



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Timotej Kačur

Vliv povrchové teploty na termální konvekci v nitru ledových měsíců

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: FP

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 ods. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Vliv povrchové teploty na termální konvekci v nitru ledových měsíců

Autor: Timotej Kačur

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: Cílem práce bylo poskytnout prvotní odhad vlivu variabilní povrchové teploty na tvar zkoumaného tělesa. Z důvodu snahy o ověření koncepce zkoumaných efektů byl použit model značně zjednodušen. Výsledky byly získány numerickým řešením pomocí vytvořeného počítačového programu. Dosažené výsledky naznačují korelaci mezi variací povrchové teploty a topografií tělesa. Pro bližší vysvětlení pozorovaných jevů je zapotřebí použití detailnějšího modelu.

Klíčová slova: rovnice vedení tepla, topografie, teplotní rozložení, spektrální metoda, kondukce, numerické modelování

Title: Effect of surface temperature on thermal convection in the icy moon interiors

Author: Timotej Kačur

Department: Department of Geophysics

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: The aim of our thesis was to provide an initial estimate of the influence of variable surface temperature on the shape of the studied planetary object. Due to our effort to create a proof of concept of the investigated effects, the used model was considerably simplified. The results were obtained by numerical solution using a created computer program. The obtained results indicate a correlation between the variation of the surface temperature and the topography of the object. For a more detailed explanation of the observed phenomena, it is necessary to use a more detailed model.

Keywords: heat equation, topography, temperature distribution, spectral method, conduction, numerical modeling

Obsah

Úvod	2
1 Konduktivný prenos tepla v guľovom telese	3
1.1 Rovnice a okrajové podmienky	3
2 Riešenie problému spektrálnou metódou	6
2.1 Spektrálny rozklad rovníc	6
2.2 Aplikácia metódy konečných diferencií	8
2.3 Numerické riešenie	10
2.4 Odhad topografie telies	11
2.4.1 Odhad topografie pomocou Prattovej izostázy	11
2.4.2 Odhad topografie pre elastické teleso	11
2.4.3 Odhad topografie pre viskózne teleso	12
2.5 Rýchlosť fázovej zmeny	12
3 Výsledky	14
3.1 Teplotná variácia vnútri telesa	14
3.2 Topografická odozva na povrchové zmeny teploty	14
3.3 Rýchlosť fázovej zmeny	18
4 Diskusia	19
Záver	22
Zoznam použitej literatúry	23
A Prílohy	24
A.1 Kód programu pre numerické riešenie rovnice vedenia tepla v telese typu Ceres	24

Úvod

Množstvo telies v slnečnej sústave má rotačnú os kolmú na rovinu obehu okolo Slnka. Absorpcia slnečných lúčov je pre tieto telesá omnoho menšia v polárnych oblastiach než v oblasti rovníku. Dôsledkom je variácia teploty na povrchu pozdĺž zemepisnej šírky, ktorá sa medzi rovníkom a pólmi môže líšiť o desiatky až stovky kelvinov. Povrchová teplota telesa predstavuje hraničnú podmienku pre rovnicu vedenia tepla, preto bude chladnutie daného telesa závisieť na zemepisnej šírke.

Vo väčšine štúdií zaoberajúcich sa termálnym vývojom planetárnych telies sa variácia teploty na povrchu telesa neberie v úvahu, pri modelovaní rovnice prenosu tepla sa väčšinou uvažuje konštantná povrchová teplota. Tento predpoklad však nemusí byť splnený, čo naznačuje topografia trpasličej planéty Ceres, ktorá pre stupeň spektrálneho rozkladu $j = 2$ vykazuje zmenu topografie medzi rovníkom a pólmi v hodnote až približne 2 km.

V tejto práci budeme na jednoduchom modeli konduktívneho prenosu tepla študovať významnosť vplyvu povrchovej teploty a premietnutie tohto vplyvu na tvar skúmaného telesa. Zaoberať sa budeme dvoma typmi telies - plným ľadovým guľovým telesom a ľadovou guľovou vrstvou s rôznymi hrúbkami. Jedná sa o základný odhad efektov variabilnej povrchovej teploty na topografiu telesa, preto použijeme model, ktorý je zjednodušený a ktorý predstavuje len prvý krok k ďalšiemu pochopeniu skúmaných efektov.

Štruktúra práce bude pozostávať z rôznych kapitol. Najprv predložíme skúmané rovnice, vysvetlíme použité zjednodušenia a predpoklady modelu a predstavíme tvar hraničných podmienok. Pomocou spektrálneho rozkladu následne odvodíme spektrálny tvar riešených rovníc a hraničných podmienok, ktoré metódou konečných diferencií upravíme do tvaru vhodného pre riešenie numerickými metódami. Numerické riešenie vykonáme nami vytvoreným počítačovým programom. Ďalej priblížime použité metódy pre výpočet topografických zmien a rýchlosti fázových zmien z dát získaných numerickými riešeniami. Nakoniec predstavíme dosiahnuté výsledky a ich zhodu s očakávaním a pozorovaním reálnych telies.

1. Konduktívny prenos tepla v guľovom telese

Teplo sa vnútri telesa prenáša z bodu A do bodu B vplyvom rozdielných teplôt v daných bodoch. Prenos tepla je uskutočnený pozdĺž teplotného gradientu z teplejších častí telesa do chladnejších. Medzi hlavné metódy prenosu tepla v materiáli patrí konduktívny prenos tepla a konvektívny prenos tepla. Konduktívny prenos tepla je uskutočnený kmitaním a nárazmi molekúl, jedná sa teda o prenos tepla cez makroskopicky stacionárny materiál. Konvektívny prenos tepla je uskutočnený prúdmi materiálu vnútri telesa. Schopnosť materiálu konduktívne prenášať teplo vyjadruje vodivosť k , ktorá má špecifickú hodnotu pre každý druh materiálu.

1.1 Rovnice a okrajové podmienky

Vývoj teploty T vnútri telesa s hustotou ρ , tepelnou kapacitou c_p a vodivosťou k môžeme určiť vyriešením rovnice vedenia tepla v tvare

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T - \rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T + Q, \quad (1.1)$$

kde t je čas, $\vec{v}$ je rýchlosť materiálu a Q je teplo produkované tepelnými zdrojmi v telese. Predpokladáme, že konvektívny člen je v našom prípade zanedbateľný voči konduktívnemu členu, pre náš model preto platí

$$|\rho c_p \vec{v} \cdot \nabla T| \ll |\nabla \cdot k \nabla T|. \quad (1.2)$$

Ďalej predpokladáme, že teleso sa nachádza v kvazistacionárnom stave, budeme preto uvažovať platnosť vzťahu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (1.3)$$

Implementovaním prepokladov 1.2 a 1.3 má rovnica vedenia tepla 1.1 tvar

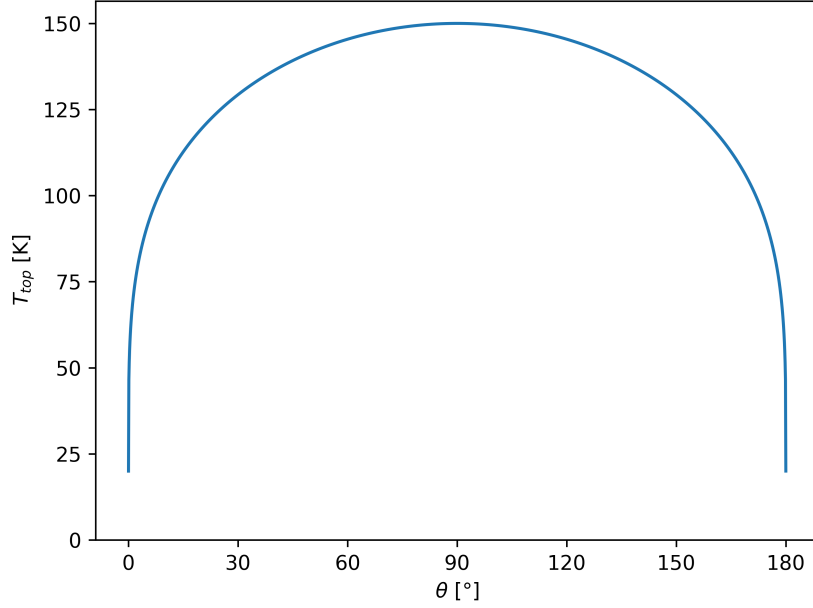
$$\nabla \cdot k \nabla T = -Q. \quad (1.4)$$

Rovnicu 1.4 môžeme zavedením pomocnej premennej $\vec{q}$, ktorá má význam tepelného toku, prepísať na sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \vec{q} &= -k \nabla T \\ \nabla \cdot \vec{q} &= Q. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sústavu rovníc 1.5 riešime vnútri dvoch rôznych telies guľového tvaru, tvorených prevažne ľadom. Budeme preto pracovať so sférickým súradnicovým systémom, teplotu budeme riešiť v tvare $T = T(r, \theta, \phi)$.

Prvým skúmaným objektom je plné guľové ľadové teleso s polomerom $R_{top} = 476$ km (zodpovedá napríklad trpasličej planéte Ceres). Uvažujeme teleso tvorené výhradne ľadom, čo je oproti realite len zjednodušenie. Druhým skúmaným objektom je ľadová vrstva guľového telesa (zodpovedá napríklad mesiacu Jupitera



Obr. 1.1: Závislosť predpísanej hraničnej podmienky teploty na kolaterálnom uhle θ (Hayne a Aharonson, 2015).

nazývanom Europa). Táto ľadová vrstva má polomer vnútornej hranice R_{bot} a polomer vonkajšej hranice $R_{top} = 1560$ km, čo je rovné polomeru celého guľového telesa.

Pre oba skúmané objekty predpisujeme hraničnú podmienku ako teplotu na povrchu $T|_{r=R_{top}} = T_{top}$, kde T_{top} má tvar (Hayne a Aharonson, 2015)

$$T_{top}(\theta) = (130 \sin^{\frac{1}{4}} \theta + 20) \text{ K} . \quad (1.6)$$

Pre plné ľadové teleso budeme v ďalšej kapitole navyše predpisovať podmienku pre teplotu v strede telesa, dôvodom však bude použitie spektrálnej metódy. Pre ľadovú vrstvu ešte okrem podmienky 1.6 uvažujeme ohrievanie vnútornej hranice vrstvy oceánom vnútri telesa. Pre tento prípad preto predpisujeme aj hraničnú podmienku $T|_{r=R_{bot}} = T_{bot}$ v tvare

$$T_{bot} = 270 \text{ K} , \quad (1.7)$$

čo je teplota mrznutia vody.

Tepelné zdroje Q uvažujeme len v prípade plného guľového telesa, kedy pracujeme s konštantnou hodnotou (Hayne a Aharonson, 2015)

$$Q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-3} . \quad (1.8)$$

V prípade ľadovej vrstvy neuvažujeme žiadne tepelné zdroje, teda $Q = 0$. Predpokladáme však, že vnútornú hranicu ľadovej vrstvy ohrieva oceán vnútri telesa. Vodivosť k predpokladáme v tvare (Petrenko a Whitworth, 1999)

$$k = \frac{k_0}{T} , \quad (1.9)$$

kde $k_0 = 651 \text{ W m}^{-1}$. Vodivosť v tvare 1.9 odpovedá vodivosti ladu, čo je pre prípad planéty Ceres len zjednodušenie. Zároveň môžeme pre vodivosť 1.9 prepísať sústavu rovníc 1.5 do tvaru

$$\begin{aligned}\vec{q} &= -k_0 \nabla \tilde{T} \\ \nabla \cdot \vec{q} &= Q,\end{aligned}\tag{1.10}$$

kde $\tilde{T} = \ln T$.

2. Riešenie problému spektrálnou metódou

Spektrálne metódy sú metódy pre riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré nemajú jednoduché analytické riešenie. Princíp týchto metód spočíva v priestorovej diskretizácii a rozvoji hľadaných funkcií do vhodných báзовých funkcií.

2.1 Spektrálny rozklad rovníc

Sústavu rovníc 1.10 zjednodušíme rozkladom hľadaných veličín do báзовých funkcií. V našom prípade je prirodzené ako báзовé funkcie použiť sférické harmonické funkcie $Y_{jm}(\theta, \phi)$, resp. vektorové sférické harmonické funkcie $\vec{Y}_{jm}(\theta, \phi)$, ktoré sú definované predpisom (Golle a kol., 2012)

$$Y_{jm}(\theta, \phi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2j+1)(j-m)!}{4\pi(j+m)!}} P_{jm}(\cos \theta) e^{ij\phi} & m \geq 0 \\ (-1)^m Y_{j|m|}^*(\theta, \phi) & m < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\vec{Y}_{jm}^k(\theta, \phi) = \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{\nu=-k}^k C_{k\nu 1\mu}^{jm} Y_{k\nu}(\theta, \phi) \vec{e}_\mu, \quad (2.2)$$

kde $P_{jm}(\cos \theta)$ sú pridružené Legendreove funkcie, $C_{k\nu 1\mu}^{jm}$ sú Clebsch-Gordanove koeficienty, $\vec{e}_\mu$ je vektor komplexnej cyklickej bázy, ϕ je uhol zemepisnej dĺžky braný v intervale $[0^\circ, 360^\circ]$ a θ je uhol zemepisnej šírky braný v intervale $[0^\circ, 180^\circ]$.

Hľadané veličiny $\vec{q}$ a $\tilde{T}$ teda rozložíme do tvaru

$$\vec{q}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \sum_{l=|j-1|}^{j+1} q_{jm}^l(r) \vec{Y}_{jm}^l(\theta, \phi) \quad (2.3)$$

$$\tilde{T}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \tilde{T}_{jm}(r) Y_{jm}(\theta, \phi). \quad (2.4)$$

Následne si stačí uvedomiť, že úloha nezávisí na uhle ϕ , preto bude rád m sférických harmonických funkcií nulový. Zároveň je naša úloha symetrická voči rovníku telesa, preto jediné nenulové príspevky sumy budú pre párnú hodnotu stupňa j sférických harmonických funkcií. Rozklad hľadaných veličín tak má tvar

$$\vec{q}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} \sum_{l=|j-1|}^{j+1} q_{j0}^l(r) \vec{Y}_{j0}^l(\theta) \quad (2.5)$$

$$\tilde{T}(r, \theta, \phi) = \sum_{j=0,2,4,\dots}^{\infty} \tilde{T}_{j0}(r) Y_{j0}(\theta). \quad (2.6)$$

Dosadením rozkladov 2.5 a 2.6 do sústavy rovníc 1.10 dostávame sústavu rovníc v tvare

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=|j-1|}^{j+1} q_{j0}^l(r) \vec{Y}_{j0}^l(\theta) &= -k_0 \nabla \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{T}_{j0}(r) Y_{j0}(\theta) \right) \\ \nabla \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=|j-1|}^{j+1} q_{j0}^l(r) \vec{Y}_{j0}^l(\theta) \right) &= Q. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Keďže sumy sú v rovniciach 2.7 z dôvodu rozkladu do zvolených báзовých funkcií, môžeme predpokladať, že konvergujú rovnomerne a môžeme tak zameniť sumy a derivácie. Použijeme vzorce pre gradient, resp. divergenciu súčinu radiálnej a uhlovej funkcie (Golle a kol., 2012), v našom prípade budú mať tvar

$$\begin{aligned}\nabla(\tilde{T}_{j0}(r)Y_{j0}(\theta)) &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\tilde{T}_{j0}(r)Y_{j0}^{j-1}(\theta) \\ &\quad - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\tilde{T}_{j0}(r)Y_{j0}^{j+1}(\theta)\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\sum_{l=|j-1|}^{j+1} q_{j0}^l(r)\vec{Y}_{j0}^l(\theta) \right) &= \left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)q_{j0}^{j-1}(r) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)q_{j0}^{j+1}(r) \right) Y_{j0}(\theta).\end{aligned}\quad (2.9)$$

Vzťahy 2.8 a 2.9 dosadíme do sústavy rovníc 2.7, celkovo tak získame sústavu rovníc v tvare

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=|j-1|}^{j+1} q_{j0}^l(r)\vec{Y}_{j0}^l(\theta) &= -k_0 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\tilde{T}_{j0}(r)Y_{j0}^{j-1}(\theta) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\tilde{T}_{j0}(r)Y_{j0}^{j+1}(\theta) \right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)q_{j0}^{j-1}(r) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)q_{j0}^{j+1}(r) \right) Y_{j0}(\theta) = Q. \quad (2.11)$$

Sférické harmonické funkcie tvoria úplný systém v skúmanom priestore, preto pre každý stupeň j dostaneme trojicu rovníc

$$q_{j0}^{j-1}(r) = -k_0 \sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+1}{r}\right)\tilde{T}_{j0}(r) \quad (2.12)$$

$$q_{j0}^{j+1}(r) = k_0 \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j}{r}\right)\tilde{T}_{j0}(r) \quad (2.13)$$

$$\sqrt{\frac{j}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r}\right)q_{j0}^{j-1}(r) - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r}\right)q_{j0}^{j+1}(r) = Q_{j0}\delta_{j0}. \quad (2.14)$$

Požadované okrajové podmienky pre plné ladové teleso vyjadrujú rovnice

$$\tilde{T}_{j0}(R_{top}) = \ln(T_{top})_{j0} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} q_{j0}^{j+1}(0) = 0 & j = 0 \\ \tilde{T}_{j0}(0) = 0 & j > 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

kde podmienka 2.15 je ekvivalentná podmienke 1.6, podmienka 2.16 pre $j = 0$ zabezpečuje diferencovateľnosť funkcie $T(r)$ a pre $j > 0$ zabezpečuje korektnosť používania sférických harmonických funkcií.

Pre ľadovú vrstvu sú požadované okrajové podmienky v tvare

$$\tilde{T}_{j0}(R_{top}) = \ln(T_{top})_{j0} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \tilde{T}_{j0}(R_{bot}) = \ln(T_{bot})_{j0} & j = 0 \\ \tilde{T}_{j0}(R_{bot}) = 0 & j > 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

kde podmienka 2.17 je ekvivalentná podmienke 1.6, podmienka 2.18 pre $j = 0$ je ekvivalentná podmienke 1.7 a pre $j > 0$ zabezpečuje korektnosť používania sférických harmonických funkcií.

Riešením rovníc 2.12, 2.13 a 2.14 s okrajovými podmienkami 2.15 a 2.16, resp. 2.17 a 2.18 sú príslušné koeficienty $\tilde{T}_{j0}(r)$ spektrálneho rozkladu $\tilde{T}(r)$. Dosadením týchto hodnôt do rozkladu 2.6 získame funkciu $\tilde{T}(r, \theta)$, ktorú môžeme previesť na rozloženie teploty T pomocou vzťahu

$$T(r, \theta) = e^{\tilde{T}(r, \theta)}. \quad (2.19)$$

Sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc 2.12, 2.13 a 2.14 pre koeficienty $q_{j0}^{j-1}(r)$, $q_{j0}^{j+1}(r)$ a $\tilde{T}_{j0}(r)$ riešime metódou konečných diferencií.

2.2 Aplikácia metódy konečných diferencií

Metóda konečných diferencií je metóda aproximácie riešenia diferenciálnych rovníc, ktoré nemajú analytické riešenie. Princíp tejto metódy spočíva v diskretizácii hľadaných funkcií na zvolenej sieti, vďaka čomu sa môže problém diferenciálnych rovníc zjednodušiť na sústavu jednoduchšie riešiteľných rovníc. Zvyčajne je túto sústavu rovníc potrebné riešiť numerickými metódami.

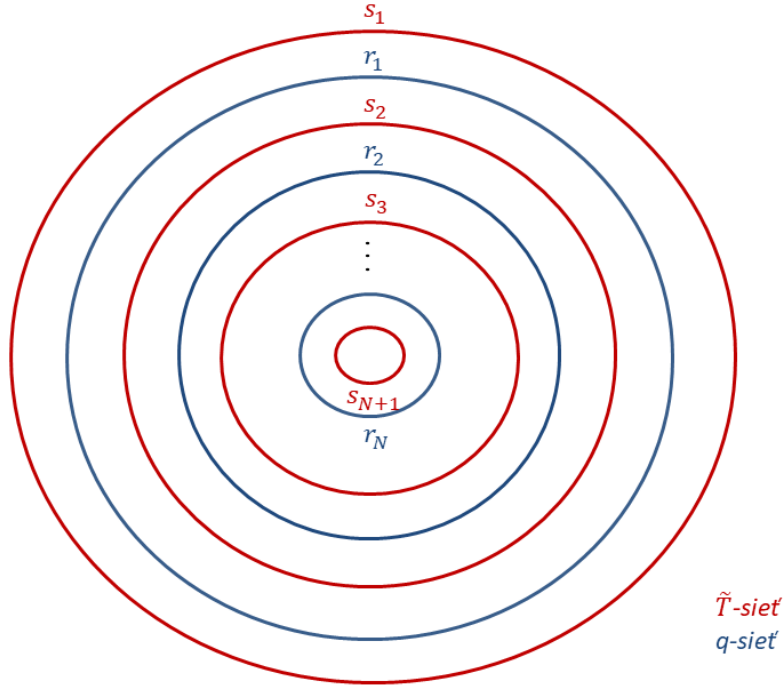
V našom prípade spočíva aplikácia metódy konečných diferencií v diskretizácii neznámych funkcií na vhodne zvolenej množine. Koeficienty tepelného toku q^{j-1} , q^{j+1} a vodivosť k diskretizujeme na sieti (množine) sfér, pričom prvá sféra odpovedá sfére s polomerom skúmaného telesa R_{top} a posledná sféra odpovedá sfére s minimálnym, nami zvoleným polomerom. Túto sieť budeme nazývať *q-sieť*. Jemnosť siete určujeme pomocou počtu sfér N v danej sieti, resp. pomocou vzdialenosti susedných sfér Δr . Množinu polomerov sfér *q-siete* označíme $\{r_i\}_{i=1}^N$. Veličinu $\tilde{T}$ diskretizujeme na odlišnej sieti (množine) sfér, kde sa každá sféra nachádza vo vzdialenosti rovnej práve $\frac{\Delta r}{2}$ od najbližšej sféry v *q-sieti*. Túto sieť budeme nazývať *$\tilde{T}$ -sieť*. *$\tilde{T}$ -sieť* vznikne posunutím každej sféry v *q-sieti* o vzdialenosť $\frac{\Delta r}{2}$ smerom od stredu telesa. Množinu polomerov sfér *$\tilde{T}$ -siete* označíme $\{s_i\}_{i=1}^{N+1}$. Obidve siete sfér sú znázornené na obrázku 2.1.

Vďaka diskretizácii môžeme pre ľubovoľnú diskretizovanú funkciu $f(r)$ aproximovať jej deriváciu v bode $(r_i + \frac{\Delta r}{2})$ ako

$$f'\left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right) = \frac{f(r_i) + f(r_{i+1})}{\Delta r}. \quad (2.20)$$

Takýmto spôsobom si vyjadríme derivácie hľadaných funkcií v rovniciach 2.12, 2.13 a 2.14 a dostaneme rovnice

$$q_{j0}^{j-1}(r_i) = -k_0 \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{\tilde{T}_{j0}(s_i) - \tilde{T}_{j0}(s_{i+1})}{\Delta r} + \frac{j+1}{r_i} \frac{\tilde{T}_{j0}(s_i) + \tilde{T}_{j0}(s_{i+1})}{2} \right) \quad (2.21)$$



Obr. 2.1: Načrtnuté znázornenie T -siete a q -siete použitých pri aplikácii metódy konečných diferencií. Označenie daných sfér vyjadruje ich polomer.

$$q_{j0}^{j+1}(r_i) = k_0 \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{\tilde{T}_{j0}(s_i) - \tilde{T}_{j0}(s_{i+1})}{\Delta r} - \frac{j}{r_i} \frac{\tilde{T}_{j0}(s_i) + \tilde{T}_{j0}(s_{i+1})}{2} \right) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{q_{j0}^{j-1}(r_i) - q_{j0}^{j-1}(r_{i+1})}{\Delta r} - \frac{j-1}{r_i} \frac{q_{j0}^{j-1}(r_i) + q_{j0}^{j-1}(r_{i+1})}{2} \right) - \\ & - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \left(\frac{q_{j0}^{j+1}(r_i) - q_{j0}^{j+1}(r_{i+1})}{\Delta r} + \frac{j+2}{r_i} \frac{q_{j0}^{j+1}(r_i) + q_{j0}^{j+1}(r_{i+1})}{2} \right) = Q_{j0} \delta_{j0}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Okrajové podmienky 2.15 a 2.16 taktiež vyjadríme pomocou diskretných hodnôt premenných, čím dostaneme rovnice

$$\frac{\tilde{T}_{j0}(s_1) + \tilde{T}_{j0}(s_2)}{2} = \ln(T_{top})_{j0} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} q_{j0}^{j+1}(r_N) = 0 & j = 0 \\ \tilde{T}_{j0}(s_N) + \tilde{T}_{j0}(s_{N+1}) = 0 & j > 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Okrajové podmienky 2.17 a 2.18 opäť vyjadríme pomocou diskretných hodnôt premenných, čím dostaneme rovnice

$$\frac{\tilde{T}_{j0}(s_1) + \tilde{T}_{j0}(s_2)}{2} = \ln(T_{top})_{j0} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} \frac{\tilde{T}_{j0}(s_N) + \tilde{T}_{j0}(s_{N+1})}{2} = \ln(T_{bot})_{j0} & j = 0 \\ \tilde{T}_{j0}(s_N) + \tilde{T}_{j0}(s_{N+1}) = 0 & j > 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

2.3 Numerické riešenie

Rovnice 2.21, 2.22 a 2.23 s okrajovými podmienkami 2.24 a 2.25, resp. 2.26 a 2.27 predstavujú sústavu $3N + 1$ lineárnych rovníc pre každú hodnotu j . Túto sústavu prepíšeme do maticového tvaru $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}$, pričom použijeme označenie konštánt

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sqrt{\frac{j}{2j+1}} & a_{31} &= a_{11} \\ a_{12} &= (j+1)\sqrt{\frac{j}{2j+1}} & a_{32} &= (j-1)\sqrt{\frac{j}{2j+1}} \\ a_{21} &= \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} & a_{33} &= a_{21} \\ a_{22} &= j\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} & a_{34} &= (j+2)\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Jednotlivé členy sústavy rovníc $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}$ majú tvar

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{a_{11}}{\Delta r} + k\frac{a_{12}}{2r_i} & 1 & 0 & -\frac{a_{11}}{\Delta r} + k\frac{a_{12}}{2r_i} & 0 & \dots \\ -\frac{a_{21}}{\Delta r} + k\frac{a_{22}}{2r_i} & 0 & 1 & \frac{a_{21}}{\Delta r} + k\frac{a_{22}}{2r_i} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{a_{31}}{\Delta r} - \frac{a_{32}}{2s_i} & -\frac{a_{33}}{\Delta r} - \frac{a_{34}}{2s_i} & 0 & -\frac{a_{31}}{\Delta r} - \frac{a_{32}}{2s_i} & \frac{a_{33}}{\Delta r} - \frac{a_{34}}{2s_i} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} T_{j0}(s_1) \\ q_{j0}^{j-1}(r_1) \\ q_{j0}^{j+1}(r_1) \\ T_{j0}(s_2) \\ q_{j0}^{j-1}(r_2) \\ q_{j0}^{j+1}(r_2) \\ \vdots \\ T_{j0}(s_N) \\ q_{j0}(r_N) \\ T_{j0}(s_{N+1}) \end{pmatrix} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} (T_{top})_{j0} \\ 0 \\ 0 \\ Q_{j0}\delta_{j0} \\ 0 \\ 0 \\ Q_{j0}\delta_{j0} \\ \vdots \\ Q_{j0}\delta_{j0} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Sústavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}$ riešime numericky vytvorením programu pomocou programovacieho jazyka Python, do kódu najprv implemetujeme objekty $\mathbb{A}$, $\vec{x}$ a $\vec{y}$. Keďže matica $\mathbb{A}$ je pásová a riedka, sústavu $\mathbb{A}\vec{x} = \vec{y}$ riešime LU rozkladom pomocou knižnice Scipy. Výstupom programu je rozloženie teploty v danom telese, presnosť tohto rozloženia určujeme pomocou jemnosti danej teplotnej siete, tj. počtu sfér vnútri telesa, na ktorých vyhodnocujeme teplotu. V našom prípade určujeme teplotu na 100 rovnomerne rozložených ekvidistantných sférach vnútri telesa, teda $N = 101$.

2.4 Odhad topografie telies

Jedným z cieľov tejto práce je odhadnutie topografie telesa generovanej teplotnými zmenami. Jedná sa o pomerne náročný problém, keďže topografická odozva závisí na reologických vlastnostiach daného telesa. V tejto kapitole vykonáme tri typy odhadov - odhad pomocou Prattovej izostázy, odhad pre elastické teleso a odhad pre viskózne teleso.

Na rozdiel od predchádzajúceho textu, kde premenná t označovala čas, vyhradzujeme v tejto kapitole označenie t pre topografiu telesa.

2.4.1 Odhad topografie pomocou Prattovej izostázy

Prattova izostáza predpokladá, že tlaková sila generovaná topografiou na povrchu telesa je kompenzovaná vztlakovou silou hustotných anomálií vnútri telesa.

Rovnováhu vztlakovej sily, ktorá pôsobí v radiálnom smere $\vec{e}_r$, a tlakovej sily topografie, ktorá pôsobí v smere $-\vec{e}_r$, vyjadríme vzťahom

$$\int_{R_{bot}}^{R_{top}} \rho g(r) \alpha (T(r, \theta) - \bar{T}(r)) r^2 dr = t \rho g(R_{top}) R_{top}^2, \quad (2.31)$$

kde $g(r)$ značí strednú hodnotu gravitačného zrýchlenia vo vzdialenosti r od stredu telesa, α značí koeficient teplotnej rozťažnosti telesa (Tabuľka 2.1) a $\bar{T}$ značí strednú hodnotu teploty. V rôznych literatúrach sa taktiež stretávame s variantou vzťahu 2.31 bez členov r^2 a R_{top}^2 , čo namiesto silovej rovnováhy vyjadruje tlakovú rovnováhu.

Odhad topografických zmien telesa, založený na Prattovej izostáze, je silno zjednodušený, keďže nezahŕňa žiadne reologické vlastnosti materiálu.

2.4.2 Odhad topografie pre elastické teleso

Pre elastické teleso uvažujeme limitný prípad, kde predpokladáme veľkú viskozitu materiálu, zanedbávame tak jeho viskózne tečenie. Odozvu telesa na objemové a hustotné zmeny aproximujeme elastickou deformáciou.

Za účelom odhadu deformácie definujeme variáciu teploty vzťahom

$$\Delta T = T(r, \theta) - \bar{T}(r). \quad (2.32)$$

Tenzor napätia $\mathbf{t}$ rozložíme na izotropnú a deviatorickú časť. Následným zahrnutím objemových zmien v dôsledku teplotných variácií dostaneme sústavu rovníc (Devaux a kol., 2000)

$$\mathbf{t}^D = \mu \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} \right) \quad (2.33)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{p}{K} + \alpha \Delta T, \quad (2.34)$$

kde K je modul stlačiteľnosti (Tabuľka 2.1), μ je modul torzie (Tabuľka 2.1), $\vec{u}$ je posunutie a p je tlak. K sústave rovníc 2.33 a 2.34 pridáme rovnicu rovnováhy v tvare

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \vec{f} = 0, \quad (2.35)$$

kde $\vec{f}$ vyjadruje vztlakové sily v dôsledku deformácií a teplotných zmien telesa. Na povrchu (vonkajšej hranici) telesa predpisujeme podmienku v tvare (Souček a kol., 2019)

$$\mathbf{t}(R_{top}, \theta) \cdot \vec{e}_r = -u_r(R_{top}, \theta)g(R_{top})\rho\vec{e}_r. \quad (2.36)$$

Pre ľadovú vrstvu predpisujeme podmienku aj na vnútornej hranici telesa vzťahom

$$-\mathbf{t}(R_{bot}, \theta) \cdot \vec{e}_r = -u_r(R_{bot}, \theta)g(R_{bot})(\rho_w - \rho)\vec{e}_r + V(R_{bot}, \theta)\rho_w\vec{e}_r, \quad (2.37)$$

kde ρ_w je hustota vody nachádzajúca sa pod ľadovou vrstvou a V sú variácie gravitačného potenciálu v dôsledku deformácie telesa. Pri oboch podmienkach 2.36 a 2.37 predpokladáme, že môžeme gravitačné zrýchlenie aproximovať jeho strednou hodnotou.

Výpočet elastických deformácií sme nevykonávali, použili sme už vypočítané odozvoové funkcie poskytnuté školiteľom (Ricard a kol., 1984).

2.4.3 Odhad topografie pre viskózne teleso

V tomto prípade ako materiál predpokladáme nestlačiteľnú newtonovskú homogénnu kvapalinu. Tenzor napätia $\mathbf{t}$ vyjadrujeme v tvare

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T), \quad (2.38)$$

kde η je viskozita materiálu. Pre jednoduchosť predpokladáme rovnicu kontinuity v tvare

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.39)$$

K rovniciam 2.38 a 2.39 predpisujeme rovnicu rovnováhy zhodnú s rovnicou 2.35. Na povrchu (vonkajšej hranici) telesa predpisujeme podmienku v tvare

$$\mathbf{t}(R_{top}, \theta) \cdot \vec{e}_r = -t(R_{top}, \theta)g(R_{top})\rho\vec{e}_r. \quad (2.40)$$

Pre ľadovú vrstvu predpisujeme podmienku na vnútornej hranici v tvare

$$-\mathbf{t}(R_{bot}, \theta) \cdot \vec{e}_r = -t(R_{bot}, \theta)g(R_{bot})(\rho_w - \rho)\vec{e}_r + V(R_{bot}, \theta)\rho_w\vec{e}_r. \quad (2.41)$$

Pre odhad topografie použijeme dva modely - model s konštantnou viskozitou $\eta = \eta_0$ a model s viskozitou $\eta(T) = \eta_0 f(T)$ závislou exponenciálne na teplote, pričom $\eta(T)$ sa naprieč telesom mení o 5 rádov. Riešenie sústavy rovníc 2.38 a 2.39 nezávisí na amplitúde viskozity η_0 , závisí len na zmenách viskozity.

Výpočet deformácií sme, podobne ako pre elastické teleso, nevykonávali. Opäť sme použili už vypočítané odozvoové funkcie poskytnuté školiteľom.

2.5 Rýchlosť fázovej zmeny

Vypočítaná teplota nám v prípade ľadovej vrstvy umožňuje odhadnúť rýchlosť fázovej zmeny na vnútornej hranici telesa. Odhad fázovej zmeny počítame pomocou vzťahu

$$\Delta q_r = L\rho v, \quad (2.42)$$

kde Δq_r je radiálna zložka variácie tepelného toku, L je latentné teplo ľadu (Tabuľka 2.1) a v je rýchlosť fázovej zmeny.

názov parametru	označenie	hodnota
Koeficient teplotnej rozťažnosti	α	$1,6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
Modul stlačiteľnosti	K	8,8 GPa
Modul torzie	μ	3,3 GPa
Latentné teplo ľadu	L	334 J g^{-1}
Hustota vody	ρ_w	1000 kg m^{-3}
Hustota ľadu	ρ	920 kg m^{-3}
Gravitačné zrýchlenie (Ceres)	$g_{Ceres}(R_{top})$	$0,268 \text{ m s}^{-2}$
Gravitačné zrýchlenie (Europa)	$g_{Europa}(R_{top})$	$1,315 \text{ m s}^{-2}$
Polomer (Ceres)	R_{top}^{Ceres}	476 km
Polomer vonkajšej hranice (Europa)	R_{top}^{Europa}	1560 km

Tabuľka 2.1: Označenie a hodnoty použitých parametrov

3. Výsledky

V tejto kapitole, venovanej výsledkom našej práce, zavádzame označenie *teleso typu Ceres* pre plné ľadové guľové teleso a označenie *teleso typu Europa* pre guľovú ľadovú vrstvu.

3.1 Teplotná variácia vnútri telesa

Pre prípad telesa typu Ceres je teplotné rozloženie znázornené na obrázku 3.1. Najväčší teplotný rozdiel v smere zemepisnej šírky pozorujeme medzi uhlom $\theta = 90^\circ$ a uhlom $\theta = 0^\circ$, resp. $\theta = 180^\circ$ (Obr 3.1 (a)). Z obrázku 3.1 (a) vidíme, že smerom k stredu telesa sa teplota na pólach a teplota na rovníku približujú k rovnakej hodnote dosiahnutej práve v strede telesa, pričom na povrchu telesa sa teploty líšia o približne 82 K. Rozdiel medzi spomenutými teplotami je väčší než 50 K pre polomer telesa $r > 402$ km a väčší než 25 K pre polomer $r > 241$ km. Zároveň si môžeme všimnúť, že závislosť $T(r)$ je približne lineárna pre polomer v rozmedzí od 150 km do 450 km. Lineárnou regresiou by sme zistili, že v danom rozmedzí polomeru sa závislosť $T(r)$ dá aproximovať priamkami

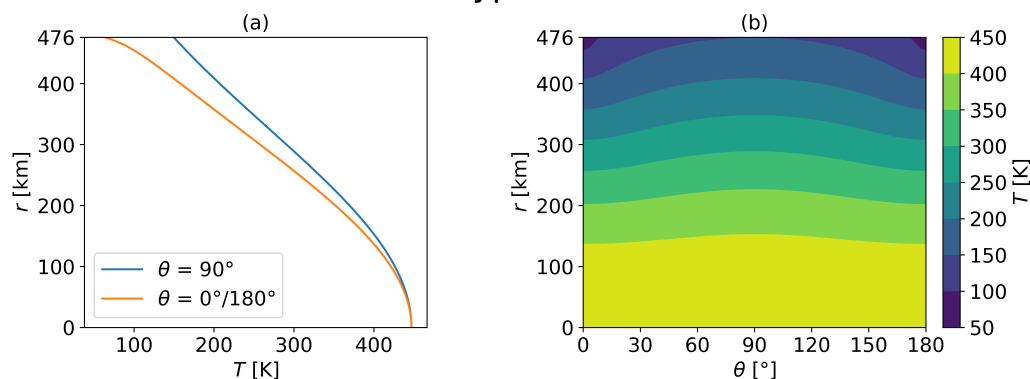
$$\begin{aligned} T(r)|_{\theta=0^\circ} &= -1,0r + 546,1 \text{ K} \\ T(r)|_{\theta=90^\circ} &= -0,8r + 530,5 \text{ K} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Pre prípad telesa typu Europa je teplotné rozloženie znázornené na obrázku 3.2. Rozloženie teploty sme vypočítali pre teleso typu Europa s hrúbkami vrstvy 5 km, 10 km a 30 km. Znázorňujeme len prípad pre hrúbku rovnú 10 km, pretože tvar závislostí rozloženia teploty je pre všetky prípady takmer identický. Podobne ako v prípade telesa typu Ceres je najväčší rozdiel teploty v smere zemepisnej šírky medzi rovníkom a pólom a smerom do stredu telesa sa teploty približujú k rovnakej hodnote dosiahnutej v strede telesa (Obr. 3.2 (a)). Na povrchu telesa je rozdiel teplôt medzi pólom a rovníkom približne 87 K, pričom tento rozdiel je väčší než 75 K pre polomer $r > 1556$ km a väčší než 50 K pre $r > 1553$ km. Oproti konkávnej závislosti $T(r)$ v prípade telesa typu Ceres pozorujeme pre teleso typu Europa konvexnú závislosť $T(r)$.

3.2 Topografická odozva na povrchové zmeny teploty

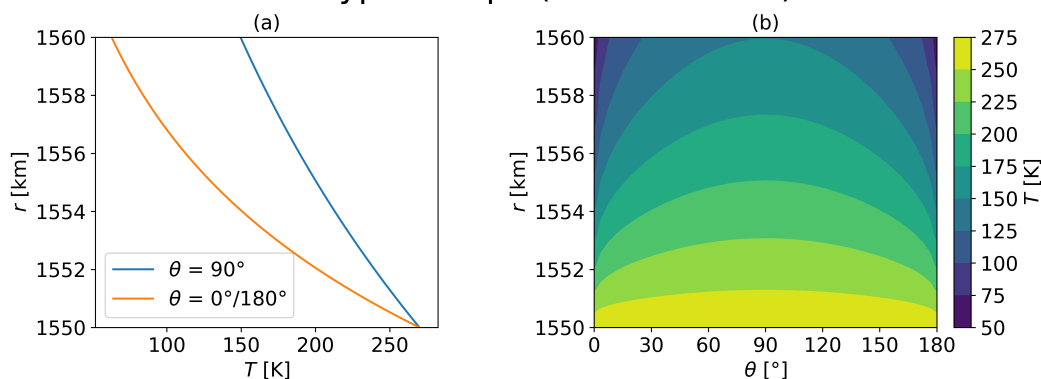
Topografie telesa typu Ceres sú znázornené na obrázku 3.3. Z obrázku môžeme vidieť, že najväčšie topografické zmeny generuje aproximácia skúmaného telesa elastickým telesom. Naopak, najmenšie topografické zmeny telesa generuje aproximácia viskóznym telesom. Taktiež si môžeme všimnúť, že vo všetkých prípadoch je topografia telesa na pólach záporná, dochádza tak k priblíženiu pólů k stredu telesa. Smerom k rovníku telesa sa topografia blíži k nule, následne nabera kladné hodnoty. Maximálnu hodnotu nadobúda topografia na rovníku telesa, dochádza preto k oddialeniu rovníku od stredu telesa. Rozdiel medzi aproximáciou

Teleso typu Ceres



Obr. 3.1: (a) Závislosť polomeru r telesa typu Ceres na teplote T pre dva hraničné hodnoty uhlu zemepisnej šírky θ . (b) Závislosť teploty T telesa typu Ceres na polomere r a uhle zemepisnej šírky θ .

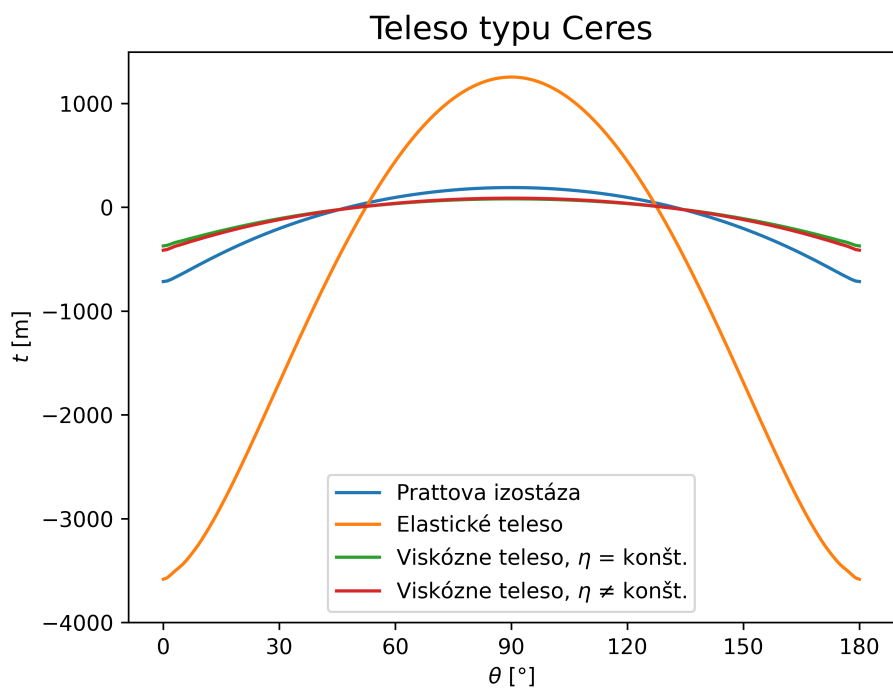
Teleso typu Europa (hrúbka 10 km)



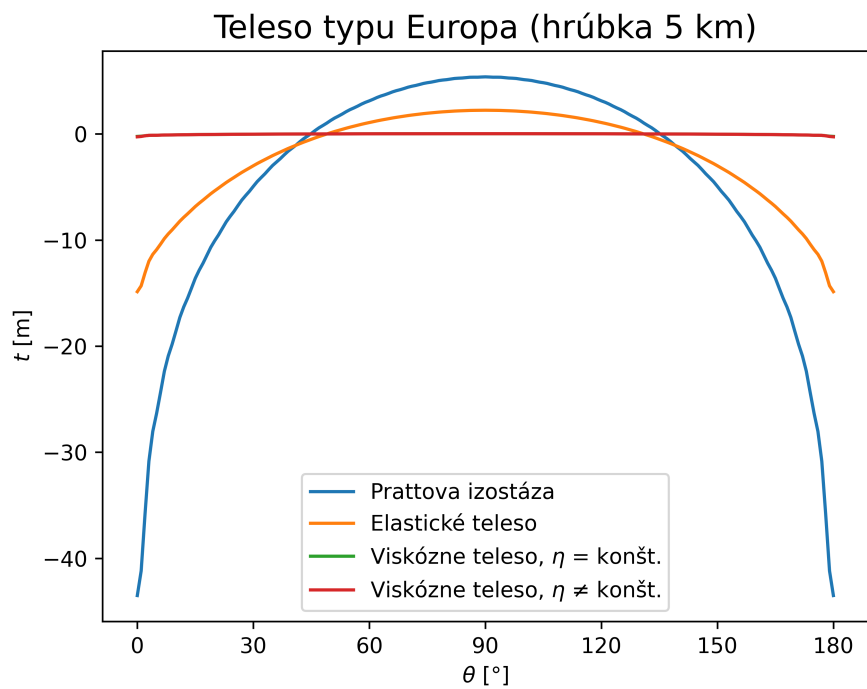
Obr. 3.2: (a) Závislosť polomeru r telesa typu Europa s hrúbkou 10 km na teplote T pre dva hraničné hodnoty uhlu zemepisnej šírky θ . (b) Závislosť teploty T telesa typu Ceres na polomere r a uhle zemepisnej šírky θ .

viskóznym telesom s konštantnou viskozitou a exponenciálne klesajúcou viskozitou je minimálny, avšak platí, že pre konštantnú viskozitu sú topografické zmeny menšie.

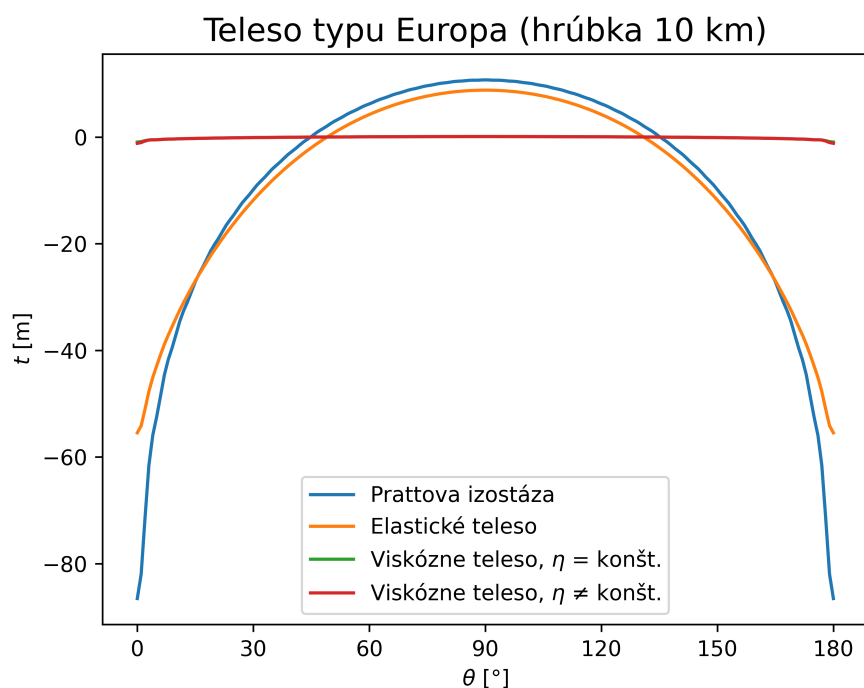
Topografie telesa typu Europa sú pre tri skúmané hrúbky vrstvy znázornené na obrázkoch 3.4, 3.5 a 3.6. Pre všetky prípady opäť pozorujeme priblíženie povrchu k stredu telesa v oblasti pólů a oddialenie od stredu telesa v oblasti rovníku. Podobne ako pre teleso typu Ceres generuje aproximácia viskóznym telesom najmenšiu zmenu topografie. Rozdiel oproti telesu typu Ceres nastáva pre hrúbku vrstvy rovnú 5 km a 10 km, kde najväčšiu zmenu topografie generuje aproximácia pomocou Prattovej izostázy. Pre hrúbku vrstvy 30 km už najväčšiu zmenu topografie generuje aproximácia elastickým telesom. Môžeme si ešte všimnúť, že so zväčšujúcou sa hrúbkou telesa sa zmeny topografie zväčšujú pre všetky aproximácie, vo všetkých prípadoch sa jedná o menšie zmeny topografie než pri telesu typu Ceres. Pre aproximáciu viskóznym telesom opäť platí, že pre konštantnú viskozitu sú topografické zmeny menšie než pre exponenciálne klesajúcu viskozitu.



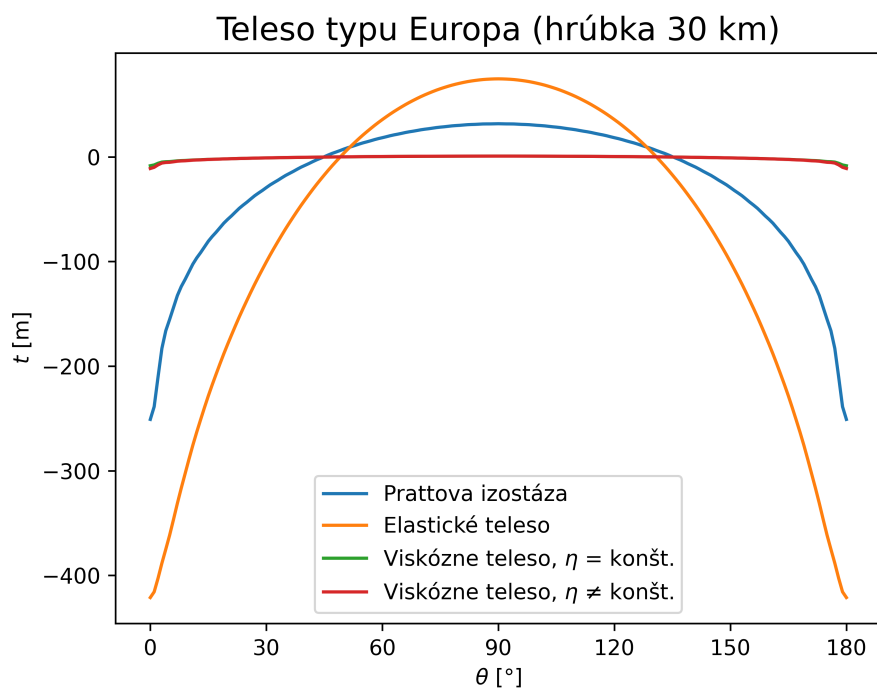
Obr. 3.3: Závislosť topografie povrchu telesa typu Ceres na uhle zemepisnej šírky pre štyri typy aproximácie daného telesa.



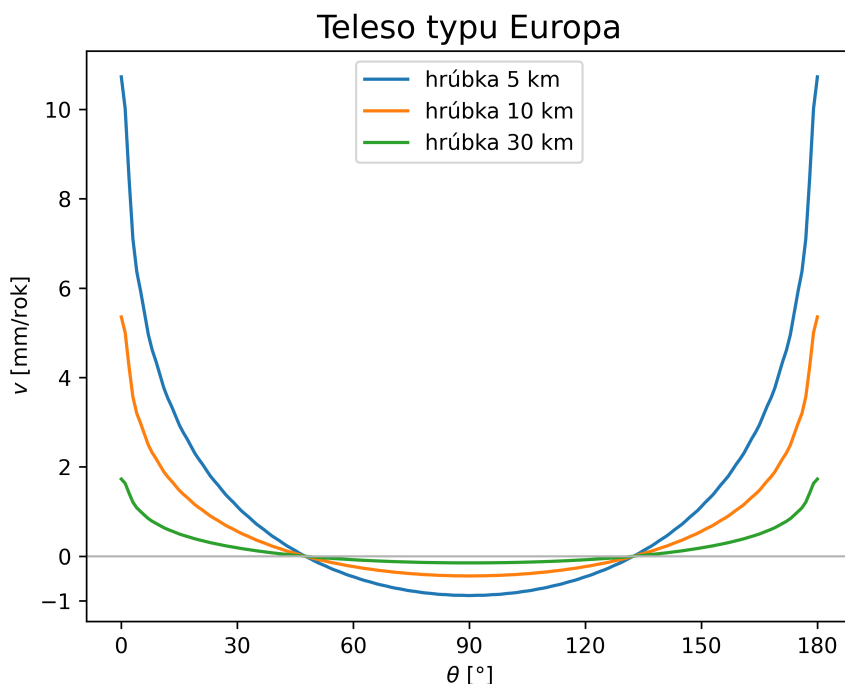
Obr. 3.4: Závislosť topografie povrchu telesa typu Europa s hrúbkou vrstvy 5 km na uhle zemepisnej šírky pre štyri typy aproximácie daného telesa.



Obr. 3.5: Závislosť topografie povrchu telesa typu Europa s hrúbkou vrstvy 10 km na uhle zemepisnej šírky pre štyri typy aproximácie daného telesa.



Obr. 3.6: Závislosť topografie povrchu telesa typu Europa s hrúbkou vrstvy 30 km na uhle zemepisnej šírky pre štyri typy aproximácie daného telesa.



Obr. 3.7: Závislosť rýchlosti fázovej zmeny na vnútornej hranici telesa typu Europa na uhle zemepisnej šírky pre tri hrúbky daného telesa

3.3 Rýchlosť fázovej zmeny

Rýchlosť fázovej zmeny na vnútornej hranici ľadovej vrstvy je pre prípady telesa typu Europa zobrazená na obrázku 3.7. V našom značení znamená kladná rýchlosť mrznutie vody a záporná rýchlosť topenie ľadu. Z obrázku 3.7 vidíme, že najväčšie rýchlosti fázovej zmeny nastávajú pre najtenšiu vrstvu. Naopak, najmenšie rýchlosti nastávajú pre najhrubšiu vrstvu. Z obrázku je tiež zrejmé, že v oblasti pólů dochádza k mrznutiu vody a v oblasti rovníku dochádza k topeniu ľadu, pričom mrznutie vody na pólůch je niekoľkonásobne rýchlejšie než topenie ľadu na rovníku. Môžeme si taktiež všimnúť, že pre všetky hrúbky vrstvy nastáva nulová rýchlosť fázovej zmeny pre rovnakú hodnotu uhlu zemepisnej šírky, a to $\theta = 48^\circ$, resp. $\theta = 132^\circ$.

4. Diskusia

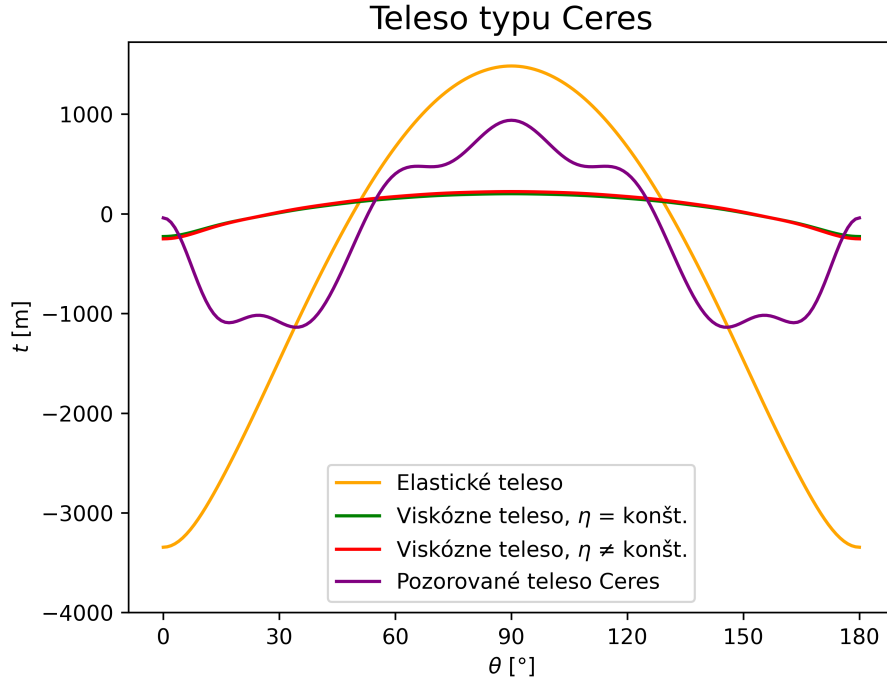
Pre teleso typu Europa pozorujeme pre všetky skúmané hrúbky vrstvy relatívne malé topografické zmeny pozdĺž zemepisnej šírky. Najväčšia topografická zmena medzi pólmi a rovníkom nastáva pre vrstvu hrúbky 30 km a aproximáciu elastickým telesom, táto zmena je menšia než 2% hrúbky danej ľadovej vrstvy a približne 0,03 % polomeru celého telesa. Pre aproximáciu viskóznym telesom taktiež pozorujeme najväčšie topografické zmeny pre hrúbku vrstvy 30 km. Topografický rozdiel medzi pólmi a rovníkom je v tomto prípade nanajvýš 12 m, čo môže v rámci presnosti použitých metód odpovedať nulovým, resp. zanedbateľným topografickým zmenám. Aproximácia oboma modelmi odpovedá reálnym pozorovaniam telesa Europa (Nimmo a kol., 2007).

Pre teleso typu Ceres pozorujeme významnejšie topografické zmeny pozdĺž zemepisnej šírky než pre teleso typu Europa. Maximálny topografický rozdiel medzi pólmi a rovníkom nastáva pre aproximáciu elastickým telesom a je rovný takmer 5 km, čo je približne 1% polomeru telesa. Topografický rozdiel medzi pólmi a rovníkom pre aproximáciu viskóznym telesom je približne 500 m, teda približne 0,1% polomeru skúmaného telesa. Reálnu pozorovanú závislosť topografie na zemepisnej šírke očakávame medzi aproximáciami elastickým a viskóznym telesom, keďže aproximácia elastickým telesom odpovedá okamžitej reakcii telesa na predpísané tepelné zdroje a hraničné podmienky a aproximácia viskóznym telesom odpovedá zrelaxovanému stavu telesa. Relaxačný čas t_{rel} pre Maxwellovskú reológiu je približne určený vzťahom

$$t_{rel} \approx \frac{\eta}{\mu} \quad (4.1)$$

V našom prípade odpovedá zrelaxovaný stav stavu stacionárneho prúdenia, keďže udržiavame (nerelaxujeme) hustotné anomálie v dôsledku variácie teploty. Porovnanie našich výsledkov s pozorovanými zmenami topografie pre teleso Ceres (Konopliv a kol., 2018 a Park a kol., 2019) zobrazujeme na obrázku 4.1. Z dôvodu poskytnutých dát pozorovanej topografie zobrazujeme spomenuté porovnanie len pre stupne $j = 2, 4, \dots, 18$ a rád $m = 0$, čo odpovedá symetrickej časti pozorovanej topografie voči rovníku.

Z obrázku 4.1 vidíme, že pozorovaná topografia je súhlasná s očakávanou topografiou len v oblasti rovníku, teda v rozmedzí uhlov od približne 60° do približne 120° . V tomto rozmedzí sa totiž pozorovaná topografia telesa Ceres nachádza medzi aproximáciami elastickým a viskóznym telesom. Mimo tohto uhlového rozmedzia sa už pozorovaná topografia vymyká očakávaniu, zároveň pozdĺž celej zemepisnej šírky pozorujeme väčšie oscilácie než pre skúmaný model. Z obrázku 4.1 taktiež vidíme, že viskózný model nepresne popisuje zrelaxovaný stav pozorovaného telesa Ceres. K presnejšiemu popisu by sme museli použiť viskoelastický model telesa. Bližšie porovnanie daných topografií ponúka obrázok 4.2, z ktorého môžeme vidieť, že pre dominantný stupeň $j = 2$ sa závislosť pozorovaného telesa zhoduje s očakávaním. Pre vyššie stupne $j > 2$ už je tvar závislosti topografie pozorovaného telesa opačný než pre skúmaný model. Pomocou porovnania topografií pre stupeň $j = 2$ a vzťahu 4.1, do ktorého za relaxačný čas dosadíme rádovo vek telesa Ceres, môžeme rádovo odhadnúť viskozitu ako 10^{27} Pa.s. Pozorovania z obrázku 4.2 nasvedčujú správnosti zjednodušenia skúmaného modelu, v skúmanom modeli tak boli pravdepodobne zahrnuté najdôležitejšie faktory vplý-

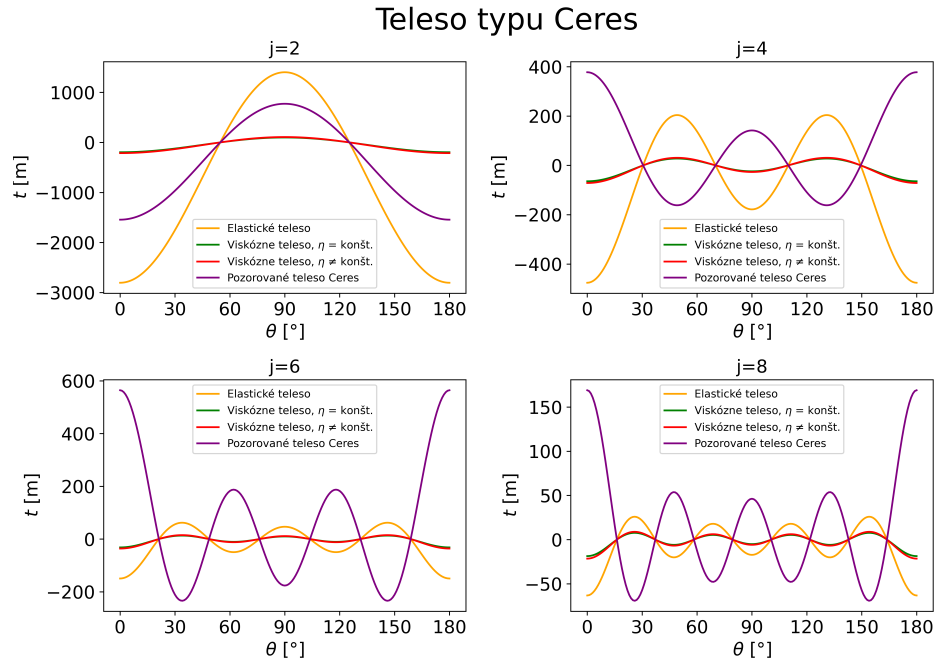


Obr. 4.1: Porovnanie výsledkov závislosti zmeny topografie na zemepisnej šírke do stupňa $j = 18$ s pozorovanou závislosťou telesa Ceres do stupňa $j = 18$.

vajúce na topografiu telesa. Z porovnania korekcií od stupňa $j = 4$ a vyššie je zároveň evidentné, že skúmaný model bol zjednodušený až príliš. Jedným z najvýraznejších zjednodušení skúmaného modelu, ktoré mohli viesť k nepresnosti v porovnaní s pozorovaním, je zanedbanie konvekčného členu, ktorý mohol mať významnú rolu pre viskózne, resp. viskoelastický model. K tomuto záveru nás vedie aj fakt, že súčin $\vec{v} \cdot \nabla T$ v konvekčnom člene ovplyvňuje výsledok pre stupne $j \geq 4$.

K nepresnosti vypočítanej topografie oproti pozorovaniu mohla prispieť aj podmienka tvaru rozloženia teploty na povrchu telesa 1.1, ktorá nemusí platiť. Táto podmienka je totiž odvodená v určitej hĺbke pod povrchom telesa a predpokladá pevnú hodnotu vodivosti na povrchu. V dôsledku dopadu slnečných lúčov sa však môže štruktúra materiálu na povrchu líšiť v závislosti na zemepisnej šírke, keďže tu dochádza k sublimácii ľadu. Výsledkom by ale bola ešte nižšia teplota v oblasti pólů, čo by viedlo k zvýšeniu rozdielu výsledkov oproti pozorovaniu.

Skúmané modely telies sú zjednodušené vo viacerých bodoch, keďže naša práca bola zameraná na odhad správnosti koncepcie topografických zmien v dôsledku teplotných variácií. Pri detailnejšom štúdiu problematiky by sme si tak museli byť vedomí vplyvných zjednodušujúcich predpokladov. Jedným z týchto predpokladov je už spomenuté zanedbanie konvekčného členu, teda predpoklad 1.2. Predpoklad 1.2 je oprávnený, ak rýchlosť $\vec{v}$ je omnoho menšia než rádovo desiatky milimetrov za rok, pričom pre teleso Ceres môže táto rýchlosť dosahovať hodnoty až v jednotkách milimetrov za rok (Formisano a kol., 2020). Ďalším predpokladom je predpoklad kvazistacionarity 1.3, ktorý nie je splnený, keďže teleso sa nachádza v stave prechodu k zrelaxovanému stavu (viskózne limite). Ak by sme totiž zahrnuli vplyv rýchlosti tečenia materiálu a riešili by sme prúdenie viskoelastického modelu, teplota by sa v čase vyvíjala. Významným zjednodušením je



Obr. 4.2: Porovnanie výsledkov závislosti zmeny topografie na zemepisnej šírke s pozorovanou závislosťou telesa Ceres pre stupne $j = 2, 4, 6, 8$.

taktiež použitie tvaru vodivosti pre ľad, teda predpoklad 1.9. Teleso Ceres totiž nie je tvorené výhradne ľadom, čo sme sa snažili čo najviac vystihnúť zahrnutím zvyšných parametrov pre materiál telesa Ceres. Pre jednoduchosť sme ešte predpokládali, že teleso nie je diferencované, predpokládali sme preto homogénne vlastnosti skúmaného telesa.

Záver

V tejto práci sme skúmali vplyv teplotného rozloženia na tvar telesa. Uvažovali sme dva typy telies - teleso typu Ceres a teleso typu Europa. Pre oba typy telies sme vypočítali teplotné rozloženie vnútra, topografické zmeny vyvolané teplotnými variáciami a pre teleso typu Europa sme vypočítali rýchlosť fázovej zmeny na vnútornej hranici. Za týmto účelom sme vytvorili vlastný program pomocou programovacieho jazyka Python. Výsledky práce sa dajú zhrnúť do nasledujúcich bodov:

- Závislosť teploty na polomere je pre teleso typu Ceres konkávna a mimo určitého okolia stredu telesa približne lineárna.
- Závislosť teploty na polomere je pre teleso typu Europa konvexná a najmä v oblasti rovníku nepripomína lineárnu závislosť.
- Pre teleso typu Ceres vystihuje aproximácia elastickým a viskóznym telesom očakávané limitné prípady len pre stupeň $j = 2$ sférického rozkladu vypočítanej topografie. Pre vyššie stupne už skúmaný model nedokáže vysvetliť pozorované topografické variácie telesa Ceres.
- Pre teleso typu Europa pozorujeme zanedbateľné topografické variácie, čo je v súlade s očakávaním.
- Pre teleso typu Europa je topenie ľadu v oblasti rovníku výrazne pomalšie než mrznutie vody v oblasti pólů. Rýchlosť fázovej zmeny je nepriamo úmerná hrúbke skúmanej vrstvy.

Jedná sa o prvý krok k pochopeniu vplyvu teplotných variácií na dynamiku planetárnych telies. Keďže ide o testovanie základného konceptu, práca je vo viacerých aspektoch zjednodušená. Výsledky sú aj napriek tomu nádejné, v prípade telesa Ceres naznačujú, že teplotné variácie by mohli výraznejšie ovplyvňovať tvar skúmaného telesa. Ak by sa v práci pokračovalo, bolo by potrebné zahrnúť konvekciu vnútri telesa.

Zoznam použitej literatúry

- DEVAUX, J. P., FLEITOUT, L., SCHUBERT, G. a ANDERSON, C. (2000). Stresses in a subducting slab in the presence of a metastable olivine wedge. *J. Geophys. Res.-Solid Earth*, **105**, 13365–13373.
- FORMISANO, M., FEDERICO, C., CASTILLO-ROGEZ, J., DE SANCTIS, M. C. a MAGNI, G. (2020). A study on the onset of the thermal convection in Ceres' crust. *EPSC Abstracts*, **13**.
- GOLLE, O., DUMOULIN, C., CHOBLET, G. a ČADEK, O. (2012). Topography and geoid induced by a convecting mantle beneath an elastic lithosphere. *Geophys. J. Int.*, **189**, 55–72. doi: 10.1111/j.1365-246X.2012.05364.x.
- HAYNE, P. O. a AHARONSON, O. (2015). Thermal stability of ice on Ceres with rough topography. *J. Geophys. Res. Planets*, **120**, 1567–1584. doi: 10.1002/2015JE004887.
- KONOPLIV, A. S., PARK, R. S., VAUGHAN, A. T., BILLS, B. G., ASMAR, S. W., ERMAKOV, A. I., RAMBAUX, N., RAYMOND, C. A., CASTILLO-ROGEZ, J. C., RUSSELL, C. T., SMITH, D. E. a ZUBER, M. T. (2018). The Ceres gravity field, spin pole, rotation period and orbit from the Dawn radiometric tracking and optical data. *Icarus*, **299**, 411–429.
- NIMMO, F., THOMAS, P., PAPPALARDO, R. a MOORE, W. (2007). The global shape of Europa: Constraints on lateral shell thickness variations. *Icarus*, **191**, 183–192.
- PARK, R. S., VAUGHAN, A. T., KONOPLIV, A. S., ERMAKOV, A. I., MASTRODEMOS, N., CASTILLO-ROGEZ, J. C., JOY, S. P., NATHUES, A., POLANSKEY, C. A., RAYMAN, M. D., RIEDEL, J. E., RAYMOND, C. A., RUSSELL, C. T. a ZUBER, M. T. (2019). High-resolution shape model of Ceres from stereophotoclinometry using Dawn Imaging Data. *Icarus*, **319**, 812–827.
- PETRENKO, V. F. a WHITWORTH, R. W. (1999). *Physics of Ice*. Oxford Univ. Press, Oxford.
- RICARD, Y., FLEITOUT, L. a FROIDEVAUX, C. (1984). Geoid heights and lithospheric stresses for a dynamic Earth. *Ann. Geophys.*, **2**, 267–286.
- SOUČEK, O., BĚHOUNKOVÁ, M., ČADEK, O., HRON, J. a TOBIE, G. (2019). Tidal dissipation in Enceladus' uneven, fractured ice shell. *Icarus*, **328**, 218–231.

A. Prílohy

A.1 Kód programu pre numerické riešenie rovnice vedenia tepla v telese typu Ceres

```
import numpy as np
import scipy
from operator import add

# Definovanie zadaných premenných

k_0 = 651
R = 476000
T_top = 150
Q = 2*10**(-8)
alpha = 1.6 * 10**(-4)
mass = 9.1 * 10**(20)
G = 6.6743 * 10**(-11)

# Definovanie pomocných premenných

number_of_diff = 100
step_length = (2*R)/(2*number_of_diff+1)
matrix_dim = 3 * (number_of_diff + 1) + 1
Q_00 = (Q/scipy.special.sph_harm(0, 0, 0, theta))

# Definovanie sietí r, rT

r = []; rT = []

for i in range(0, number_of_diff + 1):
    r.append(R - i * step_length)
    rT.append(R + (step_length / 2) - i * step_length)
rT.append(0)

# Aproximácia hraničných podmienok pomocou (sin(theta))1/4

d_stupen = 10          # jemnosť siete pre hraničnú podmienku
a = 130
b = 20

approx = []
for i in range(0,180*d_stupen+1):
    approx.append(np.log(a * (np.sin(i*np.pi/(180*d_stupen))))*0.25 + b))

T_j_top_list = []

for j in range(0,91,2):
    T_top_approx = []
    for i in range(0,180*d_stupen+1):
        stupen = i*np.pi/(180*d_stupen)
        T_top_approx.append(approx[i]*scipy.special.sph_harm(0, j, 0, stupen)*np.sin(stupen))
    T_j_top = 2 * np.pi * np.trapz(T_top_approx,dx=np.pi/(180*d_stupen+1))
    T_j_top_list.append(np.real(T_j_top))

T_top_list = T_j_top_list

# Numerický výpočet sústavy rovníc

T_final_list = []
theta_list = np.arange(0,np.pi + np.pi/180,np.pi/180)
for theta in theta_list:
    T_final = [0] * (number_of_diff + 2)
    for j in range(0, 91, 2):
        T_top = T_top_list[int(round(j/2))]

    # Vytvorenie prázdnej matice A a prázdneho vektoru pravej strany b
```

```

A = scipy.sparse.lil_matrix((matrix_dim, matrix_dim))
A[0, 0] = 1 / 2; A[0, 3] = 1 / 2

b = np.zeros(matrix_dim)
b[0] = T_top

# Priprava konštánt

a_11 = np.sqrt(j/(2*j+1))
a_12 = np.sqrt(j/(2*j+1)) * (j+1)
a_21 = np.sqrt((j+1)/(2*j+1))
a_22 = np.sqrt((j+1)/(2*j+1)) * j
a_32 = np.sqrt(j/(2*j+1))
a_33 = np.sqrt(j/(2*j+1)) * (j-1)
a_34 = np.sqrt((j+1)/(2*j+1))
a_35 = np.sqrt((j+1)/(2*j+1)) * (j+2)

# Vyplnenie matice A a vektoru pravej strany b

m = 0
for i in range(1, matrix_dim - 3, 3):
    A[i, i - 1] = k[m] * (a_12/(2*r[m]) + a_11/step_length)
    A[i, i] = 1
    A[i, i + 2] = k[m] * (a_12/(2*r[m]) - a_11/step_length)
    A[i + 1, i - 1] = k[m] * (a_22/(2*r[m]) - a_21/step_length)
    A[i + 1, i + 1] = 1
    A[i + 1, i + 2] = k[m] * (a_22/(2*r[m]) + a_21/step_length)
    A[i + 2, i] = a_32/step_length - a_33/(2*rT[m+1])
    A[i + 2, i + 1] = - a_34/step_length - a_35/(2*rT[m+1])
    A[i + 2, i + 3] = - a_32/step_length - a_33/(2*rT[m+1])
    A[i + 2, i + 4] = a_34/step_length - a_35/(2*rT[m+1])

    if j == 0: b[i+2] = Q_00

    m += 1

A[matrix_dim - 3, matrix_dim - 4] = k[m] * (a_12/(2*r[m]) + a_11/step_length)
A[matrix_dim - 3, matrix_dim - 3] = 1
A[matrix_dim - 3, matrix_dim - 1] = k[m] * (a_12/(2*r[m]) - a_11/step_length)
A[matrix_dim - 2, matrix_dim - 4] = k[m] * (a_22/(2*r[m]) - a_21/step_length)
A[matrix_dim - 2, matrix_dim - 2] = 1
A[matrix_dim - 2, matrix_dim - 1] = k[m] * (a_22/(2*r[m]) + a_21/step_length)

if j == 0:
    A[matrix_dim - 1, matrix_dim - 2] = 1
else:
    A[matrix_dim - 1, matrix_dim - 4] = 1
    A[matrix_dim - 1, matrix_dim - 1] = 1

# Riešenie rovnice Ax=b pomocou LU rozkladu

lu = scipy.sparse.linalg.splu(A)
x = lu.solve(b)

interim_T = x[:, :3]
q_minus = x[1:, :3]
q_plus = x[2:, :3]

sph_T = interim_T * scipy.special.sph_harm(0, j, 0, theta)
q_minus = q_minus * scipy.special.sph_harm(0, j, 0, theta)
q_plus = q_plus * scipy.special.sph_harm(0, j, 0, theta)

# Sčítanie členov spektrálneho rozkladu

T_final = list(map(add, T_final, sph_T))

# Vyplnenie konečného listu teplôt

T_final_exp = [np.exp(np.real(z)) for z in T_final]

T_final_list.append(T_final_exp)

print(T_final_list)

```