova potenciálu. V případě nekonečné desky tedy zřejmě nejsou potřebné předpoklady pro záměnu splněny, protože Newtonův potenciál nelze zavést (blíže viz kap. 12). Potenciál, který se nám výše přesto podařilo nalézt, je tedy jiným typem potenciálu, nikoliv potenciálem Newtonovým.

Pokusme se vyjasnit, má-li nalezený potenciál pro nekonečnou desku (11.4) vůbec nějaký vztah k Newtonovým potenciálům. Všimněme si blíže vzorce (11.12) pro Newtonův potenciál kruhového válce o velkém poloměru. Poloha uvažovaného bodu P na ose válce je charakterizována vzdáleností d od horní podstavy, tedy $U(P) = U(d)$. První člen na pravé straně tohoto vzorce neobsahuje d , pro daný válec je to tedy konstanta, kterou vlastně nemusíme uvažovat. Potíž spočívá jen v tom, že při přechodu k nekonečné desce roste hodnota této konstanty nade všechny meze. Kdybychom však tuto konstantu neuvažovali a přešli k limitě pro $r^* \rightarrow \infty$, zůstane na pravé straně vzorce (11.12) jen druhý člen. Tento člen není ničím jiným, než vzorcem (11.4), který byl pro potenciál odvozen výše (pro bod nad deskou, tj. pro $z > h/2$). Zcela formálně, kdybychom nekonečno mohli rovnoprávně přiřadit k reálným číslům, mohli bychom výsledek formulovat následujícími slovy. Potenciály pro nekonečnou desku, odvozené v předchozím paragrafu, se od příslušných divergentních Newtonových potenciálů liší „jenom“ o jistou nekonečnou konstantu. To blíže vysvětluje i situaci, proč Newtonův potenciál existuje pro válec o konečné výšce h a o libovolně velkém, ale konečném, poloměru, a proč už neexistuje pro nekonečnou desku. Vysvětlení můžeme tedy formulovat tak, že Newtonův potenciál pro válec v sobě zahrnuje jistou konstantu úměrnou poloměru, která nevádí, pokud poloměr zůstává konečný, avšak znehodnocuje výsledek při přechodu k nekonečné desce.

Abychom dostali správný potenciál pro nekonečnou desku, stačilo by divergentní Newtonův potenciál „překalibrovat“, tj. odstranit z něj nekonečný člen. Takovéto kalibrační transformace, tj. vyškrtávání nepohodlných singulárních členů, jsou hojně používané v mnohých fyzikálních teoriích. Nicméně z matematického hlediska nemají takovéto transformace náležité oprávnění; v matematice zanedbáváme vždy jen členy nekonečně malé, nikoliv členy nekonečně velké.

Když už jsme se pustili v tomto paragrafu do „kritiky“ Newtonova potenciálu, pojďme ještě dále. Z předchozího rozboru by se mohlo zdát, že všechny problémy s Newtonovým potenciálem zmizí, pokud budeme uvažovat jenom omezená tělesa. Avšak ani to není docela pravda, máme-li na mysli výpočetní stránku problému. Vraťme se k výpočtu gravitačního pole na ose kruhového válce, který má konečné rozměry. Výpočet intenzity (příklad 1 v předcházejícím paragrafu 11.1, vzorec (11.7)) byl velice snadný, protože při integraci bylo možné všechny primitivní funkce vyjádřit pomocí odmocnin. Naproti tomu výpočet potenciálu vedl na podstatně složitější integrál (11.9). Tato situace, kdy výpočet potenciálu je podstatně složitější než výpočet intenzity, je velice častá, mnoho příkladů

bude uvedeno v následujícím dílu skript. Dospíváme tak k poněkud neočekávanému a paradoxnímu zjištění, že výpočet formálně jednoduchého integrálu (8.10) pro potenciál bývá obtížnější než výpočet složitěji vyhlížejících integrálů (7.15) pro intenzitu. Jednou z mála výjimek, které potvrzují toto pravidlo, je případ koule (kap. 10), kdy výpočet potenciálu byl jednodušší než výpočet intenzity.

Uvedené diskuze naznačují, že potenciál bychom měli spíše považovat za velice užitečnou matematickou pomůcku, než za pojem s příliš hlubokým fyzikálním významem. Měli bychom na něj pohlížet spíše jako na veličinu odvozenou, nesnažit se z něj vycházet při budování fyzikálních teorií, jak se o to úporně pokoušejí autoři mnohých učebnic ve snaze o maximální zjednodušení matematické stránky problému. Zjednodušování jakékoliv teorie je zajisté chvályhodné, ale nesmějí se překročit jisté meze. Výstižně tento problém vyjádřil A. Einstein slovy: „Make everything as simple as possible but not simpler“ (Udělej všechno tak jednoduché, jak jen je možné, ale ne jednodušší). Snaha, s níž se často setkáváme, o vybudování celé gravimetrie, elektrostatiky a magnetostatiky pouze na základě Newtonova potenciálu je tím překročením povolených mezí.

Úlohy

1. Odvoďte vzorec (11.9) pro neurčitý integrál

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx.$$

Řešení: Nejprve integrací per partes dostaneme [Smirnov, 1961]

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = x\sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx.$$

V posledním integrálu přičtíme a odečtíme v čitateli číslo a^2 . Předchozí rovnost pak nabývá tvaru

$$2 \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

K výpočtu posledního integrálu použijeme Eulerovu substituci

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t - x, \quad t = x + \sqrt{a^2 + x^2}. \quad (11.13)$$

Umocněním první rovnosti po úpravě dostaneme

$$x = \frac{t^2 - a^2}{2t}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + x^2} &= t - x = \frac{t^2 + a^2}{2t}, \\ dx &= \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt. \end{aligned}$$

Protože je $t = x + \sqrt{a^2 + x^2}$ kladné pro libovolné reálné x (pokud $a \neq 0$), pro poslední integrál dostáváme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) + C.$$

Platnost vzorce (11.9) je nyní již zřejmá.

2. Odvoďte vzorec (11.9) tím způsobem, že Eulerovu substituci provedete na samém začátku.
3. Odvoďte následující vzorce pro hyperbolické a hyperbolometrické funkce [Rektorys and spol., 1963]:

$$\begin{aligned} (\cosh x)' &= \sinh x, \\ (\sinh x)' &= \cosh x, \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \cosh^2 x + \sinh^2 x &= \cosh 2x, \\ \cosh^2 x &= \frac{1 + \cosh 2x}{2}, \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x, \\ \arg \sinh x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \\ \arg \cosh x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \geq 1). \end{aligned} \tag{11.14}$$

4. Odvoďte vzorec (11.9) užitím vzorců (11.14) z předchozího příkladu.

Návod: Použijte substituci $x = a \sinh t$.

11.3 Nekonečná rovinná vrstva a dvojvrstva

Uvažujme opět nekonečnou rovinnou homogenní desku, kterou jsme se zabývali v předešlých paragrafech (obr. 20). Zmenšujme nyní tloušťku desky h a současně zvětšujme hustotu tak, aby se součin těchto hodnot $\sigma = \rho h$ nezměnil (v tomto případě se hmota libovolné části desky při „stlačování“ zachovává). V limitě pro $h \rightarrow 0$ přechází deska v jednoduchou vrstvu s plošnou hustotou σ . Užitím (11.4) dostáváme potenciál této rovinné jednoduché vrstvy ve tvaru

$$U(z) = 2\pi G \sigma |z|, \quad -\infty < z < \infty. \tag{11.15}$$

Pro tuto speciální jednoduchou vrstvu odtud ihned plyne (viz též změny v obr. 21 při $h \rightarrow 0$):

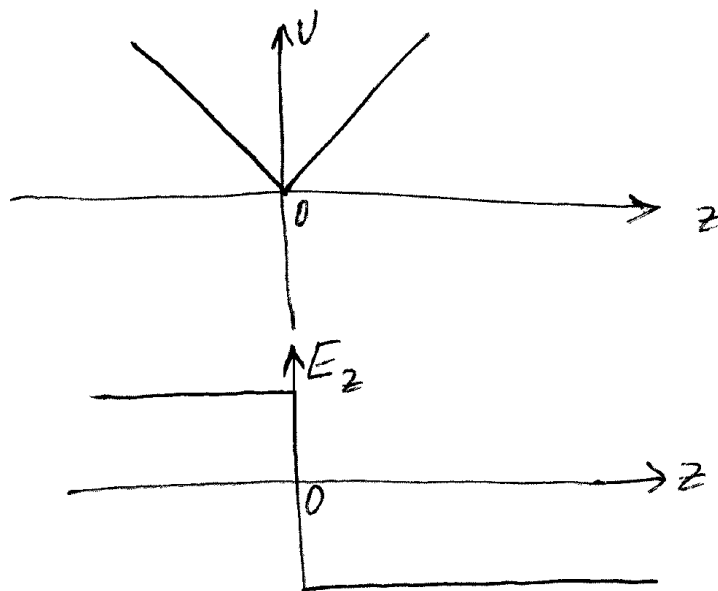
- a) Potenciál jednoduché vrstvy je všude spojitý.

- b) První derivace potenciálu ve směru normály k ploše je na této ploše nespojitá, tj. intenzita $\vec{E} = -\text{grad } U$ má na ploše nespojitou normálovou složku:

$$E_z(0+) - E_z(0-) = -4\pi G\sigma. \quad (11.16)$$

Zde je rozdíl od objemového potenciálu, který má první derivace všude spojitě.

V učebnicích se dokazuje, že vlastnosti a), b) jsou obecnými vlastnostmi potenciálu jednoduché vrstvy, platnými pro velmi obecné nerovinné plochy a pro proměnnou plošnou hustotu [Gjunter, 1953, Pick et al., 1973, Sretenskij, 1946, Tichonov and Samarskij, 1955], viz kap. 13. V předcházející kapitole jsme stejné vlastnosti zjistili u pole kulové slupky, vzorec (11.16) je shodný s (10.59). Průběh gravitačního potenciálu a intenzity v závislosti na souřadnici z je schematicky znázorněn na obr. 24.



Obrázek 24: Průběh gravitačního potenciálu a intenzity pro nekonečnou hmotnou rovinu ve směru kolmém k této rovině.

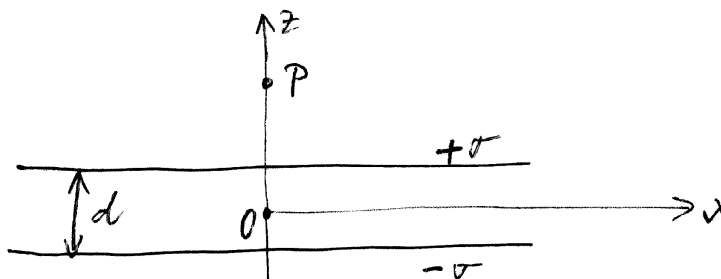
Pro případ elektricky nabitě roviny s plošnou hustotou náboje σ dostaneme zřejmě namísto (11.15) a (11.16) následující vzorce:

$$U(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z|, \quad -\infty < z < \infty, \quad (11.17)$$

$$E_z(0+) - E_z(0-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (11.18)$$

Uvažujme nyní dvě rovnoběžné roviny nabitě rovnoměrně se stejně velikými plošnými hustotami, ale opačného znaménka (obr. 25). Označme d vzdálenost desek, σ plošnou hustotu náboje na jedné z nich, $(-\sigma)$ na druhé. Osu z kartézské soustavy zvolme kolmo k rovinám, počátek zvolme uprostřed mezi rovinami. Potenciály pro jednotlivé roviny dostaneme jednoduchou úpravou vzorce (11.17). Pro výsledný potenciál dvojice opačně nabitých rovin dostáváme

$$U(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\left| z - \frac{d}{2} \right| - \left| z + \frac{d}{2} \right| \right].$$



Obrázek 25

Odtud plyne

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} & \text{pro } z \geq \frac{d}{2}, \\
 U(z) &= \frac{\sigma z}{\varepsilon_0} & \text{pro } |z| \leq \frac{d}{2}, \\
 U(z) &= -\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} & \text{pro } z \leq -\frac{d}{2}.
 \end{aligned} \tag{11.19}$$

Obdobně, jako jsme výše přešli od desky k jednoduché vrstvě, přejdeme nyní od dvojice jednoduchých vrstev ke dvojvrstvě. Zmenšujeme vzdálenost d mezi nabitými rovinami a současně zvětšujeme plošné hustoty tak, aby se součin těchto hodnot $\nu = \sigma d$ nezměnil. V limitě pro $d \rightarrow 0$ přechází soustava dvou rovin ve dvojvrstvou s plošnou hustotou elektrického dipólového momentu ν . Pro potenciál dvojvrstvy plyne z (11.19):

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \frac{\nu}{2\varepsilon_0} & \text{pro } z > 0, \\
 U(z) &= -\frac{\nu}{2\varepsilon_0} & \text{pro } z < 0.
 \end{aligned} \tag{11.20}$$

Vidíme, že při průchodu dvojvrstvou se mění nespojitě už sám potenciál:

$$U(0+) - U(0-) = \frac{\nu}{\varepsilon_0}. \tag{11.21}$$

Lze opět ukázat, že vzorec (11.21) platí mnohem obecněji, i pro nerovinné a nehomogenní dvojvrstvy.

Úloha

1. Kapacita deskového kondenzátoru. Uvažujme deskový kondenzátor, jehož každá deska má plochu S a vzdálenost mezi deskami je d . Předpokládejme, že rozměry desek jsou mnohem větší než jejich vzdálenost d (abychom při výpočtu mohli zanedbat efekty na okrajích kondenzátoru). Odvoďte vzorec pro kapacitu kondenzátoru, je-li mezi deskami

- a) vakuum;
- b) látka o permitivitě ε .

Řešení: Jsou-li rozměry desek mnohem větší než jejich vzdálenost, pak se náboj Q přenesený na neuzemněnou desku rozloží po této desce přibližně s konstantní plošnou hustotou σ , pro niž platí $Q = S\sigma$. Na uzemněné desce se indukuje náboj s plošnou hustotou $(-\sigma)$. Potenciály na deskách, je-li mezi nimi vakuum, udává první a třetí ze vzorců (11.19). Užitím vzorce $C = Q/(U_1 - U_2)$, viz (10.65), dostáváme pro kapacitu deskového kondenzátoru vzorec

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \quad (11.22)$$

Je-li mezi deskami kondenzátoru látka o permitivitě ε , dostáváme obdobně

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}. \quad (11.23)$$

11.4 Některá zobecnění, na něž ukazují řešené příklady

Dosud vyšetřované modely v předešlé a v této kapitole, vedle konkrétních aplikací, posloužily i k ilustraci některých obecných vlastností potenciálových polí. Tak vlastnosti objemového potenciálu jsme ilustrovali na případě Newtonovy koule a rovinné desky, vlastnosti potenciálu jednoduché vrstvy na kulové slupce a rovinné vrstvě, vlastnosti potenciálu dvojvrstvy na rovinné dvojvrstvě.

Ve všech vyšetřovaných případech jsme zjistili, že lze nalézt potenciál, který je omezený v celém prostoru (tj. vně i uvnitř zdrojů). Lze očekávat, že zjištěná omezenost je obecnou vlastností objemového potenciálu a potenciálů jednoduché vrstvy a dvojvrstvy. Obecnými důkazy se budeme zabývat v kap. 12 a 13.

Kromě toho lze z jednoduchých vyšetřovaných modelů například usoudit, že by pro spojitost potenciálu a jeho derivací měly obecně platit vlastnosti, uvedené přehledně v tab. 1. Z této tabulky je vidět, jak se zhoršuje spojitost pole na hranici tělesa při přechodu od objemových zdrojů k jednoduché vrstvě a dále ke dvojvrstvě. Tvzení o nespojitostech jsme dokázali tím, že jsme našli konkrétní příklady, kdy k takovým nespojitostem dochází. Zbývá tedy provést obecné důkazy spojitosti pro veličiny uvedené v tab. 1, viz kap. 12 a 13.

Tabulka 1: Chování potenciálu U a jeho prvních a druhých derivací ve směru normály při přechodu z vnějšího prostoru do míst, kde se nacházejí zdroje pole.

	U	$\partial U / \partial n$	$\partial^2 U / \partial n^2$
Objemové zdroje	spojité	spojité	nespojité
Jednoduchá vrstva	spojité	nespojité	
Dvojvrstva	nespojité		

Literatura

- [Allen, 1973] Allen, C. W. (1973). *Astrophysical Quantities*. University of London, The Athlone Press (ruský překlad: Mir, Moskva 1977).
- [Bondi, 1967] Bondi, H. (1967). *Assumption and Myth in Physical Theory*. Cambridge University Press, Cambridge (ruský překlad: Mir, Moskva 1972).
- [Brož, 1974] Brož, J. (1974). *Elektrina a magnetismus I*. SPN, Praha.
- [Brož et al., 1980] Brož, J., Roskovec, V., and Valouch, M. (1980). *Fyzikální a matematické tabulky*. SNTL, Praha.
- [Chen, 1974] Chen, M. (1974). *Physics Problems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (ruský překlad: Mir, Moskva 1978).
- [Dehlinger, 1978] Dehlinger, P. (1978). *Marine Gravity (ruský překlad: Nedra, Moskva 1982)*. Elsevier, Amsterdam.
- [Dubošin, 1961] Dubošin, G. N. (1961). *Teoriya pritjaženija*. GIFML, Moskva.
- [Dubošin, 1975] Dubošin, G. N. (1975). *Nebesnaja mechanika (Osnovnyje zadači i metody)*. Nauka, Moskva.
- [Feynman et al., 1964] Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (1964). *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2*. Addison-Wesley Publ. Company, Reading (ruský překlad: T. 5, Mir, Moskva 1966)).
- [Gehrels, 1976] Gehrels, T., editor (1976). *Jupiter*. The University of Arizona Press, Tucson, Arizona (ruský překlad: Mir, Moskva 1978).
- [Gjunter, 1953] Gjunter, N. M. (1953). *Teoriya potenciala i jeje primenenie k osnovnym zadáčam matematičeskoj fiziki*. GITTL, Moskva.
- [Goguel, 1976] Goguel, J. (1976). *Geothermics*. McGraw-Hill, New York.
- [Halmos, 1980] Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7):519–524.
- [Halmos, 1982] Halmos, P. R. (1982). Jádru matematiky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, XXVII(5):273–281.

- [Horedt, 1980] Horedt, G. P. (1980). Gravitational heating of planets. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 21(1):22–30.
- [Idel'son, 1936] Idel'son, N. (1936). *Teorija potencijala s priloženijami k teoriji figury Zemli i geofizike*. ONTI, Leningrad.
- [Jacobs, 1975] Jacobs, J. A. (1975). *The Earth's Core*. Academic Press, London (ruský překlad: Mir, Moskva 1979).
- [Janovskaja and Porochova, 1983] Janovskaja, T. B. and Porochova, L. N. (1983). *Ob-ratnyje zadači geofiziki*. Izd. Leningradskogo universiteta, Leningrad.
- [Janovskij, 1964] Janovskij, B. M. (1964). *Zemnoj magnetizm I*. Izd. Leningradskogo universiteta, Leningrad.
- [Jarník, 1955] Jarník, V. (1955). *Integrální počet II*. NČSAV, Praha.
- [Jarník, 1956] Jarník, V. (1956). *Diferenciální počet II*. NČSAV, Praha.
- [Jeffreys and Swirles, 1966] Jeffreys, H. and Swirles, B. (1966). *Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge (ruský překlad: Mir, Moskva, 1969).
- [Kellogg, 1967] Kellogg, O. D. (1967). *Foundations of Potential Theory*, volume 31. Springer-Verlag Berlin (prvně vydáno 1929).
- [Kittel et al., 1965] Kittel, C., Knight, W. D., and Ruderman, M. A. (1965). *Mechanics; Berkeley Physics Course*, volume 1. McGraw Hill (ruský překlad: Nauka, Moskva 1971).
- [Košljakov et al., 1970] Košljakov, N. S., Gliner, E. B., and Smirnov, M. M. (1970). *Urav-nenija v častnyh proizvodnyh matematičeskoj fiziki*. Vyššaja škola, Moskva.
- [Král, 1965] Král, J. (1965). *Teorie potenciálu I*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
- [Král et al., 1972] Král, J., Netuka, I., and Veselý, J. (1972). *Teorie potenciálu II*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
- [Král et al., 1976] Král, J., Netuka, I., and Veselý, J. (1976). *Teorie potenciálu III*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
- [Král et al., 1977] Král, J., Netuka, I., and Veselý, J. (1977). *Teorie potenciálu IV*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
- [Kvasnica, 1985] Kvasnica, J. (1985). *Teorie elektromagnetického pole*. Academia, Praha.
- [Mareš and kol., 1979] Mareš, S. and kol. (1979). *Úvod do užité geofyziky*. SNTL, Praha.
- [Maxwell, 1881] Maxwell, J. C. (1881). *A Treatise on Electricity and Magnetism, Vol. I*. Clarendon Press, Oxford.
- [Neumann, 1887] Neumann, F. E. (1887). *Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen*. B. G. Teubner, Leipzig.

- [Novotný, 1977] Novotný, O. (1977). *Teorie potenciálu. Skriptum postgraduálního kursu „Zpracování geofyzikálních dat a číslicová seismika“*. MFF KU, Praha.
- [Pick et al., 1973] Pick, M., Pícha, J., and Vyskočil, V. (1973). *Úvod ke studiu tíhového pole Země*. Academia, Praha.
- [Poincaré, 1899] Poincaré, H. (1899). *Théorie du potentiel Newtonien: leçons professées à la Sorbonne pendant le 1. sem. 1894-1895*. G. Carré et C. Naud, Paris.
- [Purcell, 1965] Purcell, E. M. (1965). *Electricity and Magnetism*, volume 2 (Berkeley Physics Course). McGraw-Hill (ruský překlad: Nauka, Moskva, 1971).
- [Rektorys and spol., 1963] Rektorys, K. and spol. (1963). *Přehled užití matematiky*. SNTL, Praha.
- [Schwartz, 1972] Schwartz, L. (1972). *Matematické metody ve fyzice*. SNTL, Praha.
- [Sedlák and Bakule, 1980] Sedlák, B. and Bakule, R. (1980). *Elektrina a magnetismus (skripta)*. SPN, Praha.
- [Silk, 1980] Silk, J. (1980). *The Big Bang*. W. H. Freeman and Company, San Francisco (ruský překlad: Mir, Moskva 1982).
- [Smirnov, 1974] Smirnov, M. M. (1974). *Differencial'nyje uravnenija*. Izd. BGU, Minsk.
- [Smirnov, 1961] Smirnov, V. I. (1961). *Kurs vyšší matematiky, Tom I*. GIFML, Moskva.
- [Sretenskij, 1946] Sretenskij, L. N. (1946). *Teorija n'jutonovskogo potenciala*. OGIz - Gostechizdat, Moskva.
- [Stachanov, 1979] Stachanov, I. P. (1979). *Fizičeskaja priroda šarovoj molnii*. Atomizdat, Moskva.
- [Strachov, 1982a] Strachov, V. N. (1982a). O prepodavanii gravi- i magnitorazvedki v vyšších učebných zavedenijach. *ser. Fyzika Zemli*, 2:52–66.
- [Strachov, 1982b] Strachov, V. N. (1982b). O „Kurse gravirazvedki“ V. S. Mironova. *Geofiz. ž.*, 3:86–96.
- [Stratton, 1961] Stratton, J. A. (1961). *Teorie elektromagnetického pole*. SNTL, Praha.
- [Tichonov and Samarskij, 1955] Tichonov, A. N. and Samarskij, A. A. (1955). *Rovnice matematické fyziky*. NČSAV, Praha.
- [Trkal, 1956] Trkal, V. (1956). *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*. NČSAV, Praha.
- [Vladimirov, 1979] Vladimirov, V. S. (1979). *Generalized Functions in Mathematical Physics*. Mir (originál Obobščennyje funkciony v matematičeskoj fizike, Nauka, Moskva, 1979).
- [Votruba and Muzikář, 1955] Votruba, V. and Muzikář, Č. (1955). *Theorie elektromagnetického pole*. NČSAV, Praha.

- [Wermer, 1974] Wermer, J. (1974). *Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin (ruský překlad: Mir, Moskva, 1980).
- [Whittaker and Watson, 1927] Whittaker, E. T. and Watson, G. N. (1927). *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge (ruský překlad: GIFML, Moskva 1963).