



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Daniel Krátký

Zemský plášť jako elektromagnetický filtr

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jakub Velímský, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Praha 2024

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Děkuji mému vedoucímu doc. RNDr. Jakubovi Velímskému, Ph.D. za ochotu, trpělivost, veškerou pomoc a věnovaný čas. Děkuji své rodině a přátelům za podporu, kdykoliv to bylo potřeba.

Název práce: Zemský plášť jako elektromagnetický filtr

Autor: Daniel Krátký

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jakub Velímský, Ph.D., Katedra geofyziky

Abstrakt: Časově proměnné magnetické pole, vytvářené dynamem ve vnějším kapalném jádře Země, prostupuje na zemský povrch elektricky vodivým pláštěm, který toto pole ovlivňuje indukovanými elektrickými proudy. V této práci jsem odvodil a naprogramoval přímou úlohu propagace magnetického pole z povrchu jádra na povrch Země pro sféricky symetrickou elektrickou vodivost pláště. Přenosové funkce pláště byly spočteny pro několik vodivostních modelů. Dále jsem formuloval a řešil obrácenou úlohu rekonstrukce magnetického pole na povrchu jádra z časových řad na povrchu Země, pomocí dekonvoluce lineárního filtru. S využitím existujícího kódu školitele jsem zobrazil maticové přenosové funkce pro trojrozměrný elektrický model pláště.

Klíčová slova: geomagnetické pole; elektrická vodivost pláště

Title: Earth's mantle as an electromagnetic filter

Author: Daniel Krátký

Department: Department of Geophysics

Supervisor: doc. RNDr. Jakub Velímský, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: Time varied magnetic field, created by dynamo in Earth's outer liquid core, propagates to the Earth's surface through conductive mantle, which affects this field by induced electric currents. In this thesis I derived and programmed direct problem of propagation of magnetic field from the surface of Earth's core to the surface of the Earth for spherically symmetrical electrical conductivity of the mantle. Response functions of the mantle were calculated for several conductivity models. Next I formulated and solved the inverse problem of reconstructing magnetic field on the surface of Earth's core from time arrays on the Earth's surface, using deconvolution of a linear filter. Using existing code of thesis supervisor I plotted matrix response functions for a 3-D conductivity model of mantle.

Keywords: geomagnetic field; mantle electrical conductivity

Obsah

Úvod	6
1 Definice problému	8
1.1 Magnetické pole v atmosféře	8
1.2 Magnetické pole v plášti	9
1.3 Magnetické pole v jádře	9
1.4 Hraniční podmínky	10
1.5 Formulace přímé a obrácené úlohy	12
1.6 Integrální formulace	12
1.7 Časové kroky	13
1.8 Diskretizace magnetického pole	13
1.9 Lagrangeovy multiplikátory	15
2 Simulace vývoje magnetického pole	16
2.1 Algebraický zápis	16
2.2 Maticové elementy skalárního součinu	16
2.3 Maticové elementy formy a	17
2.4 Hraniční podmínky	18
2.5 Lagrangeovy multiplikátory	18
3 Lineární filtr	20
3.1 Obrácená úloha	20
3.2 Fourierova transformace	20
3.3 Rychlá Fourierova transformace	21
3.4 Úpravy na cyklické funkce	21
3.5 Vysoké frekvence	21
4 Řešení úlohy	23
4.1 Použité vodivostní modely a funkce odezvy	23
4.2 Výsledky dekonvoluce	24
5 Přímá úloha ve 3-D	34
Závěr	39
Literatura	40
Seznam obrázků	42
A Přílohy	44
A.1 Sférické Harmoniky	44
A.2 Důsledek Gaussovy věty	45

Úvod

Geomagnetické pole, čili magnetické pole Země, je souhrnným projevem několika fyzikálních jevů. Zemské jádro generuje magnetické pole pomocí principu dynama, tj. vlivem teplotního rozdílu vnějšího a vnitřního jádra a Coriolisovy síly se jádro nachází ve stálém stavu turbulentního proudění, pohyb vodivého materiálu v magnetickém poli indukuje elektrický proud, ten pak generuje vlastní magnetické pole, tyto dva jevy se vzájemně udržují v běhu dokud dochází k pohybu vodivého materiálu [1]. Tato složka geomagnetického pole představuje přibližně 99% jeho velikosti, proto je označována jako hlavní pole. Výsledné magnetické pole Země je v prvním přiblížení polem magnetického dipólu umístěného v jejím středu [2]. Další složky geomagnetického pole, v pořadí podle klesající velikosti, jsou především generovány časově proměnnými elektrickými proudy v magnetosféře a ionosféře (vnější pole) a jimi indukovanými elektrickými proudy ve vodivém plášti (indukované vnitřní pole). Nejmenšími příspěvky geomagnetického pole jsou permanentní magnetizace kůry a magnetické pole vytvářené interakcí oceánského proudění s hlavním polem.

Geomagnetické pole měříme na zemském povrchu na síti permanentních observatoří a od druhé poloviny 20. století i na satelitech na nízké orbitě (MAGSAT, CHAMP, Oersted, SAC-C, Swarm). Především posledně jmenovaná mise tří satelitů Evropské vesmírné agentury přinesla kvalitativní skok v měření geomagnetického pole [3].

Povrchová a satelitní měření hlavního pole, vznikajícího v jádře, jsou stíněna slabě elektricky vodivým pláštěm. Zatímco elektrická vodivost vnějšího kovového jádra je přibližně $5 \cdot 10^5 \text{ Sm}^{-1}$ [4] a mění se jen málo, elektrická vodivost silikátového pláště se mění přibližně v rozsahu $10^{-4} - 10^1 \text{ Sm}^{-1}$, od povrchu po rozhraní pláště a jádra (core mantle boundary, CMB) [5]. Proto lze v prvním přiblížení vliv elektrické vodivosti pláště zanedbat a formulovat průchod hlavního pole izolujícím pláštěm z CMB na povrch pouze jako geometrický útlum. Tato aproximace však může být problematická při interpretaci relativně rychlých jevů v jádře (geomagnetické střiky - jerks, vlny), které jsou pozorovány v satelitních datech [6].

Vliv elektricky vodivého pláště na propagaci magnetického pole z CMB na povrch lze popsat jako lineární kauzální filtr. Za předpokladu sféricky symetrické elektrické vodivosti pláště σ , zanedbatelných laterálních variací magnetického pole a při splnění podmínky

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}} \frac{d\sigma}{dr} \ll \sqrt{\frac{4\pi\mu_0}{T}}, \quad (1)$$

kde σ je typická hodnota vodivosti pláště, $\frac{d\sigma}{dr}$ její radiální gradient a $T < 10$ let časová škála magnetického pole, lze dokonce odvodit analytické řešení pro radiální složku magnetického pole,

$$B_r(a; t) = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left[\frac{\sigma(c)}{\sigma(a)}\right]^{1/4} \int_0^\infty B_r(c; t - t') \operatorname{erfc} \left[\left(\frac{\tau_H}{2t'}\right)^{1/2} \right] dt', \quad (2)$$

kde

$$\tau_H = \frac{\mu_0}{2} \left[\int_c^a [\sigma(r)]^{1/2} dr \right]^2 \quad (3)$$

je vysokofrekvenční konstanta pláště [7]. Magnetické pole na povrchu $B_r(a,t)$ je oproti poli na CMB $B_r(c,t)$ utlumené, zpožděné a zhlazeno.

Moderní metody numerického řešení rovnice elektromagnetické indukce [8] pak umožňují řešit propagaci magnetického pole z CMB na povrch bez omezení analytického řešení, pro libovolný radiální (1-D), nebo i trojrozměrný (3-D) laterálně proměnlivý průběh elektrické vodivosti.

V případě sféricky symetrické vodivosti je řešení separováno ve stupni i řádu sférických harmonik (SH), toroidální a poloidální složka pole jsou také nezávislé. Lineární kauzální filtr spojující pole na CMB a na povrchu, který lze odvodit pro každou SH poloidálního pole, závisí pouze na vodivostním profilu a stupni SH. Toroidální pole na povrchu, tedy na rozhraní s téměř dokonale izolující atmosférou, však v 1-D případě vymizí, bez ohledu na toroidální pole na CMB. Ve 3-D případě ovšem dochází k přelévání energie mezi jednotlivými stupni i řády SH i mezi poloidální a toroidální složkou pole. Pro každý stupeň a řád na povrchu je koeficient magnetického pole lineární kombinací filtrů aplikovaných na vstupní signály na CMB.

Prvním cílem této práce je numerické modelování propagace magnetického pole z CMB na povrch pro několik 1-D vodivostních profilů. Kapitola 1 se věnuje formulaci tohoto problému a kapitola 2 jeho numerické implementaci. Dalším cílem práce je řešení obrácené úlohy, tedy rekonstrukce průběhu magnetického pole na CMB inverzí časových řad SH koeficientů hlavního pole na povrchu pro daný 1-D vodivostní model. Dekonvoluční metoda je popsána v kapitole 3 a výsledky představeny v kapitole 4. Kapitola 5 pak obsahuje ukázkou řešení 3-D přímé úlohy, získanou kódem školitele.

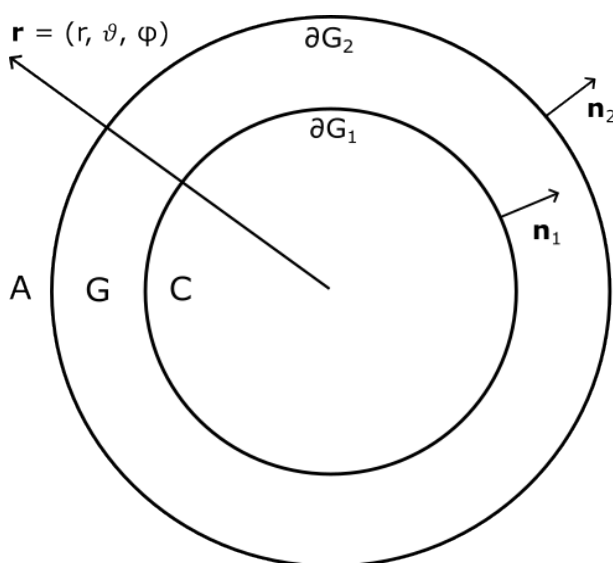
1 Definice problému

Tato kapitola čerpá ze článku [8].

Úlohu budeme řešit v kvazistacionárním přiblížení, protože počítáme s vodivými proudy, ale časové změny nábojového rozložení jsou dostatečně pomalé na to, abychom mohli zanedbat Maxwellovy posuvné proudy.

Prostor, ve kterém problém definujeme dělíme na tři části: atmosféru (A), plášť (G) a jádro (C). Hranici mezi atmosférou a pláštěm značíme ∂G_2 , hranici mezi pláštěm a jádrem (CMB) ∂G_1 (obrázek 1.1), poloměr země značíme a , poloměr zemského jádra pak c .

Úlohu řešíme ve sférických souřadnicích, kde $\mathbf{r} = (r, \vartheta, \varphi)$ je polohový vektor, úhlové souřadnice košířku ϑ a délku φ někdy souhrnně označujeme Ω .



Obrázek 1.1 Zemské jádro C , plášť G a atmosféra A oddělená hranicemi ∂G_1 a ∂G_2 , polohový vektor $\mathbf{r}$, normály k hranicím $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$

1.1 Magnetické pole v atmosféře

Atmosféru v našem případě považujeme za nevodivé prostředí, tedy s konstantní elektrickou vodivostí $\sigma = 0$. V kvazistacionárním přiblížení vypadají Maxwellovy rovnice pro vektor magnetické indukce $\mathbf{B}$ ¹ následovně,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \sigma \mathbf{E} = 0. \quad (1.2)$$

Z nulovosti rotace víme, že existuje potenciál U ,

$$\mathbf{B} = -\nabla U, \quad (1.3)$$

¹V dalším textu budeme pro magnetickou indukci $\mathbf{B}$ používat výraz (geo)magnetické pole, abychom se vyhnuli záměně s jevem elektromagnetické indukce.

a ze vztahu (1.1) víme, že platí

$$\Delta U = 0. \quad (1.4)$$

Obecným analytickým řešením takovéto úlohy ve sférických souřadnicích je nekonečný rozvoj magnetického potenciálu do sférických harmonických funkcí,

$$U(r, \vartheta, \varphi; t) = a \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left(G_{jm}^{(e)}(t) \left(\frac{r}{a} \right)^j + G_{jm}^{(i)}(t) \left(\frac{a}{r} \right)^{j+1} \right) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (1.5)$$

kde $G_{jm}^{(e)}$ nazýváme vnější koeficienty, příslušející poli vznikajícímu ze zdrojů vně pláště, $G_{jm}^{(i)}$ koeficienty vnitřní, související s polem zdrojů uvnitř Země a Y_{jm} jsou SH, popsané v příloze A.1.

1.2 Magnetické pole v plášti

Plášť považujeme za prostředí vodivé, nyní tedy s nenulovou vodivostí. Po zavedení elektrické intenzity $\mathbf{E}$ a hustoty elektrického proudu $\mathbf{j}$ nyní z Maxwellových rovnic a Ohmova zákona získáme vztahy

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \sigma \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

ze kterých úpravou dostaneme

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Pro elektrickou vodivost obecně platí $\sigma = \sigma(r, \vartheta, \varphi)$. Dále se budeme věnovat případu sféricky symetrické vodivosti $\sigma(r)$, což je speciální, ale geofyzikálně relevantní případ.

O magnetickém poli jako vektorové funkci předpokládáme $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}; t) \in C^{(2)}(G) \times C^{(1)}(t)$, což bude relevantní pro odvození slabé formulace problému.

1.3 Magnetické pole v jádře

Jádro považujeme za pohyblivé, elektricky vodivé kontinuum, celková elektrická proudová hustota tedy zahrnuje i vliv magnetické Lorentzovy síly působící na nosiče náboje,

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.10)$$

kde σ , na rozdíl od pláště, považujeme za konstantu. Díky tomuto přidanému členu prepíšeme rovnici (1.9) pro jádro na

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{B} \right) = \mu_0 \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right]. \quad (1.11)$$

Tu pak můžeme pomocí vektorové identity a díky konstantnosti σ přepsat na

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right], \quad (1.12)$$

a protože i pro jádro platí vztah (1.1), skončíme s rovnicí

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \Delta \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.13)$$

kde η je magnetická difusivita,

$$\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}. \quad (1.14)$$

Rovnice (1.13) je rovnicí kinematického dynama, která umožňuje nalézt magnetické pole pro známé rychlostní pole $\mathbf{v}(\mathbf{r}; t)$. Pro úplné řešení problému dynama musí být doplněna o rovnice termální nebo termochemické konvekce, včetně Lorentzovy síly. My ovšem toto řešení potřebovat nebudeme, protože rovnici (1.13) nahradíme hraniční podmínkou pro magnetické pole na CMB.

1.4 Hraniční podmínky

Na obou rozhraních ∂G_2 i ∂G_1 platí podmínka

$$[\mathbf{B}]_+^+ = \mathbf{0}, \quad (1.15)$$

v úloze totiž nepředpokládáme žádné plošné proudy na horním či spodním okraji pláště.

Vektor magnetické indukce v plášti a atmosféře můžeme vyjádřit v bázi vektorových SH popsanych v příloze A.1,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}; t) = \sum_{jm} \sum_{\lambda=-1}^1 B_{jm}^{(\lambda)}(r; t) \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\theta, \phi). \quad (1.16)$$

Pokud nyní použijeme identitu pro gradient radiálně závislé funkce reprezentovaný ve sférických souřadnicích,

$$\nabla (f(r) Y_{jm}(\Omega)) = \frac{df(r)}{dr} \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + \frac{f(r)}{r} \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega), \quad (1.17)$$

a vyjádříme gradient magnetického potenciálu v atmosféře (1.5) na hranici ∂G_2 , pro $r = a$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}; t)|_{r=a} = & - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \left[\mathbf{S}_{jm}^{(-1)} \left(j G_{jm}^{(e)}(t) - (j+1) G_{jm}^{(i)}(t) \right) + \right. \\ & \left. \mathbf{S}_{jm}^{(1)} \left(G_{jm}^{(e)}(t) + G_{jm}^{(i)}(t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nyní, pokud vezmeme v potaz SH rozvoj magnetického pole (1.16) v plášti, podmínku (1.15) a ortogonalitu vektorových SH, zjistíme, že platí

$$B_{jm}^{(0)}(a; t) = 0. \quad (1.19)$$

Pro nás to efektivně znamená, že toroidální složka pole je na povrchu pláště nulová, nemůžeme z ní tedy získat při obrácené úloze žádnou informaci. Další složky magnetického pole nám dají

$$B_{jm}^{(-1)}(a; t) = - \left[j G_{jm}^{(e)}(t) - (j+1) G_{jm}^{(i)}(t) \right], \quad (1.20)$$

$$B_{jm}^{(1)}(a; t) = - \left[G_{jm}^{(e)}(t) + G_{jm}^{(i)}(t) \right]. \quad (1.21)$$

Když nyní z rovnic (1.20) a (1.21) vyloučíme $G_{jm}^{(i)}(t)$, vytvoříme podmínku

$$B_{jm}^{(-1)}(a; t) + (j+1) B_{jm}^{(1)}(a; t) = -(2j+1) G_{jm}^{(e)}(t), \quad (1.22)$$

kteřá v každém čase t určuje vztah mezi horizontální a vertikální složkou magnetického pole na ∂G_2 a koeficienty vnějšího pole, pro dané j a m . V naší úloze budeme předpokládat absenci vnějších proudů v ionosféře a magnetosféře, což zajistí nulové koeficienty $G_{jm}^{(e)}$. Taková podmínka je ekvivalentní potenciálu U (1.16) který ubývá do nekonečna s rychlostí alespoň $O(\frac{1}{r^2})$. Vztah se nám tedy dále zjednoduší na

$$B_{jm}^{(-1)}(a; t) + (j+1) B_{jm}^{(1)}(a; t) = 0. \quad (1.23)$$

Abychom nemuseli řešit rovnici kinematického dynama v jádře (1.12), položíme jako hraniční podmínku na spodní hranici pláště ∂G_1 předepsanou celkovou horizontální složku vektoru magnetického pole $\mathbf{B}_H$, ta pak jednoznačně určuje složku vertikální. Toto předepsané horizontální pole je celkové a obsahuje příspěvky pocházející ze všech elektromagnetických interakcí mezi jádrem a pláštěm, tedy pole odpovídající proudům tekoucím v plášti, v jádře a obecně i mezi jádrem a pláštěm. Ve SH reprezentaci,

$$B_{jm}^{(1)}(c; t) = B_{jm,H}^{(1)}(t), \quad (1.24)$$

$$B_{jm}^{(0)}(c; t) = B_{jm,H}^{(0)}(t). \quad (1.25)$$

Poslední hraniční podmínkou je počáteční podmínka $\mathbf{B}(\mathbf{r}; 0) = \mathbf{B}_0$. Homogenní Dirichletova počáteční podmínka $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$ vede k dlouhým náběhovým časům při numerické integraci rovnice (1.9), není tedy pro naši úlohu vhodná. Místo ní hledáme stacionární řešení rovnice (1.9), tedy takové, pro které platí

$$\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} = 0. \quad (1.26)$$

Ze vztahu (1.26) a (1.9) plyne

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{B}_0 \right) = 0, \quad (1.27)$$

a takové pole můžeme opět zapsat pomocí skalárního magnetického potenciálu (1.3), tentokrát ovšem v rozvoji okolo poloměru $r = c$. Pro stacionární složku pole uvnitř pláště pak můžeme psát

$$B_{jm,0}^{(1)}(r; 0) = B_{jm,H}^{(1)}(c; 0) \left(\frac{c}{r} \right)^{j+2}, \quad (1.28)$$

$$B_{jm,0}^{(-1)}(r; 0) = -(j+1) B_{jm,H}^{(1)}(c; 0) \left(\frac{c}{r} \right)^{j+2}, \quad (1.29)$$

$$B_{jm,0}^{(0)}(r; 0) = 0, \quad (1.30)$$

kde $B_{jm,0}^{(1)}(c; 0) = B_{jm,H}^{(1)}(c; 0)$ jsou SH koeficienty pole $\mathbf{B}_H$ na CMB a v rovnici (1.29) jsme využili analogii k rovnici (1.22), vztaženou k ∂G_1 .

1.5 Formulace přímé a obrácené úlohy

Nyní můžeme plně popsat přímou úlohu propagace magnetického pole z povrchu jádra na povrch Země.

Nechť $\sigma(\mathbf{r})$ je prostorově závislá, časově konstantní elektrická vodivost uvnitř pláště Země a $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ stacionární počáteční podmínka. Pak pro daný časový průběh horizontálního magnetického pole $\mathbf{B}_H(\Omega; t)$ na spodní hranici pláště ∂G_1 řešíme rovnici pro magnetické pole (1.9) v G s hraničními podmínkami (1.19) a (1.23) předepsanými na ∂G_2 .

Z úplného řešení $\mathbf{B}(\mathbf{r}; t)$ v G můžeme vyjádřit časové řady SH koeficientů $G_{jm}^{(i)}(t)$ na ∂G_2 , které lze přímo porovnat s modely hlavního pole získanými z měření.

Obrácenou úlohu pak obecně formulujeme jako nalezení horizontálního pole $\mathbf{B}_H(\Omega; t)$ na CMB, které vede na nejlepší shodu mezi predikovaným a pozorovaným magnetickým polem na povrchu Země.

1.6 Integrální formulace

Definujeme prostor $L_2(G)^3$ jako prostor vektorových kvadraticky integrabilních funkcí na G se skalárním součinem a normou,

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_G \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, dV, \quad (1.31)$$

$$\|\mathbf{f}\|_{L_2} = (\mathbf{f}, \mathbf{f})^{\frac{1}{2}}. \quad (1.32)$$

Definujeme prostory

$$H_{\text{curl}} = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} \in L_2(G)^3, \nabla \times \mathbf{f} \in L_2(G)^3 \right\}, \quad (1.33)$$

$$\tilde{H}_{\text{curl}}^t = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} \in H_{\text{curl}}, G_{jm}^{(e)} = 0, \mathbf{n} \times \mathbf{f}|_{\partial G_1} = \mathbf{n} \times \mathbf{B}_H(\Omega; t) \right\}, \quad (1.34)$$

$$H_{\text{curl},0} = \left\{ \mathbf{f} \mid \mathbf{f} \in H_{\text{curl}}, \mathbf{n} \times \mathbf{f}|_{\partial G_1} = \mathbf{n} \times \mathbf{f}|_{\partial G_2} = \mathbf{0} \right\}. \quad (1.35)$$

Prostor $\tilde{H}_{\text{curl}}^t$ zavádí vektorové funkce, které splňují předepsanou Dirichletovu podmínku na horizontální složku na spodní hranici ∂G_1 a podmínku nulového externího pole na horní hranici ∂G_2 . Podmínka na spodní hranici závisí na čase, proto užíváme index t i v definici prostoru. Takový prostor je možné zkonstruovat díky vlastnostem SH funkcí. Prostor $H_{\text{curl},0}$ pak definuje vektorové funkce s nulovou horizontální složkou na obou hranicích.

Uvažujme nejprve $\mathbf{B}$ z $C^{(2)}(G) \times C^{(1)}(t)$, vynásobme rovnici (1.9) libovolnou funkcí $\delta \mathbf{B}$ z $C^{(2)}(G)$ a integrujme přes G ,

$$\int_G \delta \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\rho \nabla \times \mathbf{B}) \, dV + \mu_0 \int_G \delta \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dV = 0, \quad (1.36)$$

kde $\rho = \frac{1}{\sigma}$ je elektrická rezistivita. Za pomoci důsledku Gaussovy věty odvozeného v příloze A.2 vztah upravíme,

$$\int_G \rho (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{B}) \, dV - \int_{\partial G} \rho (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{n} \times \delta \mathbf{B}) \, dS + \mu_0 \int_G \delta \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dV = 0. \quad (1.37)$$

Nyní uvažujme $\mathbf{B}$ z $\tilde{H}_{\text{curl}}^t \times C^{(1)}(t)$ a $\delta\mathbf{B}$ z $H_{\text{curl},0}$. Ve vztahu (1.37) bude nyní z definice prostoru $H_{\text{curl},0}$ plošný integrál nulový. Třetí integrál již známe jako skalární součin, a zdefinujeme formu

$$a(\mathbf{B}, \delta\mathbf{B}) = \int_G \rho(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\nabla \times \delta\mathbf{B}) dV. \quad (1.38)$$

Slabou formulací úlohy tedy míníme následující.

Při zadání elektrické vodivosti $\sigma(\mathbf{r})$ a stacionární počáteční podmínky $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$ hledáme časový průběh magnetického pole uvnitř zemského pláště $\mathbf{B} \in \tilde{H}_{\text{curl}}^t \times C^{(1)}(t)$, které bude v každé časové hladině splňovat podmínku

$$\mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \delta\mathbf{B} \right) + a(\mathbf{B}, \delta\mathbf{B}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{B} \in H_{\text{curl},0}. \quad (1.39)$$

Uvažujme nyní pouze sféricky symetrický průběh elektrické rezistivity $\rho(r)$. Pokud dosadíme do vztahu (1.37) rozvoj magnetického pole $\mathbf{B}$ a testovací funkce $\delta\mathbf{B}$ do SH funkcí z A.1, zjistíme, že rovnice (1.39) je separována pro každý sférický harmonický stupeň a řád j, m , a dále pro toroidální ($\lambda = 0$) a poloidální ($\lambda = \pm 1$) složku pole. Vzhledem k hraniční podmínce (1.19) není třeba se dále zabývat toroidálním polem, pro libovolnou hraniční podmínku na ∂G_1 nebude mít žádný dopad na pozorovatelné pole na horní hranici ∂G_2 (toto tvrzení neplatí pro laterálně proměnnou rezistivitu).

1.7 Časové kroky

Protože budeme integraci rovnice (1.39) provádět po diskrétních časových krocích, dává smysl aproximovat časovou derivaci ve vztahu (1.39) jako změnu magnetického pole mezi dvěma časovými kroky,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \approx \frac{{}^{i+1}\mathbf{B} - {}^i\mathbf{B}}{\Delta t}, \quad (1.40)$$

kde ${}^i\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}; t_i)$ a $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. S touto úpravou již můžeme formulovat plné znění problému, který budeme řešit, jako snahu nalézt pro daný vektor ${}^i\mathbf{B} \in \tilde{H}_{\text{curl}}^{t_i}$ takový vektor ${}^{i+1}\mathbf{B} \in \tilde{H}_{\text{curl}}^{t_{i+1}}$, pro který platí vztah

$$\frac{\mu_0}{\Delta t} ({}^{i+1}\mathbf{B}, \delta\mathbf{B}) + a({}^{i+1}\mathbf{B}, \delta\mathbf{B}) = \frac{\mu_0}{\Delta t} ({}^i\mathbf{B}, \delta\mathbf{B}) \quad \forall \delta\mathbf{B} \in H_{\text{curl},0}, \quad (1.41)$$

ve kterém je použito implicitní časové schéma.

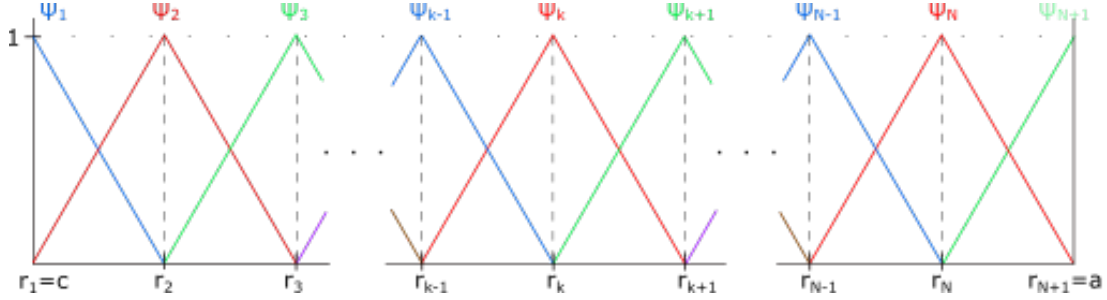
1.8 Diskretizace magnetického pole

Abychom měli úlohu plně diskrétně popsanou, musíme magnetické pole a rezistivitu diskretizovat nejen v čase a úhlových souřadnicích, ale i v radiální souřadnici zemského pláště. Plášť rozdělíme na N (v našem případě stejně tlustých) slupek s intervaly poloměrů $I_k = \langle r_k, r_{k+1} \rangle$, $k \in [1, N]$, kde $r_1 = c$ a $r_{N+1} = a$ jsou

spodní a vrchní poloměry pláště. Definujeme $N+1$ funkcí ψ_k tak, že v každém intervalu I_k leží právě dva nenulové elementy funkcí ψ_k ,

$$\psi_k(r) = \frac{r_{k+1} - r}{h_k} \quad \psi_{k+1}(r) = \frac{r - r_k}{h_k}, \quad (1.42)$$

kde $h_k = r_{k+1} - r_k$. ψ_1 má pouze klesající část, ψ_{N+1} pouze rostoucí (obrázek 1.2).



Obrázek 1.2 Diskretizace intervalu $[c, a]$ pomocí po-částech lineárních konečných elementů ψ_k

Za pomoci těchto funkcí rozšíříme diskretizaci v (1.16) na diskrétní aproximaci prostorů ve slabé formulaci, funkce z prostoru H_{curl} diskretizujeme následovně,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{m=-j}^j \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{\lambda=\pm 1} B_{jm,k}^{(\lambda)} \psi_k(r) \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi), \quad (1.43)$$

funkce z prostoru $H_{\text{curl},0}$ pak

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{m=-j}^j \left[\sum_{k=2}^N \sum_{\lambda=\pm 1} \delta B_{jm,k}^{(\lambda)} \psi_k(r) \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) + \right. \\ \left. (\delta B_{jm,1}^{(-1)} \psi_1(r) + \delta B_{jm,N+1}^{(-1)} \psi_{N+1}(r)) \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Hraniční podmínky na $\mathbf{B}(r)$, tedy omezení na prostor $\tilde{H}_{\text{curl}}^{ti}$, jsou pak vynuceny přímo použitím vazeb (1.19) a (1.24) pro sférické harmonické koeficienty $B_{jm,N+1}^{(\lambda)}$ a $B_{jm,1}^{(\lambda)}$. Protože předpokládáme sféricky symetrický průběh elektrické rezistivity, provedeme její parametrizaci následujícím způsobem,

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^N \xi_k \rho_k, \quad \xi_k = \begin{cases} 1, & r \in [r_k, r_{k+1}] \\ 0, & r \notin [r_k, r_{k+1}] \end{cases}, \quad (1.45)$$

což znamená, že na obrázku 1.2 je funkce ξ_k nenulová a rovná jedné pouze na jednom úseku r_k až r_{k+1} .

Abychom docílili toho, že bude rovnice (1.41) splněna pro každé $\delta \mathbf{B}$ z prostoru $H_{\text{curl},0}$, zvolíme jako bázi prostoru funkce $\{\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}\}$, $\lambda = \pm 1$, tedy přímo SH přenásobené funkcemi ψ_k , do kterých můžeme vektor $\delta \mathbf{B}$ rozložit stejně jako ve vztahu (1.43). Pokud tedy bude rovnice splněna pro všechny prvky této báze, bude splněná také pro celý prostor $H_{\text{curl},0}$.

1.9 Lagrangeovy multiplikátory

Přestože v teorii není nijak potřeba vynucovat podmínku $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, protože je ve vztahu (1.41) již obsažená implicitně, ukazuje se, že nám dává simulace lepší výsledky, pokud bude podmínka vynucena i explicitně. To zajistíme pomocí Lagrangeových multiplikátorů.

Podmínka nulové divergence musí platit jak pro $\mathbf{B}$, tak pro všechna $\delta\mathbf{B}$, ve skutečnosti tedy půjde o podmínky 2. Tuto podmínku udržíme rozšířením vztahu (1.39) o 2 integrály,

$$\mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \delta \mathbf{B} \right) + a(\mathbf{B}, \delta \mathbf{B}) + L(\delta \Lambda, \mathbf{B}) + L(\Lambda, \delta \mathbf{B}) = 0, \quad (1.46)$$

kde

$$L(\delta \Lambda, \mathbf{B}) = \int_G \delta \Lambda (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV, \quad (1.47)$$

$$L(\Lambda, \delta \mathbf{B}) = \int_G \Lambda (\nabla \cdot \delta \mathbf{B}) dV. \quad (1.48)$$

Zavedení formy L vyžaduje dodatečně, aby funkce $\mathbf{B}$ a $\delta\mathbf{B}$ patřily také do prosotru funkcí s L_2 -integrabilní divergencí H_{div} , naše parametrizace pomocí lineárních konečných elementů a sférických harmonik to ovšem jistě splňuje. Lagrangeovy multiplikátory Λ a $\delta\Lambda$ z $L_2(G)$ budeme opět považovat za radiální funkce a parametrizovat stejným způsobem jako rezistivitu,

$$\Lambda(r) = \sum_{k=1}^N \xi_k \Lambda_k, \quad \xi_k = \begin{cases} 1, & r \in [r_k, r_{k+1}] \\ 0, & r \notin [r_k, r_{k+1}] \end{cases}, \quad (1.49)$$

podobně pro $\delta\Lambda$.

2 Simulace vývoje magnetického pole

V této kapitole je popsána aplikace vztahu (1.46) a hraničních podmínek (1.19) a (1.23) při výpočtu časového vývoje magnetického pole.

2.1 Algebraický zápis

Pokud popisujeme pole v daném čase t pomocí koeficientů $B_{jm,k}^{(\lambda)}$, pak můžeme z koeficientů utvořit následující vektor,

$${}^i\mathbf{B}_{jm} = \left({}^iB_{jm,1}^{(-1)}, {}^iB_{jm,1}^{(1)}, {}^i\Lambda_{jm,1}, {}^iB_{jm,2}^{(1)}, \dots, {}^i\Lambda_{jm,N}, {}^iB_{jm,N+1}^{(-1)}, {}^iB_{jm,N+1}^{(1)} \right)^T. \quad (2.1)$$

Matice obsahuje členy $\Lambda_{jm,k}$, což jsou Lagrangeovy multiplikátory explicitně udržující podmínku $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Všimněme si, že hodnot $\Lambda_{jm,k}$ je o jedna méně, než dvojic hodnot $B_{jm,k}^{(\lambda)}$, což je dobře ilustrováno parametrizací (1.49) a obrázkem 1.2, kde funkcí ψ_k je o jedna více než úseků $[r_k, r_{k+1}]$. Vektor tvoříme pro dané j, m , protože díky ortogonalitě SH můžeme počítat s jednotlivými stupni nezávisle na sobě.

S použitím Galerkinovy metody konstruujeme z rovnice (1.46) soustavu lineárních algebraických rovnic pro tento vektor pro zvolené j, m . Každý řádek této soustavy odpovídá dosazení jedné testovací funkce $\{\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}\}$ nebo $\{\xi_k Y_{jm}\}$ do rovnice (1.46). Protože jsou jednotlivé SH vzájemně ortogonální, ve vztahu (1.41) je nulový skalární součin SH s rozdílnými hodnotami λ a j, m . Zároveň ve formě a spolu interagují pouze některé členy parametrizovaného magnetického pole, viz. další podkapitola. Většina maticových elementů bude tedy nulová, konkrétně se bude jednat o matice pásové.

2.2 Maticové elementy skalárního součinu

Při výpočtu maticových elementů dosazujeme SH a funkce popisující radiální diskretizaci ze vztahu (1.42) do vztahů pro skalární součin (1.31) a formu a (1.38), tj. pro jednotlivé maticové elementy řešíme skalární součiny,

$$\begin{aligned} \left(\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}, \psi_{k'} \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')} \right) &= \int_G \psi_k \psi_{k'} \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)} \cdot \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')} dV = \\ &= \int_c^a \psi_k(r) \psi_{k'}(r) r^2 dr \int_{\Omega} \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega) \cdot \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')}(\Omega) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Takto integrál rozdělit můžeme, protože SH jsou závislé pouze na laterálních souřadnicích, naopak ψ_k jsou funkce radiální. Protože radiální integrál je nenulový pouze pro $k = k'$ nebo $k = k' \pm 1$, jak je vidět z obrázku 1.2, můžeme za pomoci vztahu pro skalární součin dvou SH z přílohy A.1 obecný takový skalární součin vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \left(\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}, \psi_{k'} \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')} \right) &= N_{j\lambda} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'} \left[I_k^{(1)} \delta_{kk'} + \right. \\ &\quad \left. I_k^{(2)} \left(\delta_{k(k'-1)} + \delta_{k(k'+1)} \right) + I_k^{(3)} \delta_{kk'} \right], \end{aligned} \quad (2.3)$$

kde $I_k^{(i)}$ jsou integrály popsané níže,

$$I_k^{(1)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_k(r) r^2 dr = \frac{h_k}{30} (r_{k+1}^2 + 3r_{k+1}r_k + 6r_k^2), \quad (2.4)$$

$$I_k^{(2)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \psi_k(r) r^2 dr = \frac{h_k}{60} (3r_{k+1}^2 + 4r_{k+1}r_k + 3r_k^2), \quad (2.5)$$

$$I_k^{(3)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \psi_{k+1}(r) r^2 dr = \frac{h_k}{30} (6r_{k+1}^2 + 3r_{k+1}r_k + r_k^2). \quad (2.6)$$

2.3 Maticové elementy formy a

Pro maticové elementy formy a platí

$$a(\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}, \psi_{k'} \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')}) = \int_G \rho [\nabla \times (\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)})] \cdot [\nabla \times (\psi_{k'} \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')})] dV, \quad (2.7)$$

Zde musíme využít vztahů pro rotaci SH z přílohy A.1, ze kterých vyplývá, že forma kombinuje různé hodnoty λ . Vztah (2.7) tedy rozdělíme podle hodnoty λ' ,

$$a(\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}, \psi_{k'} \mathbf{S}_{j'm'}^{(-1)}) = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \Pi_j \left(\rho_{k-1} [\delta_{k(k'+1)} (\delta_{\lambda-1} K_{k-1}^{(2)} - \delta_{\lambda 1} K_{k-1}^{(8)}) + \right. \\ \left. \delta_{kk'} (\delta_{\lambda-1} K_{k-1}^{(3)} - \delta_{\lambda 1} K_{k-1}^{(10)})] + \rho_k [\delta_{kk'} (\delta_{\lambda-1} K_k^{(1)} - \delta_{\lambda 1} K_k^{(7)}) + \right. \\ \left. \delta_{k(k'-1)} (\delta_{\lambda-1} K_k^{(2)} - \delta_{\lambda 1} K_k^{(9)})] \right), \quad (2.8)$$

$$a(\psi_k \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}, \psi_{k'} \mathbf{S}_{j'm'}^{(1)}) = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \Pi_j \left(\rho_{k-1} [\delta_{k(k'+1)} (\delta_{\lambda 1} K_{k-1}^{(5)} - \delta_{\lambda-1} K_{k-1}^{(9)}) + \right. \\ \left. \delta_{kk'} (\delta_{\lambda 1} K_{k-1}^{(6)} - \delta_{\lambda-1} K_{k-1}^{(10)})] + \rho_k [\delta_{kk'} (\delta_{\lambda 1} K_k^{(4)} - \delta_{\lambda-1} K_k^{(7)}) + \right. \\ \left. \delta_{k(k'-1)} (\delta_{\lambda 1} K_k^{(5)} - \delta_{\lambda-1} K_k^{(8)})] \right), \quad (2.9)$$

kde $K_k^{(i)}$ jsou integrály popsané níže,

$$K_k^{(1)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_k(r) dr = \frac{h_k}{3}, \quad (2.10)$$

$$K_k^{(2)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \psi_{k+1}(r) dr = \frac{h_k}{6}, \quad (2.11)$$

$$K_k^{(3)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \psi_{k+1}(r) dr = \frac{h_k}{3}, \quad (2.12)$$

$$K_k^{(4)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \chi_k(r) \chi_k(r) dr = \frac{1}{3h_k} (r_{k+1}^2 - 2r_{k+1}r_k + 4r_k^2), \quad (2.13)$$

$$K_k^{(5)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \chi_k(r) \chi_{k+1}(r) dr = -\frac{1}{3h_k} (r_{k+1}^2 + r_{k+1}r_k + r_k^2), \quad (2.14)$$

$$K_k^{(6)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \chi_{k+1}(r) \chi_{k+1}(r) dr = \frac{1}{3h_k} (4r_{k+1}^2 - 2r_{k+1}r_k + r_k^2), \quad (2.15)$$

$$K_k^{(7)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \chi_k(r) dr = \frac{1}{6} (r_{k+1} - 4r_k), \quad (2.16)$$

$$K_k^{(8)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \chi_k(r) dr = -\frac{1}{6} (r_{k+1} + 2r_k), \quad (2.17)$$

$$K_k^{(9)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k(r) \chi_{k+1}(r) dr = \frac{1}{6} (2r_{k+1} + r_k), \quad (2.18)$$

$$K_k^{(10)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1}(r) \chi_{k+1}(r) dr = \frac{1}{6} (4r_{k+1} - r_k), \quad (2.19)$$

kde,

$$\chi_k = r \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \psi_k. \quad (2.20)$$

2.4 Hraniční podmínky

Hraniční podmínku na vnějším okraji pláště nastavíme pomocí vzorce (1.23) tak, že položíme maticový element u $B_{jm,N+1}^{(-1)}$ na 1, element u $B_{jm,N+1}^{(1)}$ na $j+1$, zbytek koeficientů v daném řádku matice vynulujeme a korespondující složku vektoru pravé strany nastavíme pevně na hodnotu $-(2j+1)G_{jm}^{(e)}(t)$, v našem případě tedy na nulu. Tuto složku vektoru pak v časovém průběhu neměníme, tedy po celou dobu průběhu vynucujeme požadovanou podmínku.

Pro podmínku na hranici pláště a jádra nastavíme element matice odpovídající $B_{jm,1}^{(1)}$ na 1, všechny ostatní elementy matice v daném řádku vynulujeme a korespondující složku vektoru pravé strany nastavíme na námi požadovaný koeficient $B_{jm,H}^{(1)}$ na CMB. V našem případě volíme buzení Heavisideovou funkcí, tedy položíme složku vektoru rovnou jedné, a jako výstupní hodnotu pak zaznamenáváme časovou derivaci (diskrétně, tedy rozdíl hodnot podělený časovým krokem) složky pole na povrchu.

2.5 Lagrangeovy multiplikátory

Nyní přejdeme k řešení integrálů ze vztahu 1.46. Díky použité parametrizaci nám na každém intervalu $[r_k, r_{k+1}]$ zůstanou pouze 4 integrály, podobně jako v podkapitolách o maticových elementech skalárního součinu a maticových elementech formy a . Ze vztahů pro divergence z přílohy A.1 tedy získáme maticové elementy,

$$L(\xi_k, \psi_{k'} \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')}) = \delta_{kk'} [\delta_{\lambda'-1} Q_k^{(1)} - \delta_{\lambda'1} \Pi_{j'} Q_k^{(2)}] + \delta_{k(k'-1)} [\delta_{\lambda'-1} Q_k^{(3)} - \delta_{\lambda'1} \Pi_{j'} Q_k^{(4)}], \quad (2.21)$$

kde $Q_k^{(i)}$ jsou integrály popsané níže,

$$Q_k^{(1)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \eta_k r^2 dr = -r_k^2, \quad (2.22)$$

$$Q_k^{(2)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_k r dr = \frac{1}{6} (r_{k+1}^2 + r_k r_{k+1} - 2r_k^2), \quad (2.23)$$

$$Q_k^{(3)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \eta_{k+1} r^2 dr = r_{k+1}^2, \quad (2.24)$$

$$Q_k^{(4)} = \int_{r_k}^{r_{k+1}} \psi_{k+1} r dr = \frac{1}{6} (2r_{k+1}^2 - r_{k+1} r_k - r_k^2), \quad (2.25)$$

kde

$$\eta_k = \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \psi_k. \quad (2.26)$$

3 Lineární filtr

3.1 Obrácená úloha

Obrácenou úlohu lze formulovat různými způsoby. Hagedoorn a Martinec ji ve svém článku [9] řeší iterativní minimalizací rozdílu v L_2 normě mezi pozorovanými a predikovanými SH koeficienty vnitřního pole na povrchu. Minimalizace se řeší vůči horizontálnímu poli na CMB, které je prostorově parametrizováno sférickými harmonikami a v čase pomocí B-spline funkcí. Je použita adjungovaná metoda pro výpočet citlivosti misfitu na změny modelových parametrů.

V případě sféricky symetrické vodivostní funkce můžeme však obrácenou úlohu formulovat také jako dekonvoluci časového signálu. Linearita, kauzalita a separace podle sférického harmonického stupně a řádu vedou k tomu, že řešení přímé úlohy lze zapsat též ve tvaru

$$G_{jm}^{(i)}(t) = -B_{jm}^{(1)}(c; 0) \left(\frac{c}{a}\right)^{j+2} + \int_{\tau=0}^{\infty} P_j(\sigma, \tau) B_{jm}^{(1)}(c; t - \tau) d\tau, \quad (3.1)$$

kde $P_j(\sigma, \tau)$ je poloidální impulsová odezva vnitřního pole na povrchu. Výraz před integrálem odpovídá geometrickému prodloužení počáteční podmínky.

Funkci odezvy můžeme získat řešením přímé úlohy (1.41) pro nulovou počáteční podmínku $\mathbf{B}_0 = 0$ a hraniční podmínku na CMB $B_{jm}^{(1)}(c, t) = \delta(t = 0)$. Alternativně můžeme místo δ -funkce použít Heavisideovu funkci a výsledek derivovat podle času. Dekonvolucí výrazu (3.1) pro daný časový průběh $G_{jm}^{(i)}(t)$ obdržíme přímo koeficient horizontálního magnetického pole na CMB, $B_{jm}^{(1)}(c; t)$.

3.2 Fourierova transformace

Následující podkapitoly čerpají z [10].

Fourierova transformace (FT) převádí funkci do frekvenční oblasti, tedy místo časově závislé funkce vytvoří funkci frekvenčně závislou, která nese stejnou informaci. Protože je FT unitární, existuje inverze, které říkáme zpětná Fourierova transformace. FT a zpětnou FT definujeme jako

$$\mathcal{F}(f(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}(f(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i2\pi\xi x} dx, \quad (3.2)$$

a její diskrétní podobu, kterou budeme používat,

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n / N}, \quad h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n / N}, \quad (3.3)$$

kde h_n a H_n jsou diskrétní paralely k $f(\xi)$ a $\mathcal{F}(f(\xi))$.

Důležitou vlastností je, že FT konvoluce dvou funkcí je rovná násobku FT těchto funkcí, tedy

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g), \quad (3.4)$$

což znamená, že pokud chceme provést konvoluci, můžeme proces značně urychlit, protože konvoluce jako přímý výpočet může být při velkém množství dat zdoluhavá.

Hlavní výhodou použití FT pro nás je, že převádí úlohu dekonvoluce, která se nedá řešit přímo, na obyčejný podíl,

$$f = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}(f * g)}{\mathcal{F}(g)} \right). \quad (3.5)$$

3.3 Rychlá Fourierova transformace

Kdybychom prováděli diskretní fourierovu transformaci přímo ze vztahu (3.3), tento proces by měl časovou náročnost $O(N^2)$. Rychlá Fourierova transformace, neboli *Fast Fourier transform* (FFT) je metoda, která zvládne FT získat s rychlostí $O(N \log_2 N)$ pomocí Danielson-Lanczosova lemmatu, které říká, že diskretní Fourierovu řadu délky 2^n lze rozdělit na 2 diskretní fourierovy řady délky 2^{n-1} , jednu pro liché členy, jednu pro sudé. To se dá aplikovat rekurzivně tak, že výsledek fourierovy transformace v daném bodě získáme správným přeskládáním vstupních dat a jejich posčítáním se správnými koeficienty.

Princip této metody je také důvodem, proč jsou data rozšířena nulami, aby výsledná délka časové řady byla mocninou 2.

3.4 Úpravy na cyklické funkce

Při provádění konvoluce pomocí FT musí být vstupní funkce cyklická, výstupní funkce bude cyklická také. To by mohlo znamenat pouze vzít původní funkci a periodicky ji rozšířit na intervalu $\mathbb{R}$. Zde ale nastává problém, že konvoluce „promítne“ nějaká data z konce intervalu na jeho začátek, a naopak (pro nás je relevantní pouze první z těchto dvou, protože funkce odezvy má pouze budoucí složku). Řešením je rozšířit data nulami na konci, pak z konce intervalu na začátek promítneme pouze nulu, a ze začátku na konec promítneme data do oblasti, která neobsahuje užitečnou informaci.

3.5 Vysoké frekvence

Protože u dekonvoluce pomocí FT (3.5) probíhá dělení, může nastat problém v případě, že se člen $\mathcal{F}(g)$ blíží nule. To může nastat v případě, že diskretní FT provádíme do příliš vysokého řádu N (3.3), hodnoty v takovém případě totiž s rostoucím řádem prudce klesají. V takovém případě nám sice metoda FFT konverguje, ovšem k nesmyslným výsledkům, musíme tedy před zpětnou FT ve vztahu (3.5) nastavit vyšší frekvence rovné nule. Použitím takového filtru (dolní propust, low-pass filter) samozřejmě přicházíme o informaci potenciálně obsaženou v těchto vyšších frekvencích, odstraňujeme ale značně větší numerickou chybu. Budeme tedy srovnávat výsledky pro různé volby hranice dolní propusti N_{LP} , řád FFT se takto nemění, pouze se vyšší frekvence nulují. Výsledky můžeme porovnat s daty získanými jinou metodou (např. již zmíněná metoda použitá ve článku [9]).

Dolní propust ve frekvenční oblasti znamená, že položíme hodnoty u všech frekvencí vyšších, než zadaná hraniční hodnota, rovné nule, ponecháme pouze frekvence nižší, můžeme se takto zbavit nežádoucího šumu. Pokud řekneme, že v diskretních datech použijeme dolní propust na frekvenci N_{LP} , znamená to, že

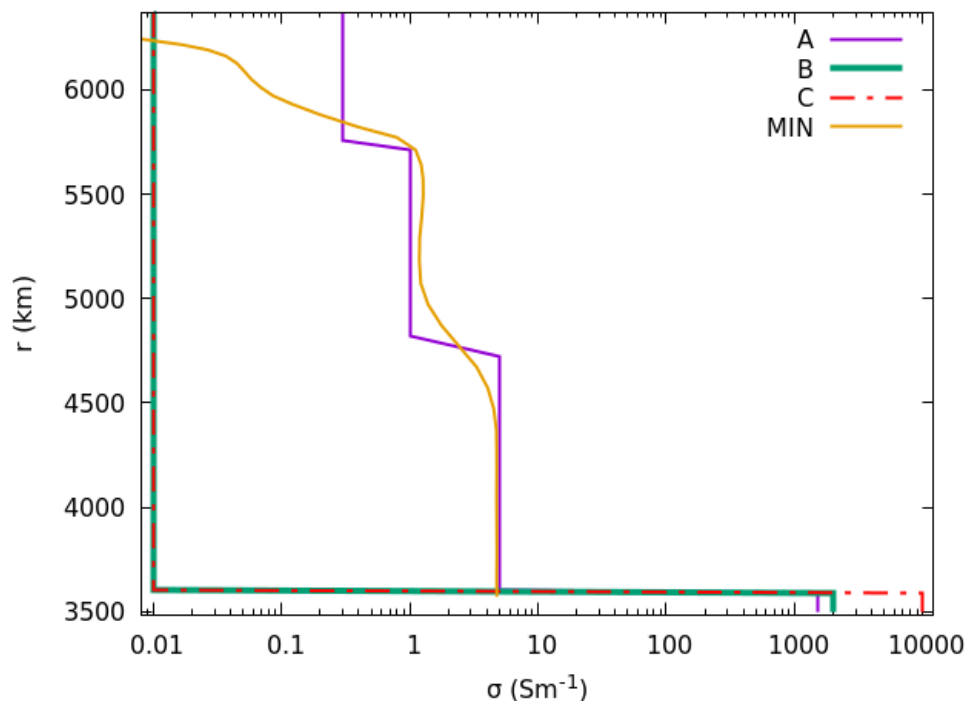
ve vztahu (3.3) ve zpětné FT (z frekvenční oblasti do časové) nulujeme všechny koeficienty pro $k > N_{LP}$.

4 Řešení úlohy

4.1 Použité vodivostní modely a funkce odezvy

Poloidální funkce impulsové odezvy P_j byly spočteny pro několik vodivostních modelů. Syntetické modely A, B, C byly převzaty ze článku [9]. Všimněme si, že modely B a C mají konstantní nízkou vodivost na téměř celém plášti, společně s modelem A pak mají tenkou vysoce vodivou vrstvu blízko jádra, tato vrstva má nejvyšší vodivost pro model C, pak B, A.

Poslední model, MIN_1DM_501, dále označovaný zkratkou MIN, byl získán sdruženou 1-D inverzí satelitních dat mise Swarm, která využívá magnetosférické a slapové oceánické buzení, metodika je popsána v práci [11]. Tato data ovšem ztrácejí citlivost na velmi hluboké partie pláště, model MIN nepopisuje žádný vodivostní skok v blízkosti CMB, průběh vodivosti s hloubkou je tam již silně regularizován. Všechny modely jsou zobrazeny v obrázku 4.1.



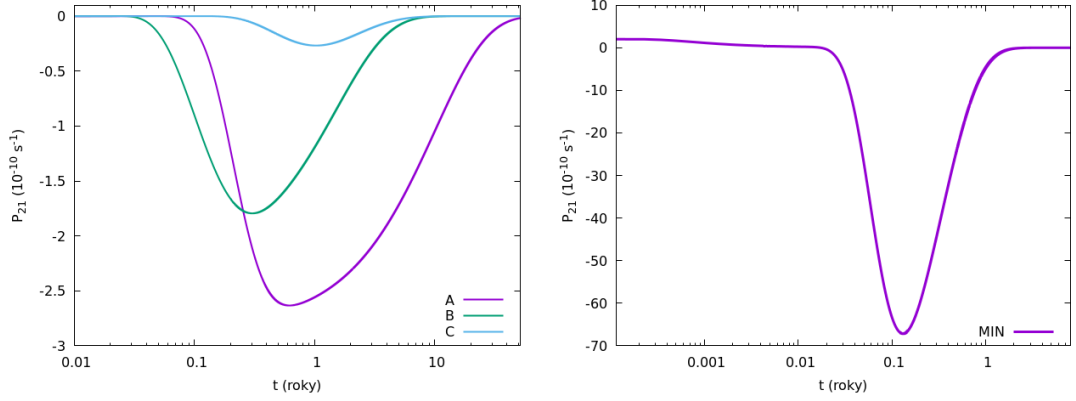
Obrázek 4.1 Použité vodivostní modely

Na obrázcích 4.2, 4.3, 4.4 jsou vyobrazené spočtené impulsové odezvy P_j pro vodivostní modely A, B, C, MIN a SH stupně $j = 2, 3, 4$. Odezva pro vodivostní model MIN je vyobrazena zvlášť, protože je řádově větší než ostatní a odehrává se na znatelně menší časové škále.

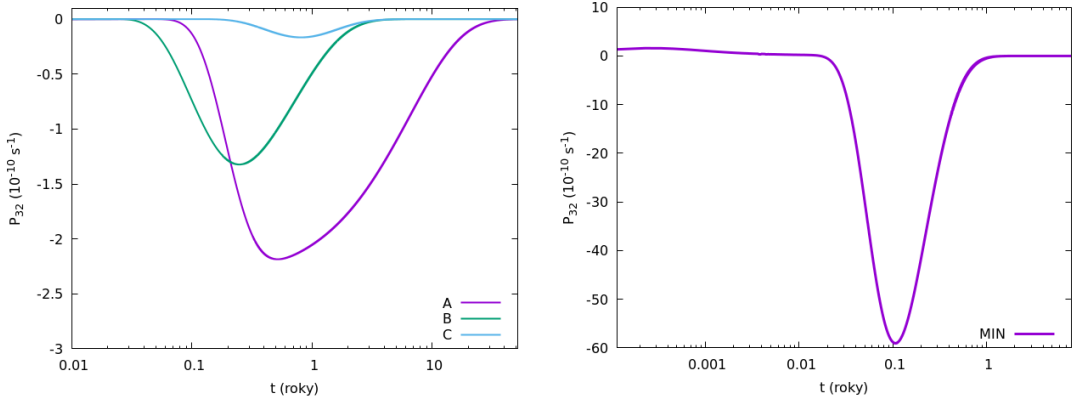
Z těchto grafů vidíme, že odezva pro model MIN má nejvyšší amplitudu, impuls má však nejmenší šířku, poloha (záporného) maxima je také posunutá nejvíce doleva, pole tedy skrz plášť popsaný tímto modelem propaguje nejrychleji. Odezva pro model A má zhruba třicetkrát menší amplitudu a zhruba třicetinásobnou šířku, odhadem je tedy plocha pod křivkou obou funkcí srovnatelná.

Amplituda i šířka odezvy modelu B jsou menší než ta u modelu A, u modelu C jsou ještě menší. Poloha hlavního peaku je nejbližší k nule u modelu MIN, pak B, A, C.

Všechna tato srovnání platí pro všechny 3 použité stupně j , s rostoucím stupněm j pak pro všechny funkce odezvy klesá amplituda.



Obrázek 4.2 Impulsové odezvy pláště na stupni $j=2$ pro vodivostní modely A, B, C (vlevo) a MIN (vpravo)



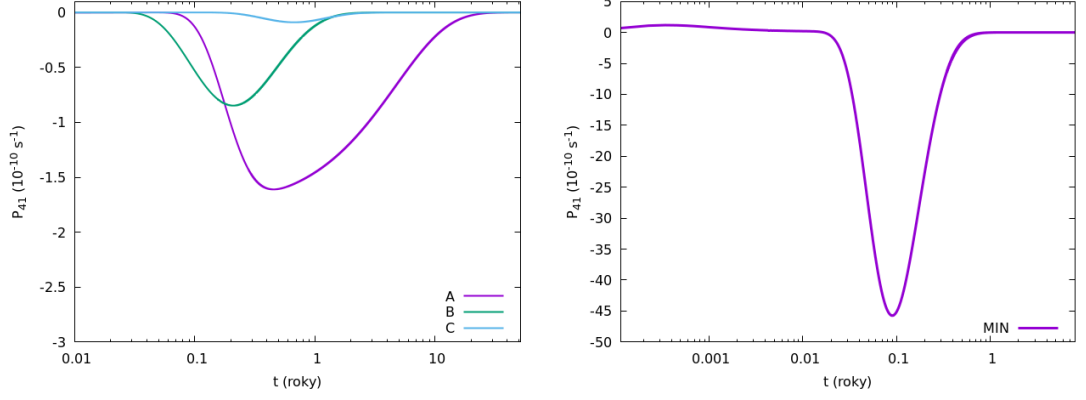
Obrázek 4.3 Impulsové odezvy pláště na stupni $j=3$ pro vodivostní modely A, B, C (vlevo) a MIN (vpravo)

4.2 Výsledky dekonvoluce

V této sekci jsou použity výše spočtené funkce impulsové odezvy pro jednotlivé vodivostní modely k řešení obrácené úlohy, tedy k rekonstrukci horizontální složky magnetického pole na CMB. Používáme koeficienty g_{21} (zn. g0201)¹, g_{32} (zn. g0302) a g_{41} (zn. g0401) z modelu geomagnetického pole C3FM [12], který zahrnuje interval let 1957-2008.

Každá časová řada koeficientů je zobrazená v jednom grafu, po kterém vždy následují 4 skupiny po 4 grafech, každá z těchto skupin zobrazuje výsledky

¹Použitím malého g_{jm} znamená, že koeficienty jsou vyjádřeny ve Schmidově semi-normalizaci a je nutné je přeskálovat na $G_{jm}^{(i)}$ v plné normalizaci, které používáme v této práci.



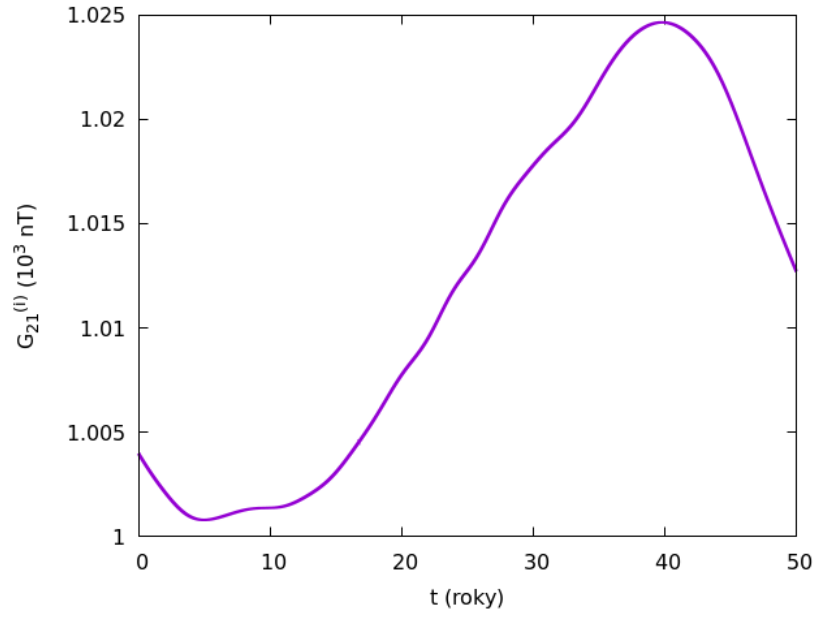
Obrázek 4.4 Impulsové odezvy pláště na stupni $j=4$ pro vodivostní modely A, B, C (vlevo) a MIN (vpravo)

dekonvoluce, s použitím dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$, jak bylo diskutováno v podkapitole 3.5. Protože jsou data v časových řadách zaznamenána po hodině, a celkový záznam (včetně prodloužení na nejmenší vyšší mocninu dvou) je dlouhý 524288 hodin (tj. asi 60 let), vidíme ze vztahu (3.3), že tak propouštíme pouze periody delší než 5,985 roku, 2,993 roku, 1,995 roku a 1,496 roku v tomto pořadí, kratší periody ořízneme.

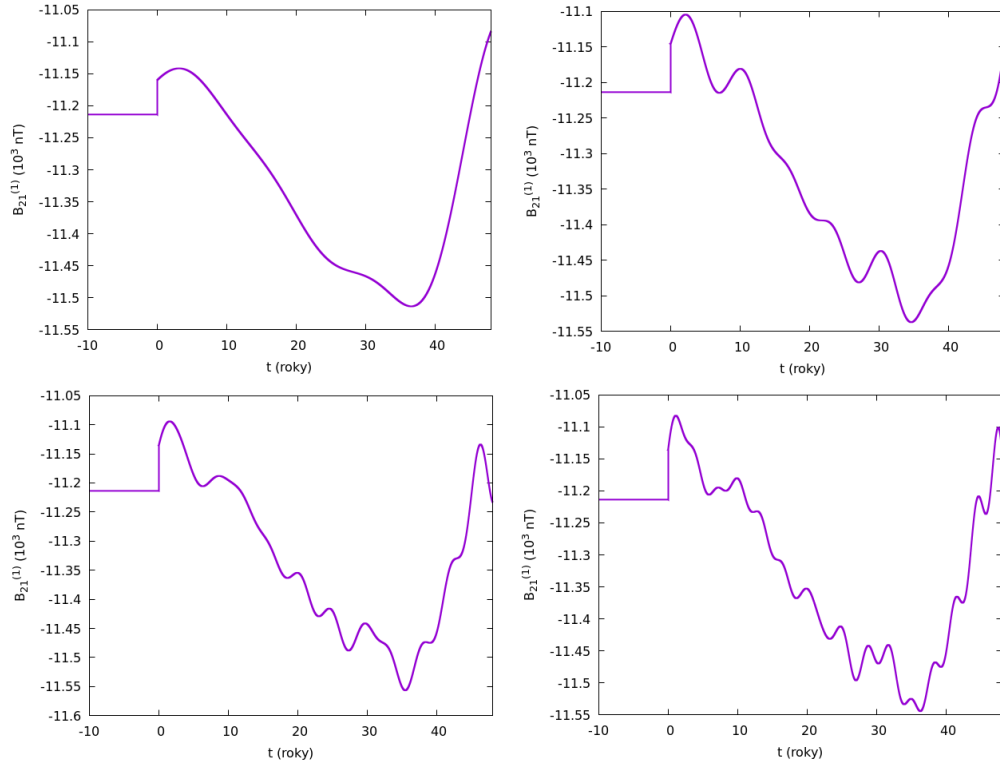
Pro časovou řadu g0201 je vykreslené vstupní pole na obrázku 4.5, výsledky dekonvoluce 4.6, 4.7 4.8, 4.9. Pro řadu g0302 vstup 4.10 a výsledky dekonvoluce 4.11, 4.12, 4.13, 4.14. Pro řadu g0401 vstup 4.15 a výsledky dekonvoluce 4.16, 4.17, 4.18, 4.19.

Ze získaných výsledných koeficientů $B_{jm}^{(1)}$ na CMB vidíme, že k největšímu útlumu nestatické složky magnetického pole dojde u modelu C, dále B, A, MIN, a to pro všechny 3 použité vstupní řady koeficientů. Také vidíme, že největší vliv má použitá dolní propust u vodivostního modelu A, dále B, C, MIN.

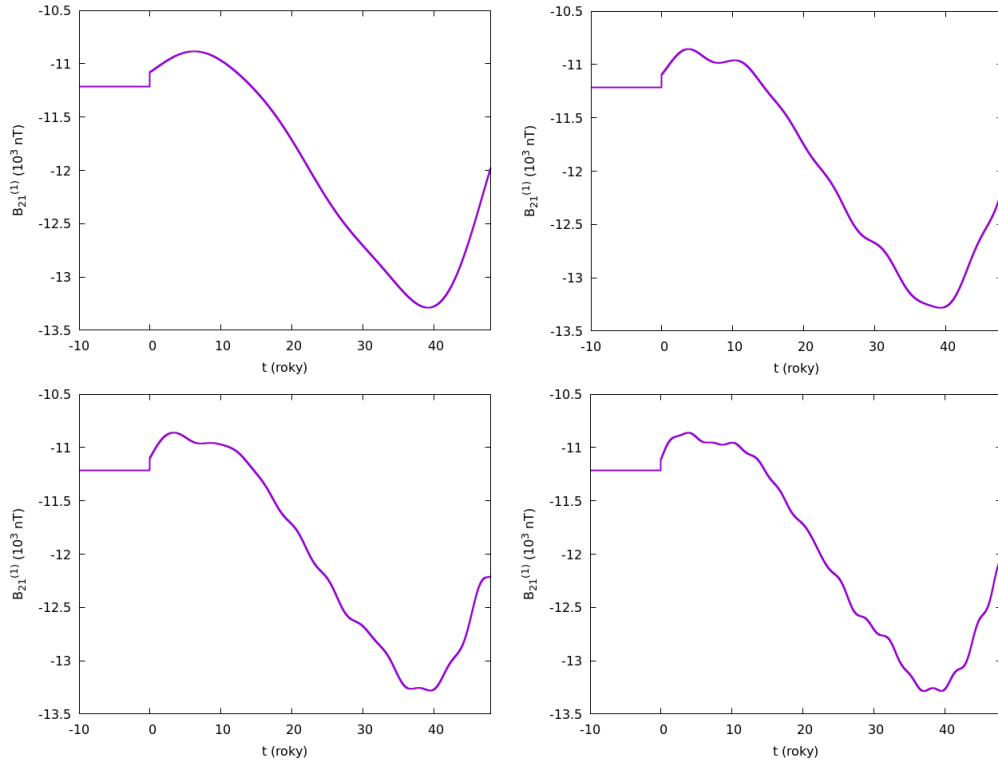
Výsledky dekonvoluce z obrázků 4.6, 4.11, 4.16 vykazují tvarovou shodu s řešením obrácené úlohy adjungovanou metodou [9]. Liší se ovšem škálování, protože autoři [9] invertují vertikální složku magnetického pole na povrchu a používají jinou definici sférických harmonik. Nejlépe pak zobrazeným grafům odpovídají získané grafy s použitým dolní propustí $N_{LP} = 20$.



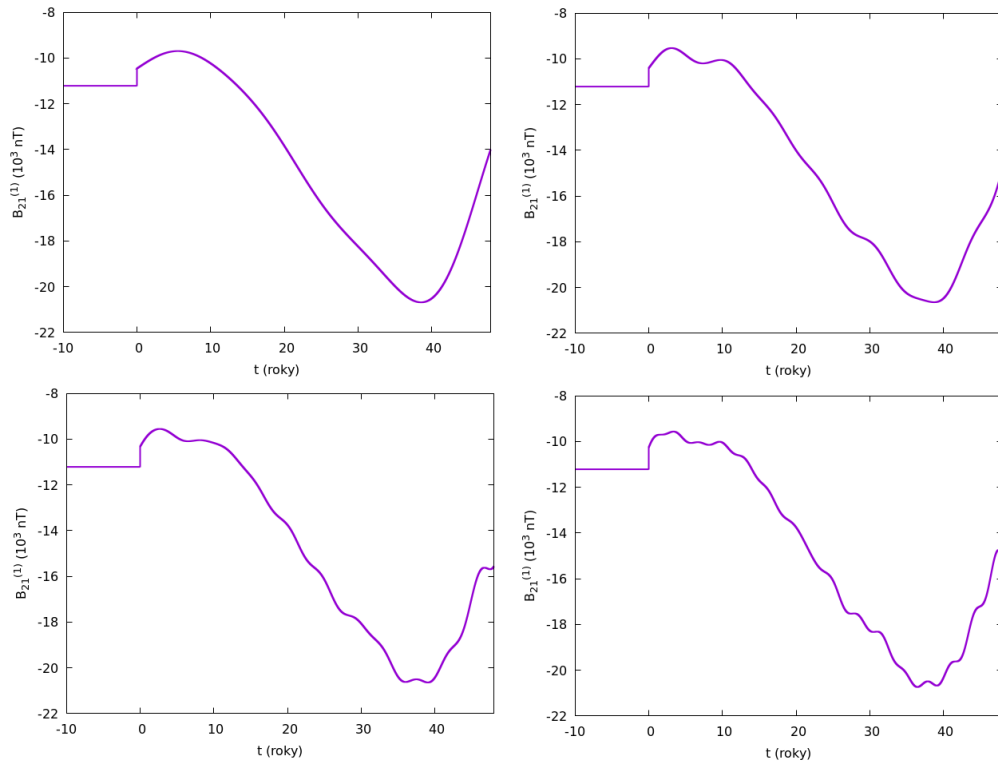
Obrázek 4.5 Časová řada koeficientů $G_{21}^{(i)}$ g0201 na povrchu Země



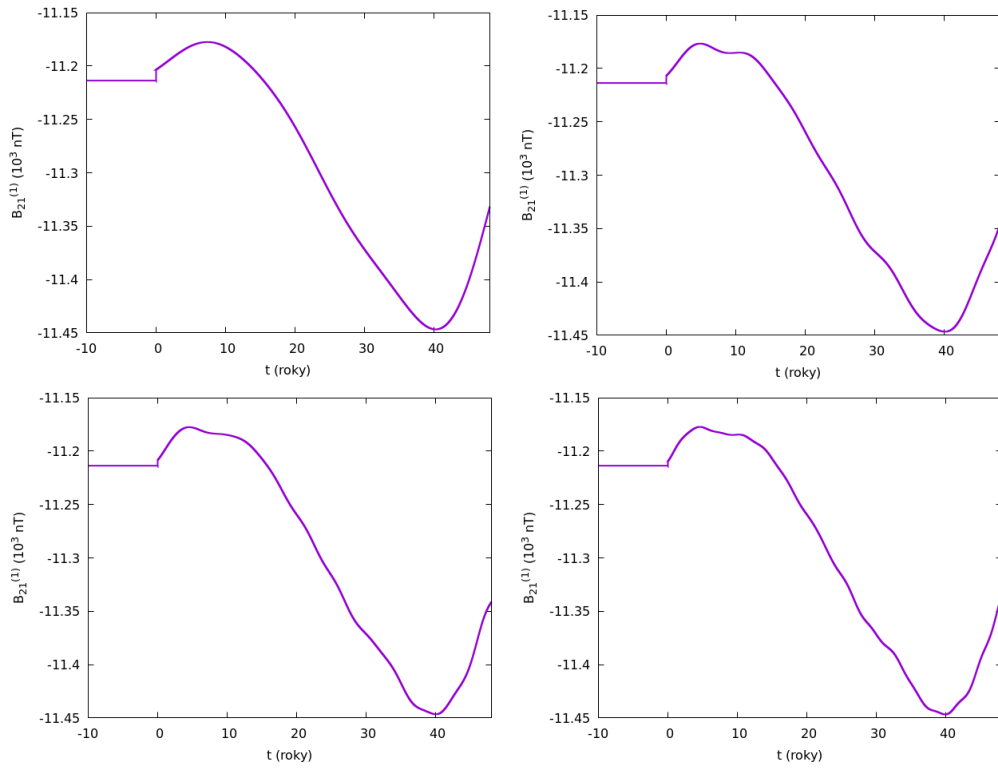
Obrázek 4.6 Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem A aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



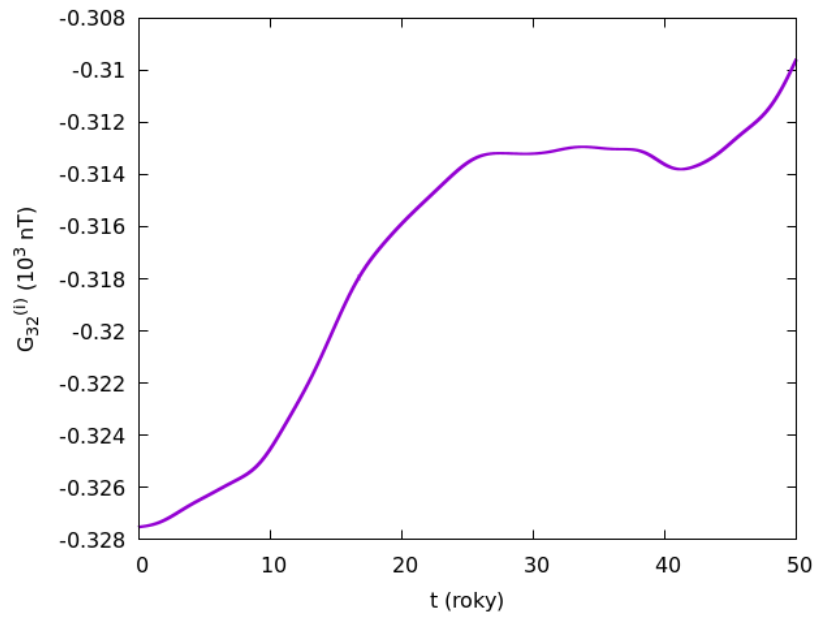
Obrázek 4.7 Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem B aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



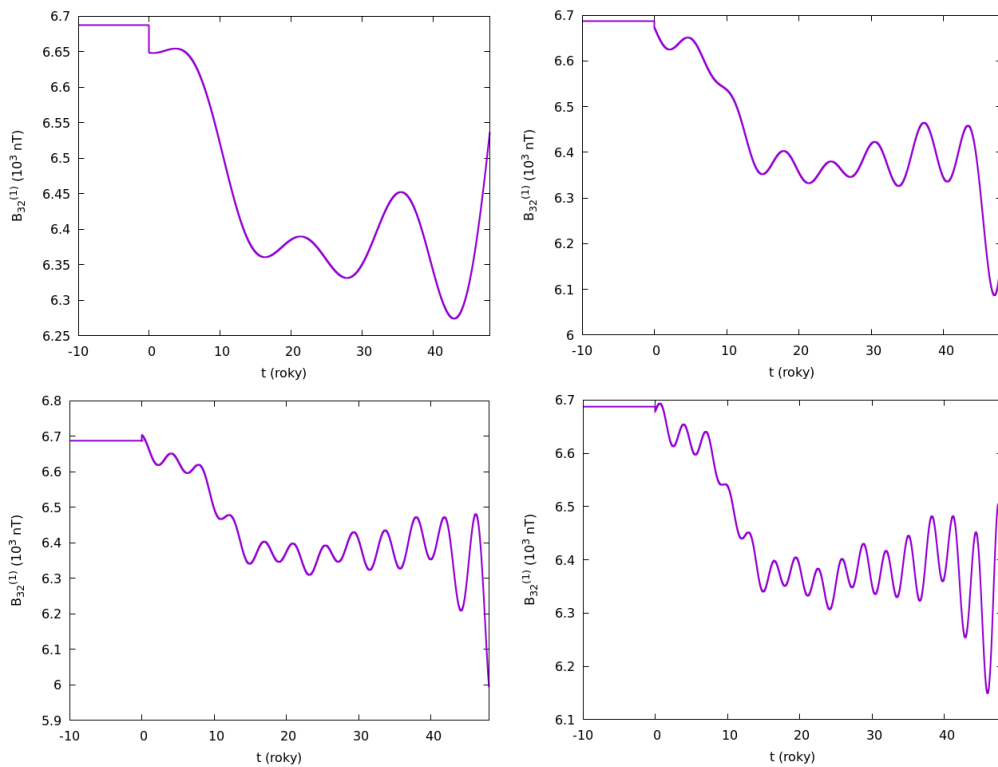
Obrázek 4.8 Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem C aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



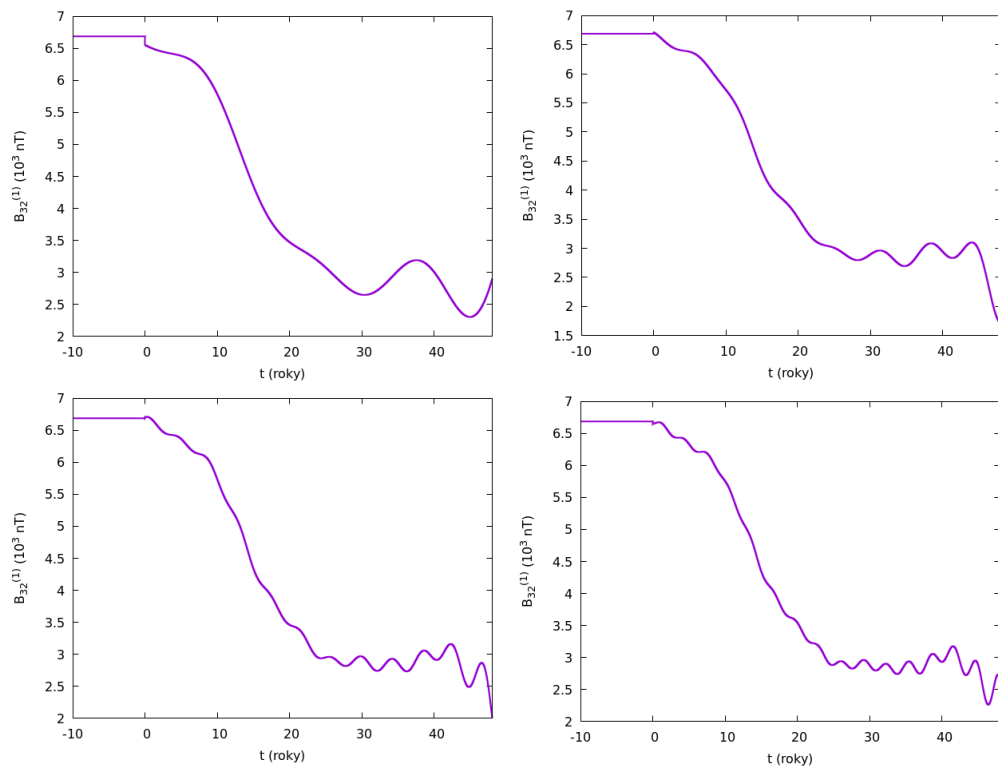
Obrázek 4.9 Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem MIN aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



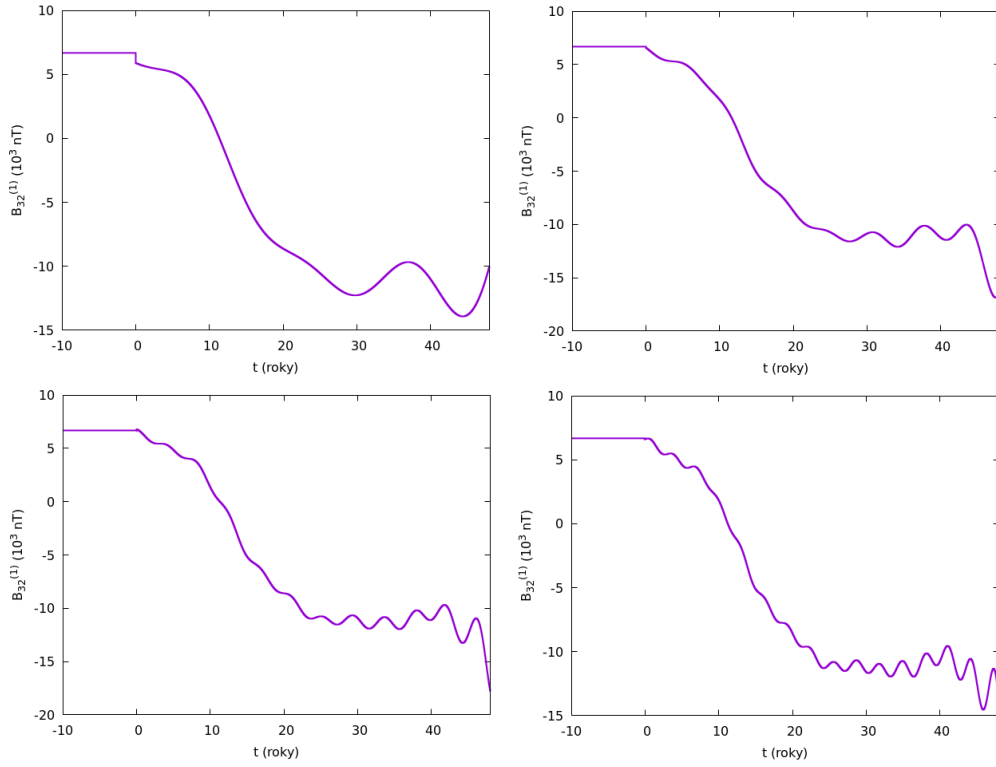
Obrázek 4.10 Časová řada koeficientů $G_{32}^{(i)}$ g0302 na povrchu Země



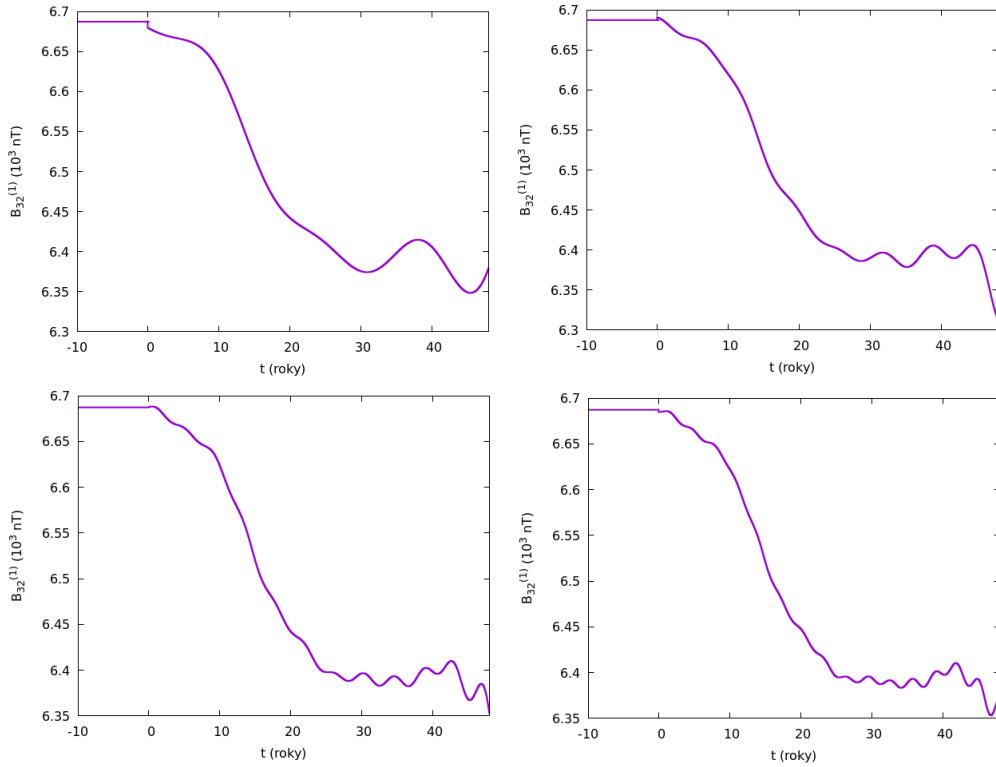
Obrázek 4.11 Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem A aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



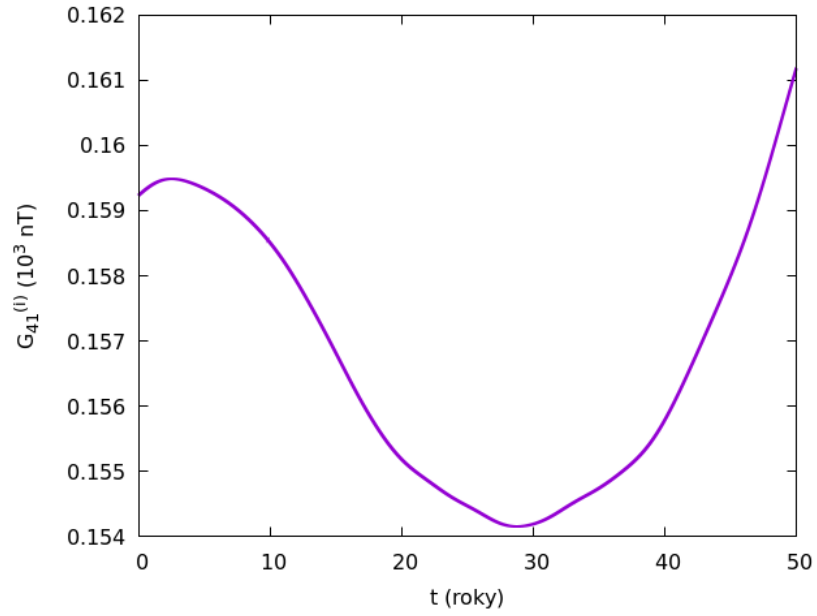
Obrázek 4.12 Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem B aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



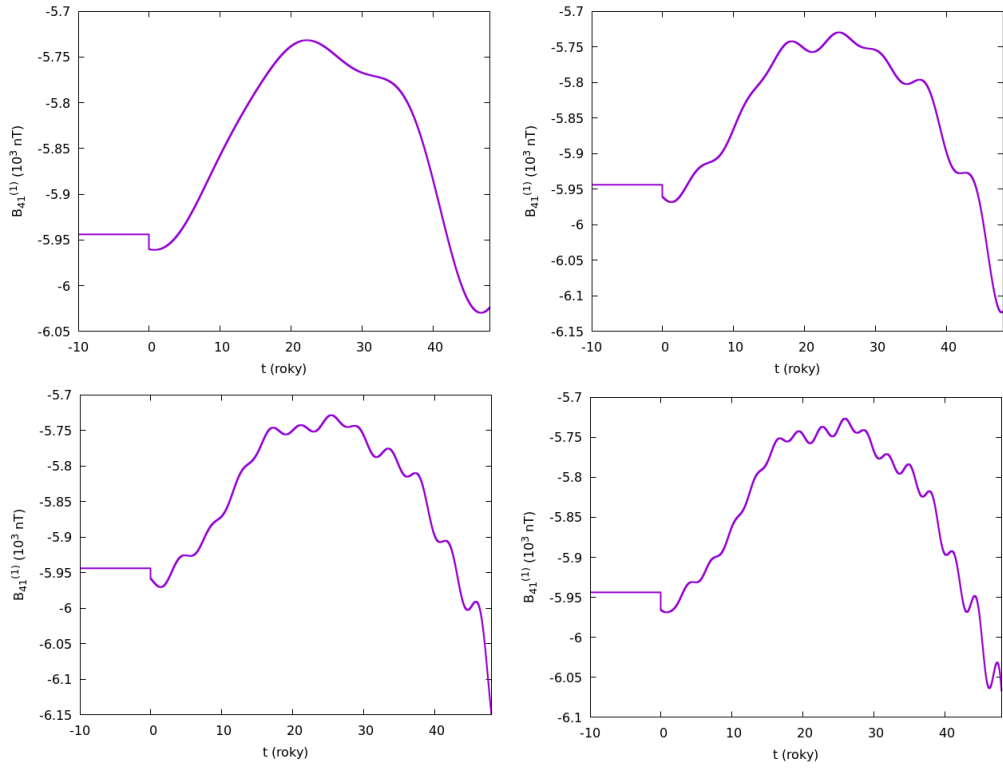
Obrázek 4.13 Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem C aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



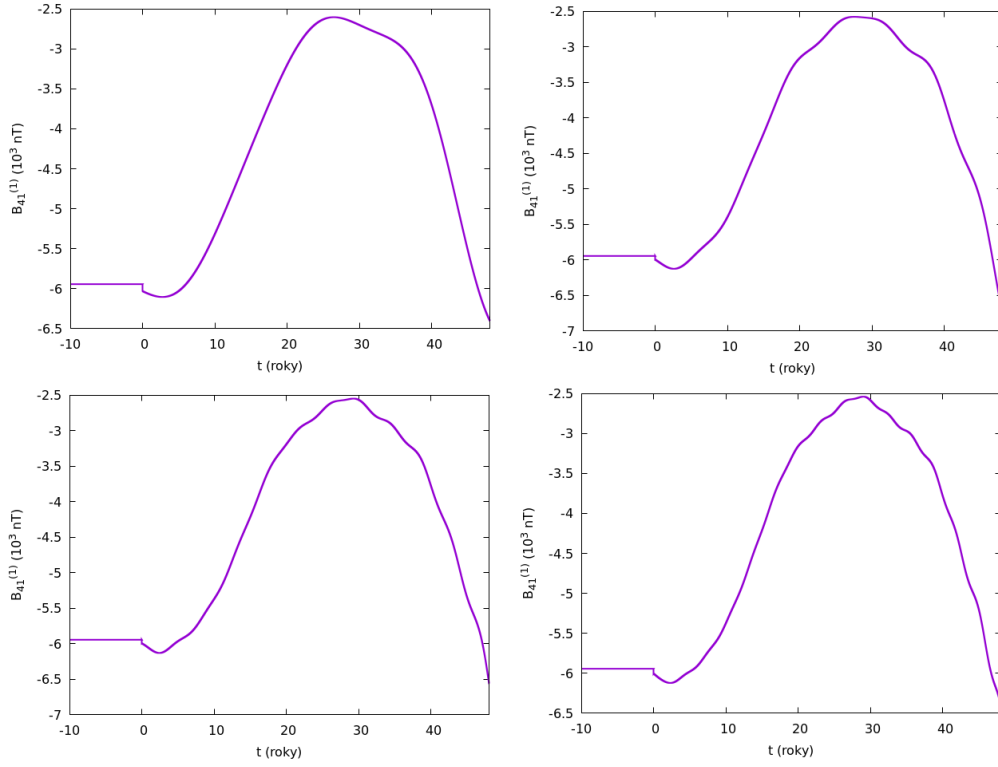
Obrázek 4.14 Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem MIN aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



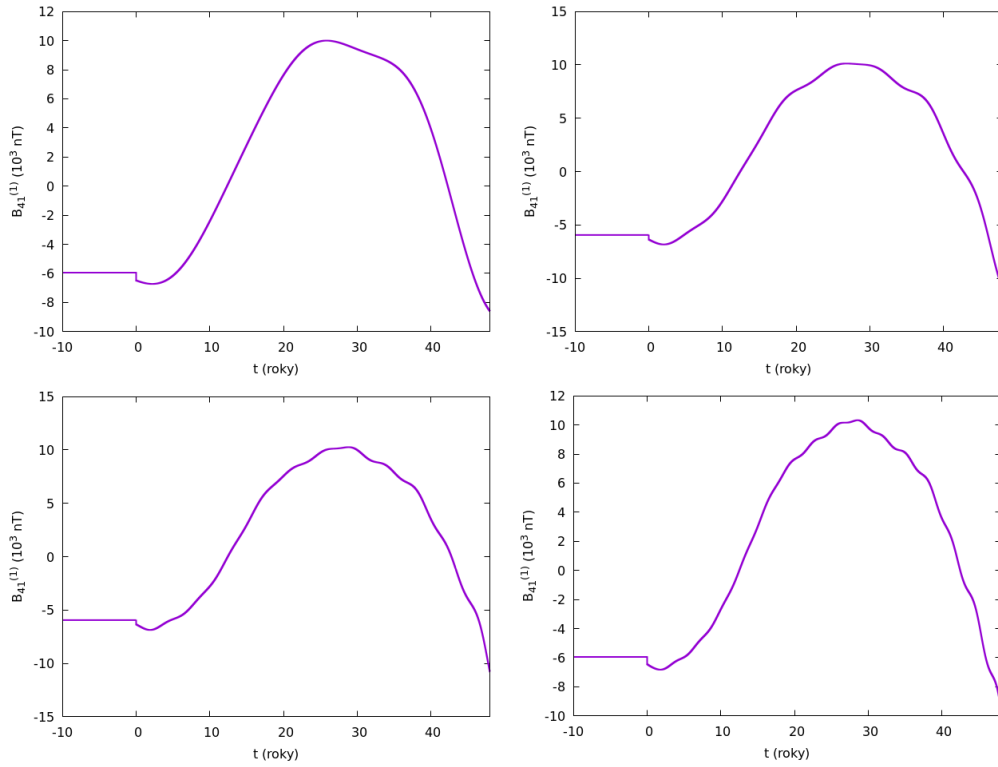
Obrázek 4.15 Časová řada koeficientů $G_{41}^{(i)}$ g0401 na povrchu Země



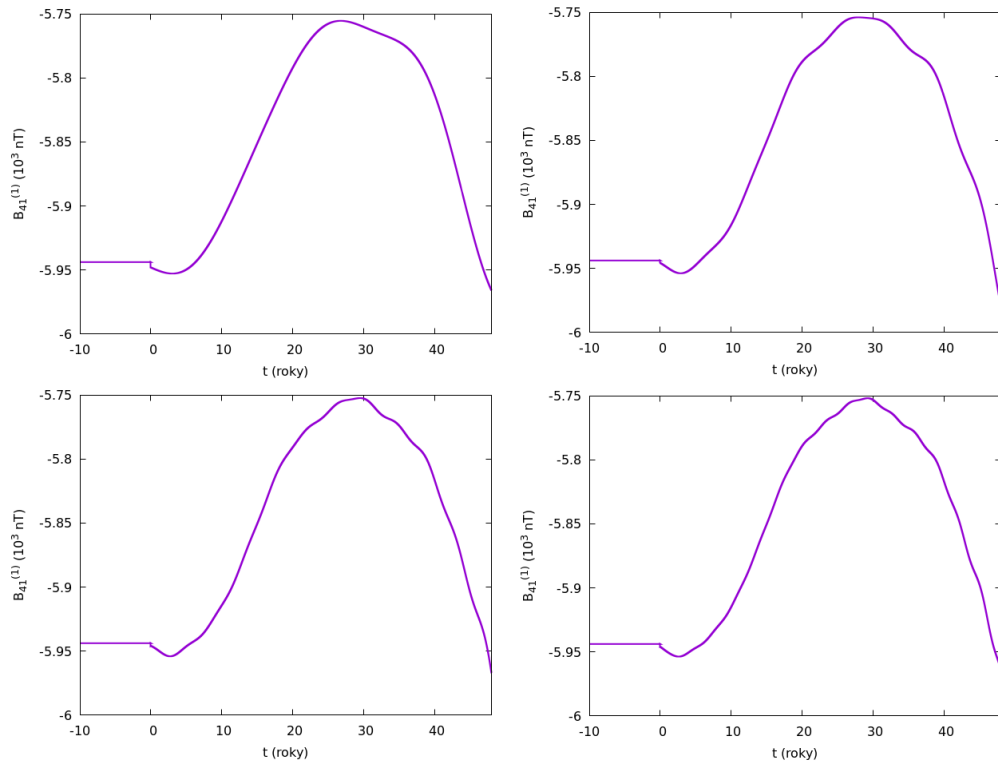
Obrázek 4.16 Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem A aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



Obrázek 4.17 Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem B aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



Obrázek 4.18 Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem C aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$



Obrázek 4.19 Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem MIN aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$

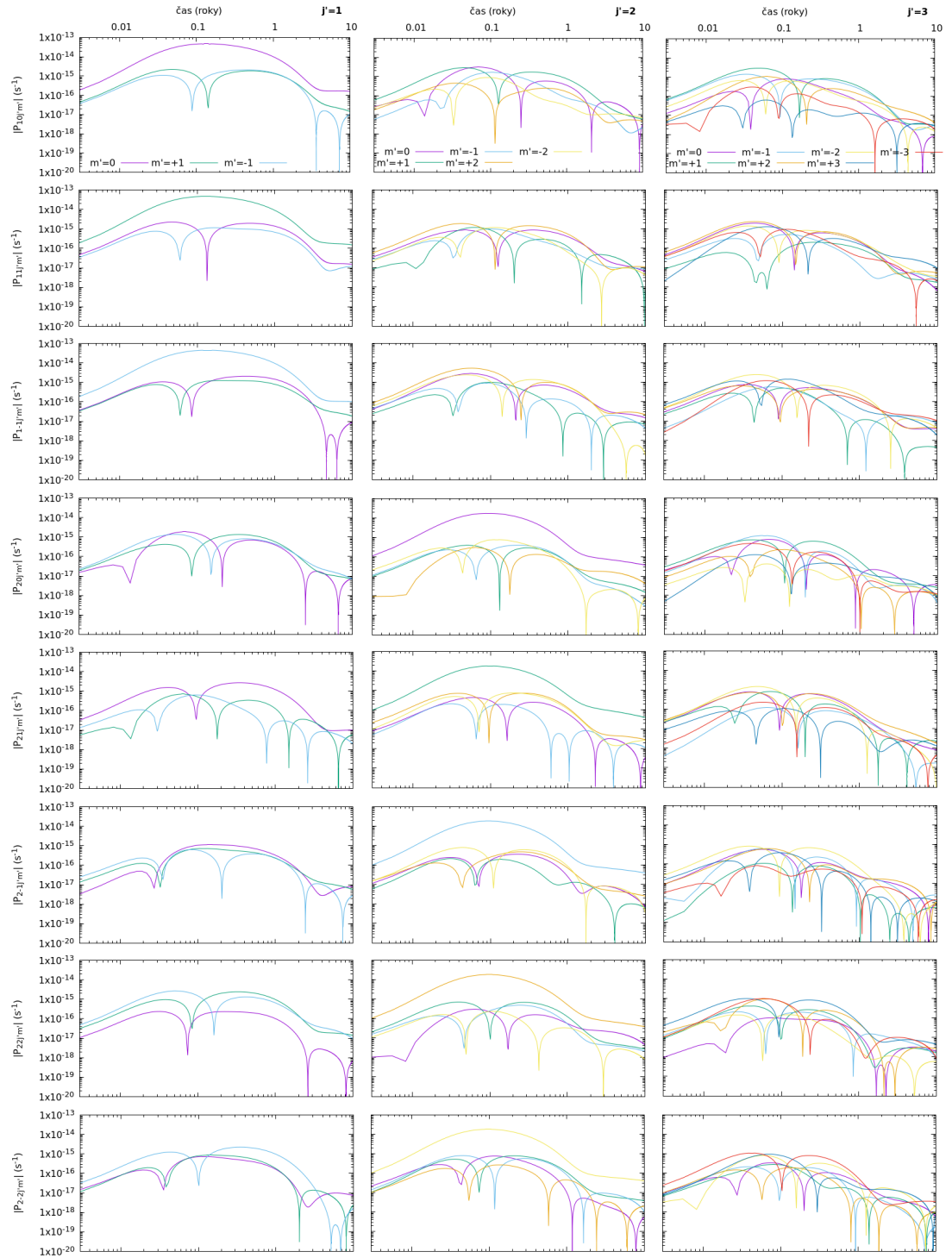
5 Přímá úloha ve 3-D

Pro laterálně proměnnou vodivost $\sigma = \sigma(\mathbf{r})$ v zemském plášti neplatí, že jsou navzájem separované jednotlivé stupně a řády sférických harmonik j, m , ani toroidální a poloidální pole. Problém je stále lineární, ale jednotlivé koeficienty vnitřního pole na povrchu odpovídají lineární kombinaci různých filtrů, aplikovaných na jednotlivé koeficienty poloidálního i toroidálního pole na CMB. Rovnice (3.1) se tak mění na maticový konvoluční filtr,

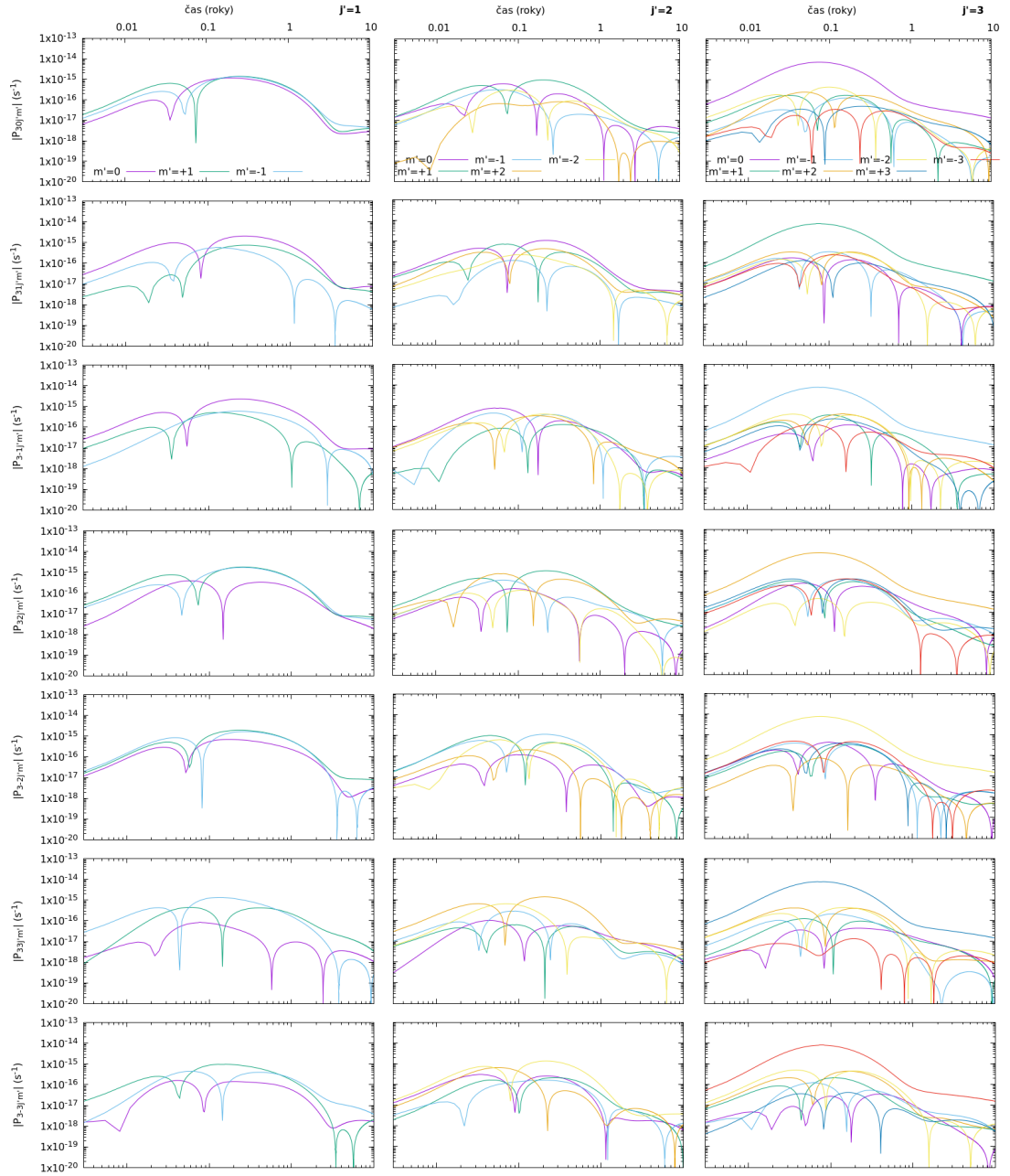
$$G_{jm}^{(i)}(t) = -B_{jm}^{(1)}(c; 0) \left(\frac{c}{a}\right)^{j+2} + \sum_{j'm'} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} P_{jmj'm'}(\sigma, \tau) B_{j'm'}^{(1)}(c; t - \tau) d\tau + \int_{\tau=0}^{\infty} T_{jmj'm'}(\sigma, \tau) B_{j'm'}^{(0)}(c; t - \tau) d\tau \right]. \quad (5.1)$$

Na obrázcích 5.1 a 5.2 jsou zobrazeny poloidální, na obrázcích 5.3 a 5.4 pak toroidální funkce impulsové odezvy do SH stupně a řádu 3 na CMB i na povrchu. Byly spočteny 3-D kódem školitele pro vodivostní model CUP20-OSC5 [13].

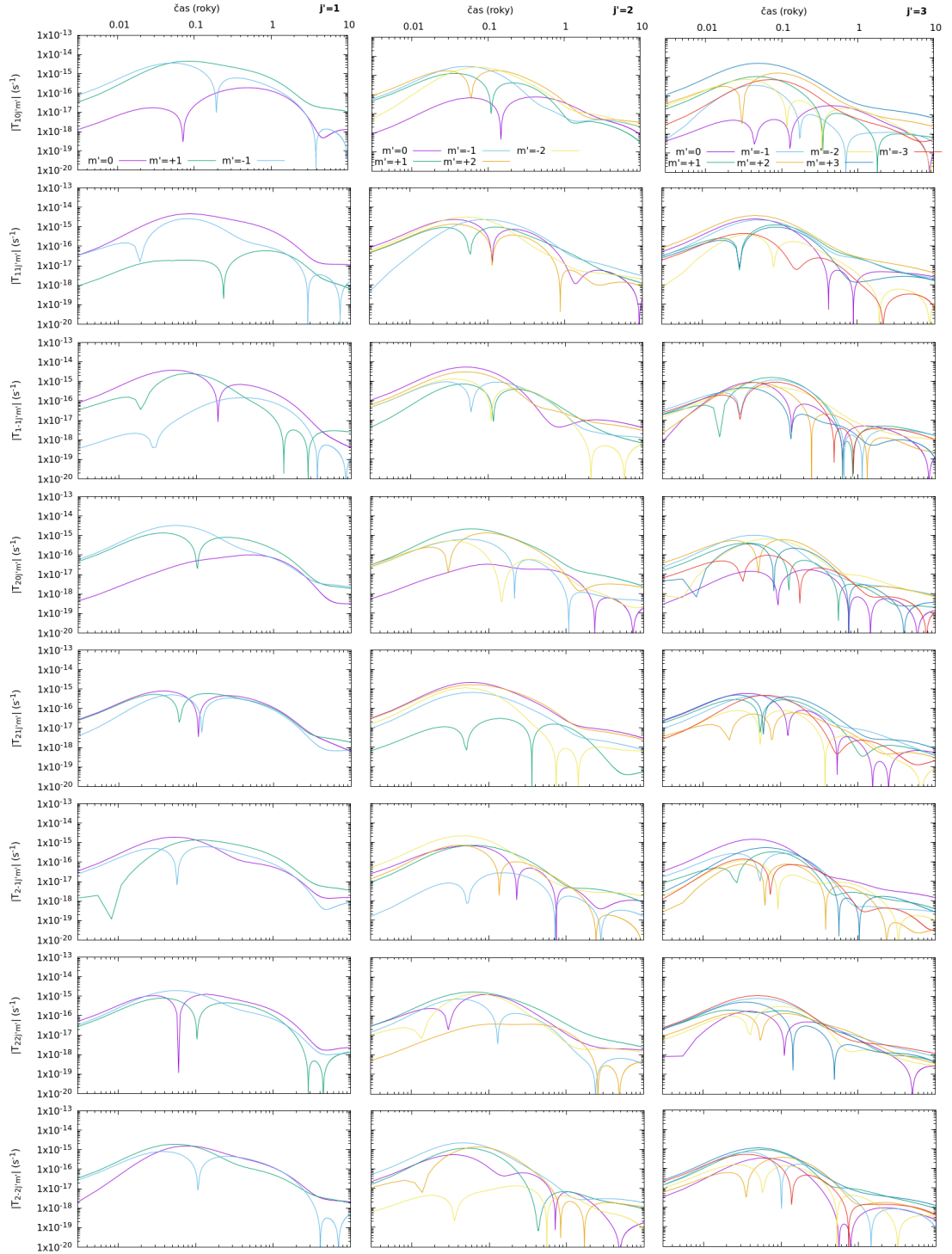
Je vidět, že pro poloidální funkce odezvy vždy dominuje diagonální složka, tedy $j = j'$ a $m = m'$. Dominantní je tedy 1-D průběh vodivosti. Větší vliv laterálních variací vodivosti by bylo možné očekávat pro velkoškálové variace elektrické vodivosti v těsné blízkosti CMB, které mohou být různého původu (velké provincie nízkých rychlostí střížných vln - LLSVP, přítomnost fáze post-perovskitu, průnik železa z jádra do pláště). Tyto otázky ale přesahují téma této bakalářské práce.



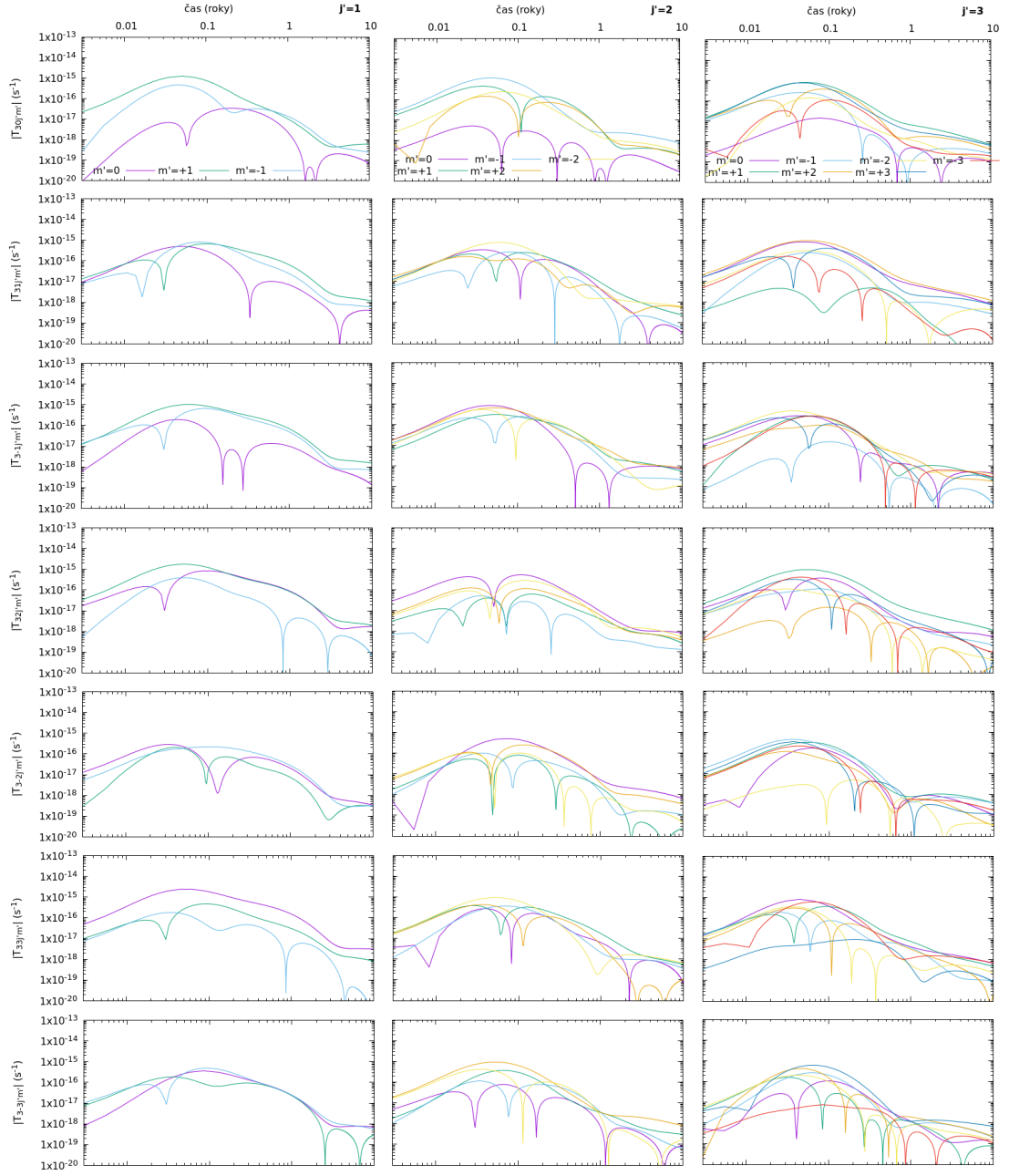
Obrázek 5.1 Maticové 3-D Odezvy $|P_{jmj'm'}|$ pro $j = 1, 2$ (odezvy jsou vykresleny v absolutní hodnotě, aby bylo možné vzájemně porovnat větší množství funkcí v logaritmickém měřítku na ose y)



Obrázek 5.2 Maticové 3-D Odezvy $|P_{jmj'm'}|$ pro $j = 3$



Obrázek 5.3 Maticové 3-D Odezvy $|T_{jmj'm'}|$ pro $j = 1, 2$



Obrázek 5.4 Maticové 3-D Odezvy $|T_{jmj'm'}|$ pro $j = 3$

Závěr

Odvodili jsme vztahy pro popis úlohy propagace magnetického pole z povrchu jádra skrz zemský plášť, popsany sféricky symetrickým vodivostním modelem. Sepsali jsme program ve Fortranu, který takto zadanou úlohu pro daný vodivostní model řeší numericky a použitím převzatých vodivostních modelů a buzení delta-funkcí na povrchu jádra jsme získali funkce odezvy propagace z horizontální poloidální složky magnetického pole na CMB do vnitřních koeficientů SH na povrchu Země, pro 3 hodnoty SH stupně $j = 2, 3, 4$.

Dále jsme definovali obrácenou úlohu jako dekonvoluci časových řad vnitřních koeficientů SH pomocí získaných funkcí odezvy. Ukázali jsme, že vhodným způsobem řešení dekonvoluce je použití Fourierovy transformace. Sepsali jsme program ve Fortranu, který dekonvoluci provedl s použitím rychlé Fourierovy transformace. Při dekonvoluci jsme provedli úpravy na cyklické funkce a před zpětnou FT jsme nechali data projít dolní propustí, abychom zamezili vzniku nechtěných artefaktů. Pomocí tohoto programu jsme z převzatých dat vertikální poloidální složky magnetického pole na povrchu Země spočítali horizontální poloidální složky magnetického pole na CMB. Zjistili jsme, pro jakou dolní propust získaná data nejlépe souhlasí s převzatými hodnotami získanými jinou metodou obrácené úlohy.

Nakonec jsme vykreslili a porovnali mezi sebou přenosové funkce mezi různými řády SH pro přímou úlohu s laterálně proměnným vodivostním modelem.

Literatura

1. "How does the Earth's core generate a magnetic field?" [online]. [cit. 2024-07-16]. Dostupné z: <https://www.usgs.gov/faqs/how-does-earths-core-generate-a-magnetic-field>.
2. JANÁČKOVÁ, A. *Geomagnetické pole - učební text* [online]. [cit. 2024-07-16]. Dostupné z: <https://geo.mff.cuni.cz/studium/Janackova-Geomagneticke-pole.pdf>.
3. OLSEN, Nils; FRIIS-CHRISTENSEN, Eigil; FLOBERGHAGEN, Rune; ALKEN, Patrick; BEGGAN, Ciaran D.; CHULLIAT, Arnaud; DOORNBOS, Eelco; ENCARNAÇÃO, João Teixeira da; HAMILTON, Brian; HULOT, Gauthier; IJSSEL, Jose van den; KUVSHINOV, Alexey; LESUR, Vincent; LÜHR, Hermann; MACMILLAN, Susan; MAUS, Stefan; NOJA, Max; OLSEN, Poul Erik H.; PARK, Jaeheung; PLANK, Gernot; PÜTHE, Christoph; RAUBERG, Jan; RITTER, Patricia; ROTHER, Martin; SABAKA, Terence J.; SCHACHTSCHNEIDER, Reyko; SIROL, Olivier; STOLLE, Claudia; THÉBAULT, Erwan; THOMSON, Alan W. P.; TØFFNER-CLAUSEN, Lars; VELÍMSKÝ, Jakub; VIGNERON, Pierre; VISSER, Pieter N. The Swarm Satellite Constellation Application and Research Facility (SCARF) and Swarm data products. *Earth, Planets and Space*. 2013, roč. 65, č. 11, s. 1189–1200. [Online; accessed 2024-07-16].
4. STACEY, D. *Core, electrical conductivity; Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Ed. GUBBINS David; Herrero-Bervera, Emilio. New York, NY: Springer, 2007. ISBN 978-1-4020-3992-8.
5. KATSURA, T. *Mantle, electrical conductivity, mineralogy; Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*. Ed. GUBBINS David; Herrero-Bervera, Emilio. New York, NY: Springer, 2007. ISBN 978-1-4020-3992-8.
6. GILLET, Nicolas; GERICK, Felix; JAULT, Dominique; SCHWAIGER, Tobias; AUBERT, Julien; ISTAS, Mathieu. Satellite magnetic data reveal interannual waves in Earth's core. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2022, roč. 119, č. 13, e2115258119. Dostupné z DOI: 10.1073/pnas.2115258119.
7. GUBBINS D., Roberts P. H. *Electromagnetic screening of the core by the mantle; Geomagnetism*. Sv. 2. Ed. A., Jacobs J. Academic Press, 1987.
8. VELÍMSKÝ, Jakub; MARTINEC, Zdeněk. Time-domain, spherical harmonic-finite element approach to transient three-dimensional geomagnetic induction in a spherical heterogeneous Earth. *Geophysical Journal International*. 2005, roč. 161, č. 1, s. 81–101. ISSN 0956-540X. Dostupné z DOI: 10.1111/j.1365-246X.2005.02546.x.
9. HAGEDOORN, J. M.; MARTINEC, Z. The adjoint-state method for the downward continuation of the geomagnetic field. *Geophysical Journal International*. 2015, roč. 201, č. 2, s. 724–740. ISSN 0956-540X. Dostupné z DOI: 10.1093/gji/ggv049.

10. PRESS, William H.; FLANNERY, Brian P.; TEUKOLSKY, Saul A.; VETTERLING, William T. *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing* [Hardcover]. 2. vyd. Cambridge University Press, 1992. ISBN 052143064X. Dostupné také z: <http://www.worldcat.org/isbn/052143064X>.
11. GRAYVER, A. V.; MUNCH, F. D.; KUVSHINOV, A. V.; KHAN, A.; SABAKA, T. J.; TØFFNER-CLAUSEN, L. Joint inversion of satellite-detected tidal and magnetospheric signals constrains electrical conductivity and water content of the upper mantle and transition zone. *Geophysical Research Letters*. 2017, roč. 44, č. 12, s. 6074–6081. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/2017GL073446>.
12. WARDINSKI, Ingo; LESUR, Vincent. An extended version of the C3FM geomagnetic field model: application of a continuous frozen-flux constraint. *Geophysical Journal International*. 2012, roč. 189, č. 3, s. 1409–1429. ISSN 0956-540X. Dostupné z DOI: 10.1111/j.1365-246X.2012.05384.x.
13. VELÍMSKÝ, Jakub; KNOPP, Ondřej. Lateral variations of electrical conductivity in the lower mantle constrained by Swarm and CryoSat-2 missions. *Earth, Planets and Space*. 2021, roč. 73, č. 1. ISSN 1880-5981. Dostupné z DOI: 10.1186/s40623-020-01334-8.
14. WIKIMEDIA PROJECTS, Contrubutors to. *Spherical harmonics*. *Wikipedia*. *Real form*. Dostupné také z: https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_harmonics#Real_form.
15. MARTINEC, Zdeněk. Spectral, initial value approach for viscoelastic relaxation of a spherical earth with a three-dimensional viscosity—I. Theory. *Geophysical Journal International*. 1999, roč. 137, č. 2, s. 469–488. ISSN 0956-540X. Dostupné z DOI: 10.1046/j.1365-246X.1999.00803.x.

Seznam obrázků

1.1	Zemské jádro C , plášť G a atmosféra A oddělená hranicemi ∂G_1 a ∂G_2 , polohový vektor $\mathbf{r}$, normály k hranicím $\mathbf{n}_1$ a $\mathbf{n}_2$	8
1.2	Diskretizace intervalu $[c, a]$ pomocí po-částech lineárních konečných elementů ψ_k	14
4.1	Použité vodivostní modely	23
4.2	Impulsové odezvy pláště na stupni $j=2$ pro vodivostní modely A, B, C (vlevo) a MIN (vpravo)	24
4.3	Impulsové odezvy pláště na stupni $j=3$ pro vodivostní modely A, B, C (vlevo) a MIN (vpravo)	24
4.4	Impulsové odezvy pláště na stupni $j=4$ pro vodivostní modely A, B, C (vlevo) a MIN (vpravo)	25
4.5	Časová řada koeficientů $G_{21}^{(i)}$ g0201 na povrchu Země	26
4.6	Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem A aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	26
4.7	Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem B aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	27
4.8	Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem C aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	27
4.9	Koeficienty $B_{21}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0201 s vodivostním modelem MIN aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	28
4.10	Časová řada koeficientů $G_{32}^{(i)}$ g0302 na povrchu Země	28
4.11	Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem A aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	29
4.12	Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem B aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	29
4.13	Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem C aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	30
4.14	Koeficienty $B_{32}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0302 s vodivostním modelem MIN aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	30
4.15	Časová řada koeficientů $G_{41}^{(i)}$ g0401 na povrchu Země	31
4.16	Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem A aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	31
4.17	Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem B aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	32
4.18	Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem C aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	32
4.19	Koeficienty $B_{41}^{(1)}$ na CMB získané dekonvolucí časové řady g0401 s vodivostním modelem MIN aplikací dolní propusti $N_{LP} = 10, 20, 30, 40$	33
5.1	Maticové 3-D Odezvy $ P_{jmj'm'} $ pro $j = 1, 2$ (odezvy jsou vykresleny v absolutní hodnotě, aby bylo možné vzájemně porovnat větší množství funkcí v logaritmickém měřítku na ose y)	35
5.2	Maticové 3-D Odezvy $ P_{jmj'm'} $ pro $j = 3$	36
5.3	Maticové 3-D Odezvy $ T_{jmj'm'} $ pro $j = 1, 2$	37

5.4	Maticové 3-D Odezvy $ T_{jmj'm'} $ pro $j = 3$	38
-----	--	----

A Přílohy

A.1 Sférické Harmoniky

Příloha čerpá z [8].

Skalární funkce na 3-D prostoru můžeme rozepsat do řady SH [14],

$$Y_{jm} = \begin{cases} (-1)^m \sqrt{2} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \vartheta) (\sin |m| \varphi) & \text{pro } m < 0 \\ \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} P_l^m(\cos \vartheta) & \text{pro } m = 0 \\ (-1)^m \sqrt{2} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \vartheta) (\cos m \varphi) & \text{pro } m > 0 \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

kde $P_{jm}(\cos \vartheta)$ jsou normalizované asociované Legendrovy polynomy. Takovéto funkce jsou vzájemně ortonormální na jednotkové sféře,

$$\int_{\Omega} Y_{jm}(\Omega) \cdot Y_{j'm'}(\Omega) d\Omega = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (\text{A.2})$$

Vektorové funkce na 3-D prostoru můžou být rozepsány do řady SH, použijeme následující variantu [15],

$$\{\mathbf{S}_{jm}^{\lambda}(\Omega) | j = 0, \dots, \infty, m = -j, \dots, j, \lambda = -1, 0, 1\}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega) = \mathbf{e}_r \times \nabla_{\Omega} Y_{jm}(\Omega) = \left[\frac{\partial Y_{jm}(\Omega)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\varphi} - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{jm}(\Omega)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_{\vartheta} \right], \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) = Y_{jm}(\Omega) \mathbf{e}_r, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega) = \nabla_{\Omega} Y_{jm}(\Omega) = \left[\frac{\partial Y_{jm}(\Omega)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_{\vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial Y_{jm}(\Omega)}{\partial \varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \right], \quad (\text{A.6})$$

kde

$$\nabla_{\Omega} = \mathbf{e}_{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_{\varphi} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{A.7})$$

je úhlová část gradientu, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_{\vartheta}$ a $\mathbf{e}_{\varphi}$ pak jednotkové vektory ve směru příslušných sférických souřadnic. Vektorové SH jsou také ortonormální na jednotkové sféře,

$$\int_{\Omega} \mathbf{S}_{jm}^{(\lambda)}(\Omega) \cdot \mathbf{S}_{j'm'}^{(\lambda')}(\Omega) d\Omega = N_{j\lambda} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{\lambda\lambda'}, \quad (\text{A.8})$$

s normou

$$N_{j\lambda} = (1 - \delta_{-1\lambda}) \Pi_j + \delta_{-1\lambda}, \quad (\text{A.9})$$

$$\Pi_j = j(j+1). \quad (\text{A.10})$$

Následující vztahy lze z definice odvodit,

$$\nabla [f(r) Y_{jm}(\Omega)] = \frac{df(r)}{dr} \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) + \frac{f(r)}{r} \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega), \quad (\text{A.11})$$

$$\nabla \times [f(r) \mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega)] = -\Pi_j \frac{f(r)}{r} \mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) f(r) \mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega), \quad (\text{A.12})$$

$$\nabla \times [f(r)\mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega)] = -\frac{f(r)}{r}\mathbf{S}_{jm}^{(0)}(\Omega), \quad (\text{A.13})$$

$$\nabla \times [f(r)\mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega)] = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right) f(r)\mathbf{S}_{jm}^{(0)}, \quad (\text{A.14})$$

$$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{S}_{jm}^{(0)}] = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{S}_{jm}^{(-1)}(\Omega)] = \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) f(r)Y_{jm}(\Omega), \quad (\text{A.16})$$

$$\nabla \cdot [f(r)\mathbf{S}_{jm}^{(1)}(\Omega)] = -\Pi_j \frac{f(r)}{r} Y_{jm}(\Omega), \quad (\text{A.17})$$

A.2 Důsledek Gaussovy věty

Vyjdeme z Gaussovy věty,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \, dS, \quad (\text{A.18})$$

kde nahradíme $\mathbf{f}$ za $\mathbf{f} \times \mathbf{g}$,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \, dS. \quad (\text{A.19})$$

Známou vektorovou identitou upravíme levou stranu,

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \, dV = \int_V \mathbf{g} \cdot \nabla \times \mathbf{f} \, dV - \int_V \mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{g} \, dV, \quad (\text{A.20})$$

další vektorovou identitou pak pravou stranu,

$$\oint_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) \, dS = \oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{f}) \, dS = \oint_{\partial V} -\mathbf{f} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{g}) \, dS. \quad (\text{A.21})$$

Když pak dosadíme zpět do vztahu (A.19), dostaneme výslednou identitu,

$$\int_V \mathbf{g} \cdot \nabla \times \mathbf{f} \, dV = \int_V \mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{g} \, dV - \oint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{g}) \, dS. \quad (\text{A.22})$$