



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Antonín Kubík

Laterální variace tloušťky ledové kůry jako klíč k pochopení vnitřní dynamiky Saturnova měsíce Enceladu

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Matematické modelování

Praha 2025

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

V první řadě chci poděkovat Mgr. Martinovi Kihoulou za to, že mi věnoval tolik času, kolik bych si ani sám netroufl žádat. Jeho vstřícnost, klidný a pozitivní přístup a odborné rady mi byly během této práce neocenitelnou pomocí. Dále děkuji prof. Ondřeji Čadkovi za příkladné vedení bakalářské práce, za trpělivost a za cenné připomínky k obsahu i k formě textu. Poděkování patří také doc. Součkovi za podnětné komentáře k metodické části. Na závěr děkuji celé své rodině, která mi je velkou oporou po celou dobu studia i v každodenním životě.

Název práce: Laterální variace tloušťky ledové kůry jako klíč k pochopení vnitřní dynamiky Saturnova měsíce Enceladu

Autor: Antonín Kubík

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: Enceladus je ledový měsíc planety Saturn a jeden z objektů ve Sluneční soustavě s výskytem kapalné vody. Patří mezi nejlépe prozkoumaná ledová tělesa ve vesmíru. Je unikátní výraznými variacemi tloušťky ledové slupky, souvisejícími s tepelným tokem z oceánu. Cílem této práce bylo numericky určit tepelný tok z oceánu a vypočítat napětí na povrchu měsíce pomocí metody konečných prvků implementované v softwaru FEniCS. Výpočty byly provedeny ve 2D axisymetrické geometrii za předpokladu stability tvaru ledové slupky a viskózního chování ledu. Výsledky ukazují, že napětí v latitudinálním směru dosahuje maxima okolo 40 kPa v oblasti jižního pólu. Ledová slupka je v latitudinálním směru v polárních oblastech v kompresi a na rovníku v extenzi, zatímco v longitudinálním směru je v kompresi téměř ve všech zeměpisných šířkách. Tepelný tok z oceánu je nejvyšší právě na jižním pólu, kde může přesáhnout 70 mW m^{-2} . Tyto výsledky naznačují, že pro udržení stabilního tvaru ledové slupky je v oblasti jižního pólu nezbytný výrazný tepelný tok z oceánu. Zároveň ukazují, že je jižní pól v kompresi, což je vzhledem k přítomnosti gejzírů překvapivé.

Klíčová slova: deformace ledu, fázové přechody, Enceladus

Title: Lateral variations in ice crust thickness as the key to understanding the internal dynamics of Saturn's moon Enceladus

Author: Antonín Kubík

Department: Department of Geophysics

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: Enceladus is one of the icy moons of the planet Saturn and one of the objects in the solar system where liquid water is known to exist. It is also one of the best-studied icy bodies in the solar system. One of the unique aspects of Enceladus is that its ice shell thickness varies significantly. This variation is closely related to the heat flux coming from the ocean. The goal of this thesis was to numerically determine the heat flux from the ocean and compute the stress on the moon's surface using the finite-element method implemented in FEniCS software. The computations were performed in two-dimensional spherical axisymmetric geometry, assuming that the shape of the ice shell is stable and the ice behaves like a viscous fluid. The results show that the maximum latitudinal stress is around 40 kPa in the area of the South Pole. Latitudinal stresses within the ice shell are compressive at the poles and extensional at the equator. In contrast, the longitudinal direction is characterized by compressive stress across nearly all latitudes. The heat flux from the ocean is highest at the South Pole, where it can reach more than 70 mW m^{-2} . The results suggest that a significant heat flux from the ocean is required to maintain the shape of the ice shell at the South Pole, where it is thinnest. Additionally, the findings indicate that the South Pole is under compressive stress in the latitudinal direction, which is unexpected considering the presence of geysers.

Keywords: deformation of ice, phase transitions, Enceladus

Obsah

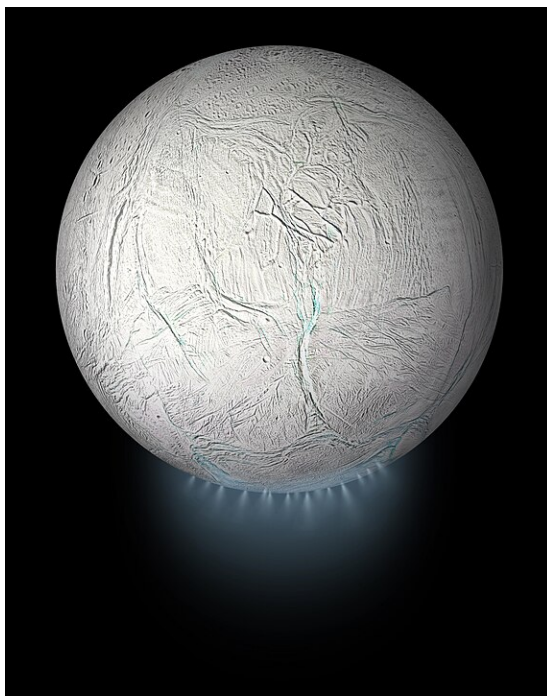
Úvod	6
1 Metoda	8
1.1 Formulace úlohy	8
1.1.1 Řídící rovnice	8
1.1.2 Výpočetní oblast a hraniční podmínky	9
1.1.3 Ustálený tvar hranice	10
1.2 Numerická metoda řešení	11
1.2.1 Slabá formulace	11
1.2.2 Řešení problému v programu FEniCS	14
2 Výsledky	18
2.1 Tepelný tok	18
2.2 Deviatorické napětí	19
3 Diskuze	23
Závěr	25
Literatura	26
Seznam obrázků	28
Seznam tabulek	29
A Přílohy	30
A.1 Konvekční benchmark	30

Úvod

Mezi nejdůležitější vědecké problémy patří hledání života ve sluneční soustavě. Jednou z nutných podmínek pro vznik života je přítomnost vody. Život hledáme hlavně na Marsu a na ledových měsících. Díky vesmírným misím Galileo a Cassini-Huygens, které byly vyslány k Jupiteru a Saturnu, bylo zjištěno, že se pod ledovou vrstvou měsíců Europa, Ganymedes, Callisto a Enceladus ukrývají rozsáhlé rezervoáry kapalné vody (Nimmo a Pappalardo, 2016). Tyto podpovrchové oceány mohou skýtat prostředí vhodné pro existenci primitivního života, avšak jejich přímé pozorování současnými technickými prostředky není možné. Můžeme je však studovat pomocí metod matematického modelování.

Jedním z nejlépe prozkoumaných ledových měsíců je Enceladus. Šestý největší Saturnův satelit dosahuje průměru okolo 500 km, což je přibližně sedmina velikosti Měsíce a desetina velikosti největšího Saturnova měsíce Titanu (Dotson, 2018). Objeven byl v roce 1789, pojmenován o více než padesát let později, nicméně větší pozornosti se mu dostalo právě až po průletu sondy Cassini v roce 2005 a následném pozorování ledových gejzírů na jižním pólu (Postberg et al., 2009, Souček, Běhouňková, Čadek et al., 2019).

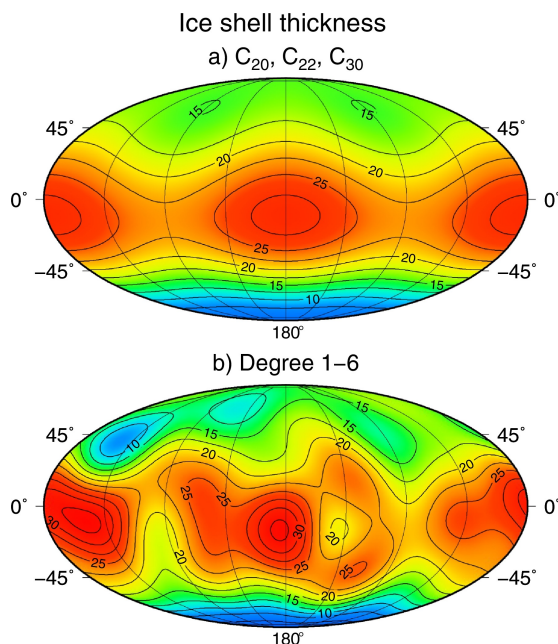
Obrázek 1 ukazuje uměleckou rekonstrukci měsíce Enceladus, vytvořenou na základě dat ze sondy Cassini. Ilustrace znázorňuje výtrysk ledových částic, vodní páry a organických molekul z gejzírů v oblasti jižního pólu.



Obrázek 1 Umělecké ztvárnění Enceladu na základě snímků sondy Cassini(zdroj: <https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA23175>)

Ledová slupka na Enceladu má proměnlivou tloušťku. V oblasti jižního pólu může být tenká pouhé 4 kilometry, zatímco na rovníku se může blížit až ke 35 km. Variace tloušťky ledu byly popsány na základě analýzy tvarových a gravitačních dat (Čadek et al., 2019). Předpokládá se, že mají spojitost se silnými variacemi

tepelného toku z oceánu, které pochází ze slapově deformovaného silikátového jádra. U jiných ledových měsíců podobně výrazné změny tloušťky nepozorujeme (A et al., 2014). Numerický model by mohl ukázat, jak se tepelný tok z oceánu mění v závislosti na zeměpisné šířce, a odpovědět na otázku, do jaké míry přispívají variace tloušťky ledové slupky ke vzniku tektonických útvarů pozorovaných na povrchu.



Obrázek 2 Model tloušťky ledové slupky získaný na základě údajů o gravitačním poli a tvaru povrchu, odvozený pomocí sférických harmonických koeficientů (Čadek et al., 2019). V případě a) koeficientů C_{20} , C_{22} , C_{30} , v případě b) rozvojem do stupně 6.

V této práci se budeme věnovat deformaci a přenosu tepla v ledové slupce na Enceladu. Pro jednoduchost budeme provádět výpočty ve dvourozměrné (2D) axisymetrické sférické geometrii a předpokládat, že tvar ledové slupky je stabilní. Tato práce navazuje na studii Souček, Běhouňková, Čadek et al. (2019), zde se ale zaměřujeme na srovnání spočteného pole tepelného toku a napětí s povrchovými útvary na Enceladu.

Prvním cílem je vyvinout program pomocí softwaru FEniCS (Logg et al., 2012, Alnæs et al., 2015) pro výpočet teplotního a napětového pole v ledové slupce Enceladu pro zadané variace tloušťky ledu metodou konečných prvků. Dalším cílem je spočítat napětí v ledové kůře pro rozdílné velikosti zrna a výsledky porovnat s tektonickým obrazem a jeho geologickou interpretací. Nakonec se pokusíme odhadnout variace tepelného toku z oceánu.

Tato práce je strukturovaná následujícím způsobem. Nejprve si v kapitole 1.1 ujasníme, které fyzikální rovnice, v jaké oblasti a s jakými hraničními podmínkami budeme řešit. Následně se v kapitole 1.2 zaměříme na numerickou stránku řešení a počítačový program FEniCS, v němž výpočty provedeme. Kapitola 2 je věnována prezentaci výsledků. Nakonec se v kapitole 3 zamyslíme nad tím, co jednotlivé výsledky znamenají v širším kontextu.

1 Metoda

1.1 Formulace úlohy

1.1.1 Řídící rovnice

V této práci budeme studovat deformaci a přenos tepla v ledové slupce pro stacionární úlohu. Zákony zachování hmoty a hybnosti budeme uvažovat v Boussinesqově aproximaci, která předpokládá, že změny hustoty ledu v důsledku variací teploty jsou relativně malé, a lze je tak zanedbat všude vyjma objemové síly. Můžeme je psát ve tvaru (viz např. Kihoulou et al., 2023)

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} = \vec{0}, \quad (1.2)$$

kde $\vec{v}$ je rychlost, $\mathbf{t}$ je Cauchyho tenzor napětí, ρ_0 je hustota ledu při referenční teplotě T_0 , α je koeficient teplotní roztažnosti, T je teplota a $\vec{g}$ je tíhové zrychlení. Dále pro jednoduchost neuvažujeme setrvačné síly v rovnici (1.2), neboť Prandtlovo číslo ledu je řádu 10^5 nebo větší.

V Boussinesqově aproximaci má zákon zachování energie tvar

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho_0 c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + Q, \quad (1.3)$$

kde t je čas, c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku, k je teplotní vodivost a Q je vnitřní zahřívání vztažené na jednotku objemu. V této práci budeme předpokládat, že ledová slupka je ve stavu termální rovnováhy ($\frac{\partial T}{\partial t} \approx 0$), a zanedbáme konvekční člen a vnitřní zahřívání. Teplota T pak splňuje rovnici

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = 0. \quad (1.4)$$

Dále předpokládáme, že na geologické časové škále se led chová jako viskózní tekutina. Konstitutivní vztah pro nestlačitelnou tekutinu má tvar

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T], \quad (1.5)$$

kde p je tlak, $\mathbf{I}$ je identický tenzor a η je viskozita. Dosazením vztahu (1.5) do rovnice (1.2) dostáváme vztah

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\eta[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T]) + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} = \vec{0}, \quad (1.6)$$

který později použijeme při výpočtech.

Viskozita ledu obecně závisí na teplotě, napětí a velikosti zrna (Goldsby a Kohlstedt, 2001), avšak v této práci pro jednoduchost nezahrneme vývoj velikosti zrna ani vliv napětí, a budeme uvažovat pouze teplotní závislost (srovnej Souček, Běhouňková, Čadek et al., 2019):

$$\eta(T) = \eta_0 \cdot \exp\left(\frac{E}{RT_m} \left(\frac{T_m}{T} - 1\right)\right), \quad (1.7)$$

kde T_m představuje teplotu tání ledu, η_0 je viskozita při teplotě T_m , R je univerzální plynová konstanta a E označuje aktivační energii difúzního creepu (Goldsby a Kohlstedt, 2001). Pozorujeme, že při nízkých teplotách, které panují na povrchu ledového měsíce, dává vztah (1.7) nerealisticky vysoké hodnoty viskozity η přesahující 10^{30} Pa s. Pro numerické řešení problému by to mohlo znamenat komplikaci, proto ji omezíme shora viskozitou $\eta_{max} = 10^{24}$ Pa s.

Teplotní závislost parametru α je poměrně slabá (McCord a Sotin, 2005), tudíž jej aproximujeme konstantou. Teplotní vodivost k , která vystupuje v rovnici (1.4), budeme uvažovat ve tvaru (Carnahan et al., 2021)

$$k(T) = \frac{k_1}{T}, \quad (1.8)$$

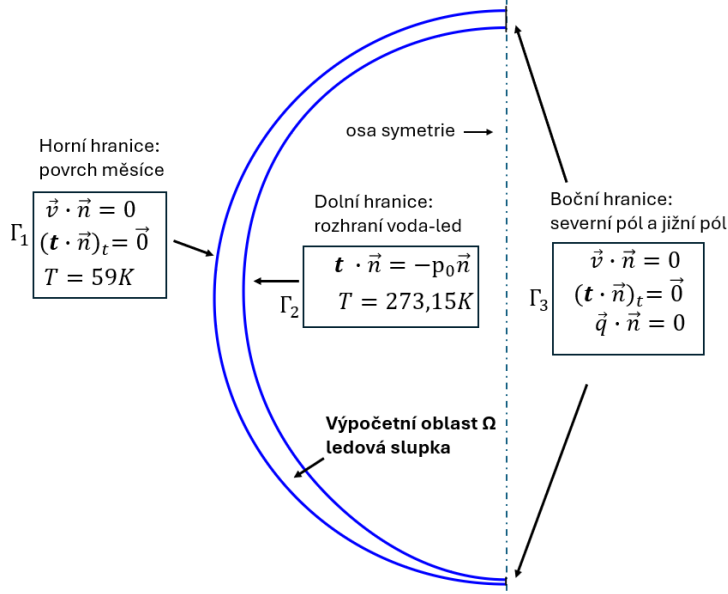
kde k_1 je experimentálně zjištěná konstanta. V tabulce 1.1 shrnujeme číselné hodnoty parametrů a konstant.

Symbol	Význam	Hodnota	Jednotka
g	tíhové zrychlení	0,13	m s^{-2}
ρ_0	hustota ledu při referenční teplotě	917	kg m^{-3}
R	univerzální plynová konstanta	8,314	$\text{J K}^{-1} \text{mol}^{-1}$
η_0	viskozita při teplotě tání ledu	$10^{14} - 10^{16}$	Pa s
η_{max}	maximální viskozita	10^{24}	Pa s
α	koeficient teplotní roztažnosti	$1,6 \cdot 10^{-4}$	K^{-1}
T_0	referenční teplota pro hustotu	273,15	K
T_m	teplota tání ledu	273,15	K
T_s	povrchová teplota	59	K
E	aktivační energie difúzního creepu	59,4	kJ mol^{-1}
k_1	konstanta ve vztahu pro tepl. vodivost	612	W m^{-1}
L	měrné skupenské teplo tání ledu	333,5	kJ mol^{-1}

Tabulka 1.1 Seznam parametrů a konstant

1.1.2 Výpočetní oblast a hraniční podmínky

Oblast, v níž počítáme řídicí rovnice, reprezentuje ledovou vrstvu na Enceladu mezi povrchem a podpovrchovým oceánem. Střední hodnota poloměru povrchu a rozhraní voda-led je 252,1 km, resp. 232,1 km. Enceladus má (v prvním přiblížení) tvar trojosého elipsoidu, reálnou úlohu by tedy bylo potřeba řešit ve 3D geometrii. V této práci ale využijeme toho, že variace tloušťky ledu se na Enceladu se zeměpisnou délkou nemění tak výrazně jako v závislosti na zeměpisné šířce. To nám umožní jeho tvar reprezentovat pomocí 2D axisymetrické geometrie, čímž si zjednodušíme a zefektivníme výpočty. Označme výpočetní oblast velkým řeckým písmenem Ω a jednotlivé hranice jako $\Gamma_1 - \Gamma_3$ (viz obrázek 1.1).



Obrázek 1.1 Výpočetní oblast Ω a hraniční podmínky. Úlohu řešíme ve 2D sférické axisymetrické geometrii.

Na horní hranici ledové slupky Γ_1 uvažujeme povrchovou teplotu Enceladu $T_s = 59$ K (Beuthe, 2018) a předpokládáme, že normálová složka rychlosti a tečná složka Cauchyho trakčního vektoru (reprezentující smykové napětí) jsou nulové:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad (1.9)$$

$$\vec{t}_t = (\vec{t} \cdot \vec{n})_t = \vec{t} \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{t} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{0}, \quad (1.10)$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor a index t označuje tečnou složku. Pro jednoduchost budeme považovat povrchovou teplotu Enceladu za konstantní a zanedbáme tedy její variace (u rovníku může povrchová teplota dosahovat až 80 K (Beuthe, 2018)).

Jelikož dolní hranice Γ_2 (rozhraní voda-led) je fázovým rozhraním, uvažujeme na něm teplotu tání ledu T_m a budeme počítat s Neumannovou okrajovou podmínkou ve tvaru

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = -p_0 \vec{n}, \quad (1.11)$$

kde p_0 je hydrostatický tlak vody na hranici.

Pro boční hranici Γ_3 (severní a jižní pól) z důvodu předpokladu axiální symetrie opět předepíšeme podmínky volného prokluzu (1.9) a (1.10) a navíc předpokládáme, že normálová složka tepelného toku je nulová,

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = 0. \quad (1.12)$$

1.1.3 Ustálený tvar hranice

Povrch ledové slupky modelujeme jako materiálový povrch, na kterém nedochází k výměně částic s okolím. Vývoj hranice je obecně popsán rovnicí materiálového povrchu (srovnej Kvorka et al., 2018):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } H = 0, \quad (1.13)$$

kde H je funkce popisující tvar hranice. V této práci budeme předpokládat ustálený tvar ledové slupky a funkci H tedy považovat za konstantní v čase.

Na dolní hranici (rozhraní voda-led) se do předchozí rovnice přidává člen reprezentující vliv fázového přechodu (Slattery et al., 2007):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{u}) \cdot \text{grad } H = 0. \quad (1.14)$$

Vektor $\vec{u}$ má význam rychlosti fázové změny a je dán předpisem

$$\vec{u} = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{q}_w - \vec{q}_i)}{L\rho_i} \vec{n}, \quad (1.15)$$

kde L je měrné skupenské teplo tání ledu, ρ_i je hustota ledu, $\vec{q}_i$ označuje tepelný tok na spodní hranici ledové slupky a $\vec{q}_w$ je tepelný tok z oceánu. Rozdíl $(\vec{q}_w - \vec{q}_i)$ má tedy význam skoku v tepelném toku na rozhraní. Pokud bude $\vec{n} \cdot \vec{q}_i > \vec{n} \cdot \vec{q}_w$, dojde k zamrznání oceánu a zesílení ledové slupky, zatímco bude-li $\vec{n} \cdot \vec{q}_i < \vec{n} \cdot \vec{q}_w$, dojde k tání a ztenčení ledové slupky.

V této práci budeme předpokládat, že je ledová slupka stabilní a tvar fázového rozhraní se nemění. Abychom toho docílili, musí být člen $(\vec{v} + \vec{u}) \cdot \text{grad } H$ v rovnici (1.14) roven nulovému vektoru, a tudíž $\vec{v} \cdot \vec{n} = -\vec{u} \cdot \vec{n}$. Tečení ledu na hranici tak bude kompenzovat buď zamrznání vody z oceánu, nebo tání ledu. To znamená, že musí být splněna podmínka (Kvorka et al., 2018)

$$L\rho_i \vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (\vec{q}_i - \vec{q}_w). \quad (1.16)$$

Řešením rovnic (1.1), (1.4) a (1.6) získáme rychlost tečení ledu $\vec{v}$ a tepelný tok na spodní hranici ledové slupky $\vec{q}_i$. Pomocí rovnice (1.16) pak můžeme určit normálovou složku tepelného toku z oceánu $\vec{q}_w$, jenž je potřebný k udržení stabilního tvaru ledové slupky.

1.2 Numerická metoda řešení

1.2.1 Slabá formulace

Řídící rovnice budu řešit pomocí softwaru FEniCS (Logg et al., 2012, Alnæs et al., 2015), jenž stojí na metodě konečných prvků, což je jedna z metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic (PDR). Před řešením PDR pomocí metody konečných prvků je třeba udělat dva důležité kroky (Logg et al., 2012):

1. Vyjádřit PDR ve slabé formulaci.
2. Specifikovat funkční prostory trial a testovacích funkcí (V a $\hat{V}$), což znamená specifikovat výpočetní síť (mesh) a typ konečných prvků.

Do slabé formulace nyní převedeme rovnice (1.1), (1.3) a (1.6). Nejprve to provedeme pro klasickou kartézskou geometrii a v následující sekci pro geometrii sférickou.

Rovnice kontinuity

Rovnici kontinuity (1.1) přenásobíme skalární testovací funkcí χ a zintegrujeme přes oblast Ω :

$$\int_{\Omega} \chi \operatorname{div} \vec{v} d\Omega = 0. \quad (1.17)$$

Pohybová rovnice

Pohybovou rovnici (1.6) přenásobíme vektorovou testovací funkcí $\vec{\vartheta}$ a také zintegrujeme přes oblast Ω :

$$\int_{\Omega} \vec{\vartheta} \cdot [-\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\eta[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T]) + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g}] d\Omega = 0. \quad (1.18)$$

Nyní se zaměříme na tlakový člen. Skalární součin si převedeme do složek, pomocí metody per partes výraz upravíme a vrátíme se ze složkového do vektorového zápisu:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\vec{\vartheta} \cdot \operatorname{grad} p d\Omega &= - \int_{\Omega} \vartheta_k \frac{\partial p}{\partial x_k} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} p \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k} d\Omega - \int_{\partial\Omega} p \vartheta_k n_k dS \\ &= \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\vec{\vartheta}) d\Omega - \int_{\partial\Omega} p(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) dS. \end{aligned} \quad (1.19)$$

U viskózního členu pro úsporu místa využijeme zápis s tenzorem rychlosti deformace

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T] = \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \vec{v}), \quad (1.20)$$

a pro lepší přehlednost opět převedeme skalární součin do složkového zápisu a provedeme integraci per partes (abychom eliminovali druhé derivace):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{\vartheta} \cdot \operatorname{div}(2\eta\mathbf{d}) d\Omega &= \int_{\Omega} \vartheta_i \frac{\partial(2\eta d_{ij})}{\partial x_j} d\Omega, \\ &= - \int_{\Omega} 2\eta \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} d_{ij} d\Omega + \int_{\partial\Omega} 2\vartheta_i d_{ij} n_j dS \\ &= - \int_{\Omega} 2\eta \operatorname{grad} \vec{\vartheta} : \mathbf{d} d\Omega + \int_{\partial\Omega} 2\eta \vec{\vartheta} \cdot \mathbf{d} \cdot \vec{n} dS. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Třetí člen (s tíhovým zrychlením) nebudeme dále upravovat a podíváme se nyní na jednotlivé integrály přes hranici $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} &- \int_{\partial\Omega} p(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) dS, \\ &\int_{\partial\Omega} 2\eta \vec{\vartheta} \cdot \mathbf{d} \cdot \vec{n} dS. \end{aligned}$$

Na povrchu měsíce a na pólech (tj. horní a boční hranici) jsme předepsali podmínku (1.9) a (1.10), zatímco na dolní hranici máme okrajovou podmínku (1.11). Nejprve

udělejme malý úkrok stranou. Normálovou složku tenzoru napětí přenásobíme funkcí $\vec{\vartheta}$ a použijeme konstitutivní vztah (1.5):

$$\begin{aligned}\vec{\vartheta} \cdot (\mathbf{t} \cdot \vec{n}) &= \vec{\vartheta} \cdot (-p\mathbf{I} + \eta[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T]) \cdot \vec{n} \\ &= \vec{\vartheta} \cdot (-p\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d}) \cdot \vec{n} \\ &= -p(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) + 2\eta \vec{\vartheta} \cdot \mathbf{d} \cdot \vec{n}.\end{aligned}\quad (1.22)$$

Z podmínky (1.9) vyplývá:

$$\int_{\Gamma_1} p(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) dS = 0, \quad (1.23)$$

$$\int_{\Gamma_1} 2\eta \vec{\vartheta} \cdot \mathbf{d} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Gamma_1} \vec{\vartheta} \cdot (\mathbf{t} \cdot \vec{n}) dS, \quad (1.24)$$

kde vektor napětí $(\mathbf{t} \cdot \vec{n})$ rozložíme na tečnou a normálovou složku a pomocí podmínek (1.9) a (1.10) ukážeme, že:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{\vartheta} \cdot (\mathbf{t} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Gamma_1} [\vec{\vartheta} \cdot (\mathbf{t} \cdot \vec{n})_n \cdot \vec{n}] + [\vec{\vartheta} \cdot (\mathbf{t} \cdot \vec{n})_t \cdot \vec{t}] dS = 0, \quad (1.25)$$

kde $\vec{t}$ je tečný vektor. Z toho plyne:

$$\int_{\Gamma_1} 2\eta \vec{\vartheta} \cdot \mathbf{d} \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (1.26)$$

Obdobně můžeme postupovat i pro boční hranici Γ_3 . Pro podmínku (1.11) vyplývá ze vztahu (1.22), že:

$$-p(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) + 2\eta \vec{\vartheta} \cdot \mathbf{d} \cdot \vec{n} = \vec{\vartheta} \cdot (-p_0 \vec{n}). \quad (1.27)$$

Slabou formulaci pohybové rovnice tedy můžeme psát v následujícím tvaru:

$$\int_{\Omega} p \text{div}(\vec{\vartheta}) - 2\eta \text{grad } \vec{\vartheta} : \mathbf{d} + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} \cdot \vec{\vartheta} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \vec{\vartheta} \cdot (-p_0 \vec{n}) dS = 0. \quad (1.28)$$

Teplovní rovnice

Rovnici (1.4) přenásobíme skalární testovací funkcí τ a integrujeme přes oblast Ω :

$$\int_{\Omega} \tau(\text{div}(k \text{grad } T)) d\Omega = 0. \quad (1.29)$$

Po integraci pomocí metody per partes získáváme následující vztah:

$$\int_{\Omega} -\tau(\text{div}(k \text{grad } T)) d\Omega = \int_{\Omega} k \text{grad}(\tau) \cdot \text{grad}(T) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \tau(k \text{grad}(T) \cdot \vec{n}) dS \quad (1.30)$$

Z podmínky (1.12) dostáváme:

$$\int_{\Gamma_3} \tau(k \text{grad}(T) \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (1.31)$$

protože $\vec{q}_i = -k \text{ grad}(T)$. Také plošný integrál přes Γ_1 a Γ_2 bude díky Dirichletově okrajové podmínce (tj. $\tau = 0$) nulový:

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} -\tau(k \text{ grad}(T) \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (1.32)$$

Slabou formulaci teplotní rovnice tedy můžeme psát v následujícím tvaru:

$$\int_{\Omega} k \text{ grad}(\tau) \cdot \text{grad}(T) d\Omega = 0. \quad (1.33)$$

1.2.2 Řešení problému v programu FEniCS

2D axisymetrická geometrie

Protože problém řešíme ve 2D axisymetrické geometrii, je potřeba modifikovat rovnice (1.17), (1.28), (1.33). Software FEniCS sice primárně využívá klasické kartézské souřadnice, ale pomocí vhodných technik umožňuje zahrnout do výpočtů i složitější geometrii. Nyní si zavedeme válcové souřadnice a přepíšeme do nich diferenciální operátory gradient a divergenci. Uvažujme válcové souřadnice dané vztahem

$$x = r \cos \varphi, \quad (1.34)$$

$$y = r \sin \varphi, \quad (1.35)$$

$$z = z, \quad (1.36)$$

kde $r \in (0, \infty)$ je vzdálenost od osy symetrie a $\varphi \in [0, 2\pi)$ je zeměpisná délka. Jakobián souřadnicové transformace je pak $|J| = r$.

Pro odvození diferenciálních operátorů můžeme zavést Laméovy koeficienty h_i a pomocí nich formulovat vztahy pro gradient skaláru, divergenci vektoru, gradient vektoru a symetrickou část gradientu vektoru (Martinec, 2011)

$$h_k := \sqrt{\frac{\partial \vec{p}}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_k}} \quad (1.37)$$

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^3 y_k \vec{i}_k \quad (1.38)$$

$$\vec{e}_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \vec{p}}{\partial x_k} \quad (1.39)$$

$$\text{grad } \phi = \sum_k \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \vec{e}_k \quad (1.40)$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 v_3) \right) \quad (1.41)$$

$$(\text{grad } \vec{v})_{kl} = \begin{cases} \frac{1}{h_k} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \sum_{m \neq k} \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_k}{\partial x_m} v_m \right) & l = k, \\ \frac{1}{h_k} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} - \frac{1}{h_l} \frac{\partial h_k}{\partial x_l} v_k \right) & l \neq k, \end{cases} \quad (1.42)$$

kde x_k jsou křivočaré souřadnice, y_k kartézské souřadnice, $\vec{p}$ je kartézský polohový vektor, $\vec{i}_k$ jsou jednotkové kartézské vektory, $\vec{e}_k$ jednotkové vektory ve směru

křivočarých souřadnic, ϕ je libovolná skalární funkce a $\vec{v}$ je libovolná vektorová funkce.

Pro válcové souřadnice máme Laméovy koeficienty

$$h_r = 1, \quad (1.43)$$

$$h_\varphi = r, \quad (1.44)$$

$$h_z = 1. \quad (1.45)$$

Když je dosadíme do vztahů (1.40), (1.41) a (1.42) a využijeme toho, že skalární i vektorové veličiny uvažujeme konstantní ve směru zeměpisné délky, dostaneme následující vztahy (srovnej s Kihoulou, 2021):

$$\text{grad } \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (1.46)$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) \right) = \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (1.47)$$

$$\text{grad } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_r}{\partial z} \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.48)$$

Gradient skalární funkce zůstává ve stejném tvaru jako v kartézských souřadnicích, naopak u divergence vektorové funkce se objevuje navíc člen v_r/r . Gradient vektorové funkce má navíc složku $\varphi\varphi$, která je rovna také v_r/r .

Ačkoliv jsou rovnice formulovány ve válcových souřadnicích, geometrie úlohy odpovídá 2D sférické axisymetrii, a proto si definujeme také jednotkový vektor v radiálním a tečném směru:

$$\vec{e}_{rad} = \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad (1.49)$$

$$\vec{e}_t = \left(\frac{-z}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right). \quad (1.50)$$

Tíhové zrychlení $\vec{g}$ uvažujeme ve tvaru:

$$\vec{g} = -g \vec{e}_{rad}. \quad (1.51)$$

Rovnice kontinuity a pohybové rovnice

Pro rovnici kontinuity ve slabé formulaci použijí cylindrickou divergenci danou vztahem (1.47). Pomocí ní lze jednoduše přepsat rovnici kontinuity (1.17) jako

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{v} \chi r d\Omega = 0. \quad (1.52)$$

Ve slabé formulaci pohybové rovnice vystupuje člen obsahující

$$2 \text{ grad } \vec{\vartheta} : \mathbf{d} = 2\mathbf{d} : \text{grad } \vec{\vartheta}^T = (\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T) : \text{grad } \vec{\vartheta}^T. \quad (1.53)$$

Protože předpokládáme, že $\vec{v}$ i $\vec{\vartheta}$ splňují vztah (1.48), jejich gradienty mají v nových souřadnicích složku $\varphi\varphi$. Ke slabé formulaci pohybové rovnici tak musíme

přičíst člen $2\eta \frac{v_r}{r} \frac{\partial r}{\partial r}$ (viz Kihoulou, 2021). Hydrostatický tlak p_0 na spodní hranici můžeme vyjádřit ve tvaru

$$p_0 = (D\rho_i - h_{bot}\rho_w)g, \quad (1.54)$$

kde D je střední tloušťka ledové slupky a h_{bot} je topografie spodní hranice.

Zatímco pro hranici Γ_3 můžeme free-slip hraniční podmínku (rovnice (1.9) a (1.10)) ve FEniCSu zadat přímo, protože je rovnoběžná s kartézskou osou z , u horní hranice Γ_1 to takto jednoduše provést nelze. Tato hranice je zakřivená a neumožňuje jednoduše vyjádřit složky rychlosti ve směrech x a y . Místo toho je implementujeme pomocí Nitscheho metody přidáním dodatečných členů do slabé formulace rovnice (1.28) (Burman, 2012):

$$+ \int_{\Gamma_1} (\vec{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \eta[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T]) \cdot \vec{n})(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) dS, \quad (1.55)$$

$$- \int_{\Gamma_1} (\vec{n} \cdot (-\chi\mathbf{I} + \eta[\text{grad } \vec{\vartheta} + (\text{grad } \vec{\vartheta})^T]) \cdot \vec{n})(\vec{v} \cdot \vec{n}) dS, \quad (1.56)$$

$$- \int_{\Gamma_1} \eta(T) \frac{\beta}{h_h} (\vec{v} \cdot \vec{n})(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) dS, \quad (1.57)$$

kde χ je testovací funkce pro tlak z rovnice (1.52), $\beta > 0$ je penalizační parametr a h_h je maximální velikost prvku sítě. Slabou formulaci pohybové rovnice tedy můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p \text{div}(\vec{\vartheta})r - \eta[2\mathbf{d} : (\text{grad } \vec{\vartheta})^T]r + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} \cdot \vec{\vartheta} r + 2\eta \frac{v_r \partial r}{r} d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_2} (\vec{\vartheta} \cdot \vec{n})(h_{bot}\rho_w - D\rho_i)g r dS \\ & + \int_{\Gamma_1} (\vec{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \eta[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T]) \cdot \vec{n})(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) r dS, \\ & - \int_{\Gamma_1} (\vec{n} \cdot (-\chi\mathbf{I} + \eta[\text{grad } \vec{\vartheta} + (\text{grad } \vec{\vartheta})^T]) \cdot \vec{n})(\vec{v} \cdot \vec{n}) r dS, \\ & - \int_{\Gamma_1} \eta(T) \frac{\beta}{h_h} (\vec{v} \cdot \vec{n})(\vec{\vartheta} \cdot \vec{n}) r dS = 0, \end{aligned} \quad (1.58)$$

kde vzdálenost od osy symetrie r představuje jakobián přechodu z kartézských do válcových souřadnic. Rovnice kontinuity (1.52) a pohybová rovnice (1.58) se dohromady nazývají Stokesův problém a řešíme je zároveň. K jejich řešení používáme skalární lineární lagrangeovské prvky pro tlak a vektorové kvadratické lagrangeovské prvky pro rychlost (tzv. Taylor-Hood elementy, viz Larson a Bengzon, 2013).

Teplotní rovnice

Slabou rovnici rovnice pro teplotu můžeme ve válcových souřadnicích psát následovně:

$$\int_{\Omega} k \text{grad}(\tau) \cdot \text{grad}(T) r d\Omega = 0. \quad (1.59)$$

K jejímu řešení použijeme skalární lineární lagrangeovské prvky. Maticovou úlohu zde z důvodu nelinearity teplotní vodivosti k řešíme pomocí Newtonovy iterační metody.

Výpočet

Do výpočetního programu ve FEniCSu, jehož podstatný základ jsem převzal od Martina Kihoulou s jeho laskavým svolením, nejprve zadáme jako vstup tloušťku ledové slupky (Čadek et al., 2019). Poté vyřešíme rovnici pro teplotu (1.4) a následně řešíme Stokesův problém (rovnice (1.1) a (1.6)). Pomocí Fourierova zákona získáme z vypočítané teploty tepelný tok $\vec{q}_i$ na spodní hranici ledové slupky

$$\vec{q}_i = -k \text{ grad } T. \quad (1.60)$$

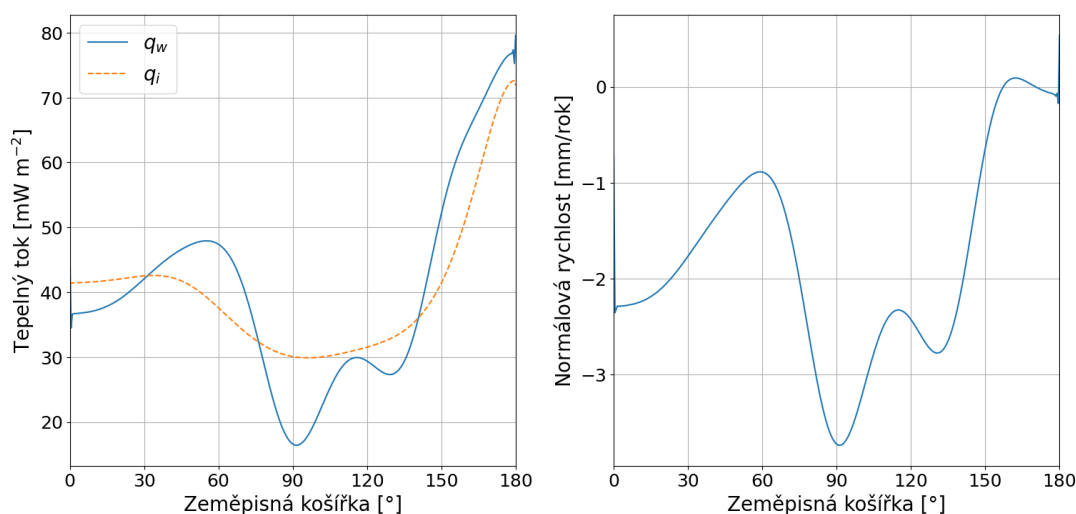
Ze vztahu (1.16) pak určíme normálovou složku tepelného toku z oceánu $\vec{q}_w$, která je potřebná k udržení stabilního tvaru ledové slupky. Z rychlosti $\vec{v}$ poté vypočteme deviatorickou složku tenzoru napětí

$$\mathbf{t}^D = \eta[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T] = 2\eta\mathbf{d}. \quad (1.61)$$

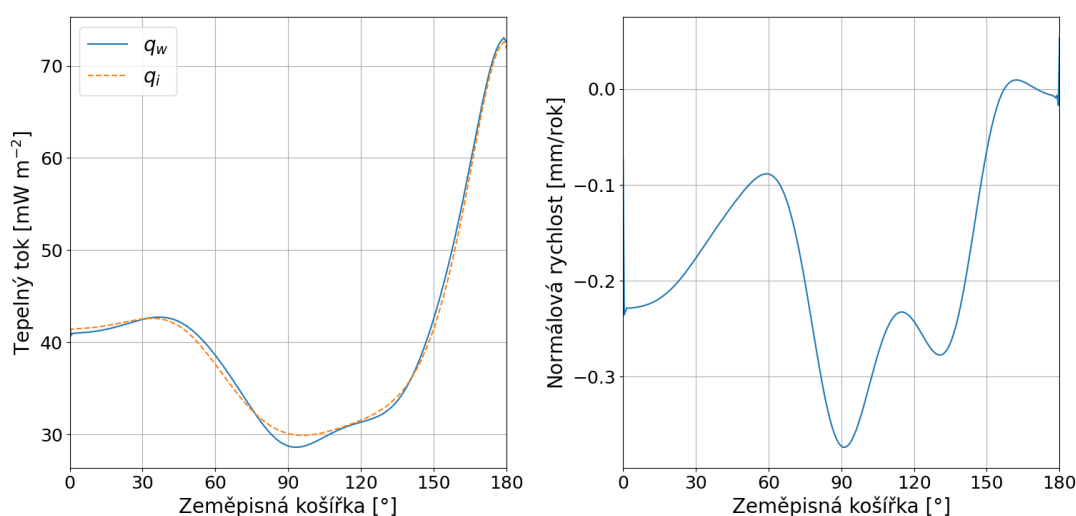
2 Výsledky

2.1 Tepelný tok

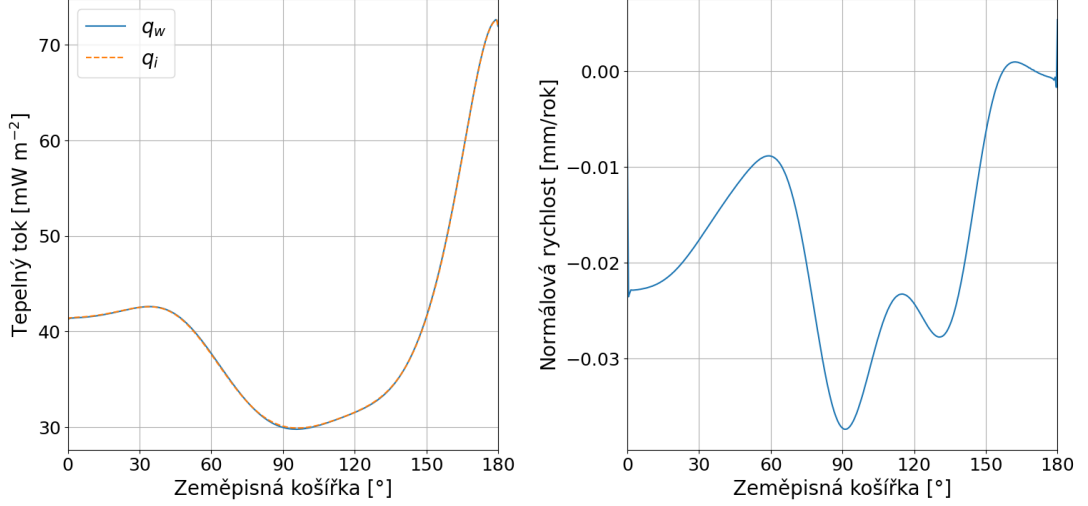
V této sekci se zaměříme na tepelný tok pro rozdílné hodnoty viskozity η_0 ze vztahu (1.7). Na obrázku 2.1 vlevo porovnáváme v závislosti na zeměpisné košířce θ (angl. colatitude) normálové složky tepelného toku z oceánu $\vec{q}_w$ a tepelného toku na spodní hranici ledové slupky $\vec{q}_i$ pro viskozitu $\eta_0 = 10^{14}$ Pa s. Vpravo je poté velikost normálové složky rychlosti tečení ledu $\vec{v}$. Na obrázku 2.2 sledujeme totéž pro viskozitu $\eta_0 = 10^{15}$ Pa s a na obrázku 2.3 pro $\eta_0 = 10^{16}$ Pa s.



Obrázek 2.1 Normálové složky tepelného toku $\vec{q}$ a rychlosti $\vec{v}$ na spodní hranici pro $\eta_0 = 10^{14}$ Pa s v závislosti na zeměpisné košířce.



Obrázek 2.2 Normálové složky tepelného toku $\vec{q}$ a rychlosti $\vec{v}$ na spodní hranici pro $\eta_0 = 10^{15}$ Pa s v závislosti na zeměpisné košířce.



Obrázek 2.3 Normálové složky tepelného toku $\vec{q}$ a rychlosti $\vec{v}$ na spodní hranici pro $\eta_0 = 10^{16}$ Pa s v závislosti na zeměpisné košířce.

Z předchozích obrázků lze vyčíst, že pro zvyšující se viskozitu η_0 se snižuje normálová složka rychlosti $\vec{v}$. Dále je patrné, že pro zvyšující se η_0 se křivka tepelného toku q_w přibližuje křivce q_i . Plyne to ze vztahu (1.16) - vidíme totiž, že pro klesající normálovou rychlost klesá také velikost skoku v tepelném toku na rozhraní. Pro rychlosti blízké nule je tedy člen $\vec{v} \cdot \vec{n}$ zanedbatelně malý, což vede k tomu, že i člen $\vec{n} \cdot (\vec{q}_w - \vec{q}_i)$ bude zanedbatelný. V důsledku toho je normálová složka $\vec{q}_w$ téměř shodná s normálovou složkou $\vec{q}_i$. Velikost normálové složky tepelného toku z oceánu $\vec{q}_w$ se pohybuje řádově v desítkách mW m^{-2} . Nejvyšší hodnotu jsme zaznamenali na jižním pólu měsíce, kde přesahuje 70 mW m^{-2} .

2.2 Deviatorické napětí

Nyní se budeme věnovat deviatorické složce Cauchyho tenzoru napětí $\mathbf{t}^D$ na horní hranici. Přepíšme si vztah pro viskozitu (1.8) jako

$$\eta(T) = \eta_0 \cdot \eta_1(T) \quad (2.1)$$

a použijme jej k úpravě výrazů (1.1) a (1.6):

$$-\text{grad } p + \text{div}(\eta_0 \eta_1 [\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T]) + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} = \vec{0}. \quad (2.2)$$

Protože η_0 je konstanta, platí:

$$-\text{grad } p + \text{div}(\eta_1 [\text{grad}(\eta_0 \vec{v}) + (\text{grad}(\eta_0 \vec{v}))^T]) + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} = \vec{0}. \quad (2.3)$$

Zároveň vynásobení obou stran rovnice (1.1) konstantou η_0 implikuje:

$$\text{div}(\eta_0 \vec{v}) = 0. \quad (2.4)$$

Pokud bychom si definovali škálovanou rychlost $\vec{w}$ následujícím způsobem:

$$\vec{w} = \eta_0 \vec{v}, \quad (2.5)$$

můžeme pak psát rovnici kontinuity a pohybovou rovnici ve tvaru

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (2.6)$$

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div}(\eta_1[\operatorname{grad} \vec{w} + (\operatorname{grad} \vec{w})^T]) + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))\vec{g} = \vec{0}. \quad (2.7)$$

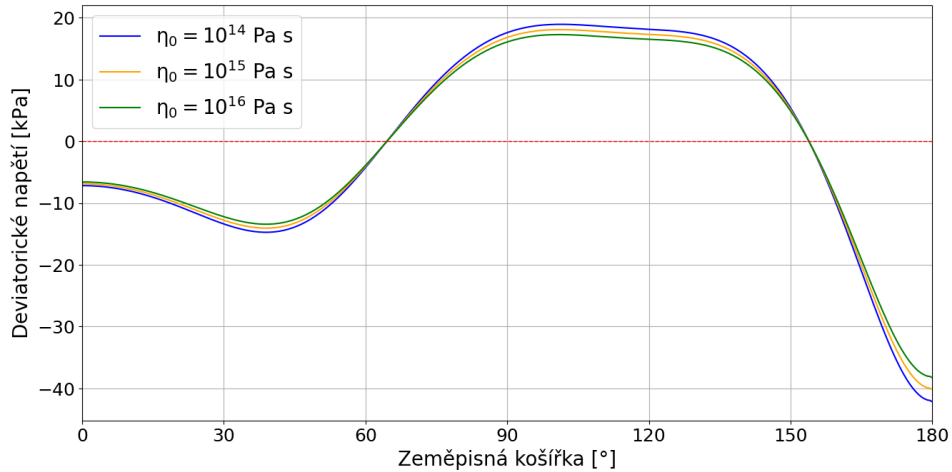
Stejným způsobem přepíšeme také konstitutivní vztah (1.5):

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta_1[\operatorname{grad} \vec{w} + (\operatorname{grad} \vec{w})^T]. \quad (2.8)$$

Vidíme, že jsme dostali stejný tvar řídicích rovnic Stokesovy úlohy. Pokud budeme měnit viskozitu při teplotě tání η_0 a přitom bychom η_1 zachovali stejné, dojde pouze ke změně rychlosti $\vec{v}$ (nepřímo úměrně η_0), zatímco Cauchyho tenzor napětí $\mathbf{t}$ by zůstal nezměněn. Tím, že z numerických důvodů zavádíme omezení viskozity shora (tzv. cut-off) viskozitou $\eta_{max} = 10^{24}$ Pa s, tak změna η_0 ovlivní také činitel η_1 (k oříznutí viskozity dojde v jiném místě ledové slupky).

Obrázek 2.4 znázorňuje závislost složky $\mathbf{t}_{\theta\theta}^D$ na povrchu měsíce na zeměpisné košířce θ pro různé hodnoty η_0 .

$$\mathbf{t}_{\theta\theta}^D = \vec{e}_t \cdot \mathbf{t}^D \cdot \vec{e}_t \quad (2.9)$$

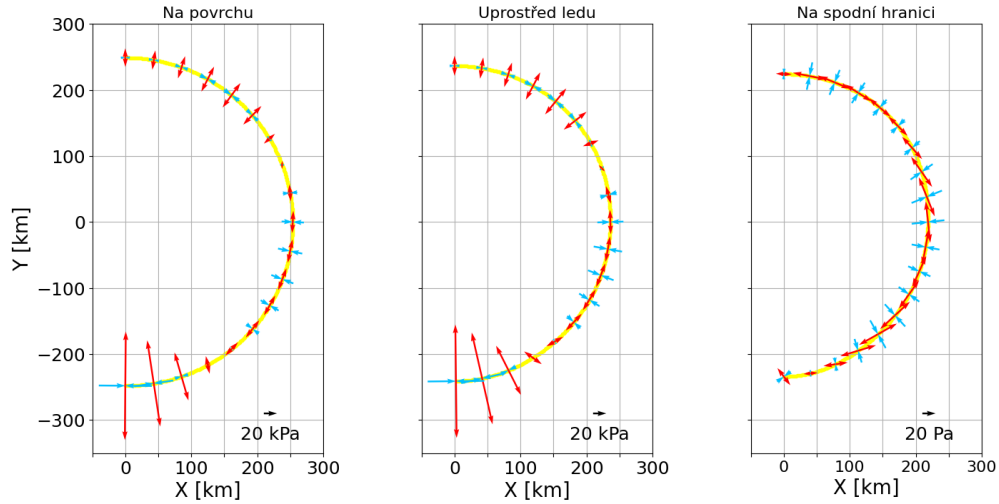


Obrázek 2.4 Deviator tenzoru napětí $\mathbf{t}^D$ (složka $\mathbf{t}_{\theta\theta}^D$) na horní hranici v závislosti na zeměpisné košířce θ pro různé hodnoty η_0 . Červená čárkovaná čára zobrazuje hodnotu $\mathbf{t}_{\theta\theta}^D = 0$. Kladné hodnoty $\mathbf{t}_{\theta\theta}^D$ značí, že ledová slupka je v tomto místě v latitudinálním směru v extenzi, záporné v kompresi.

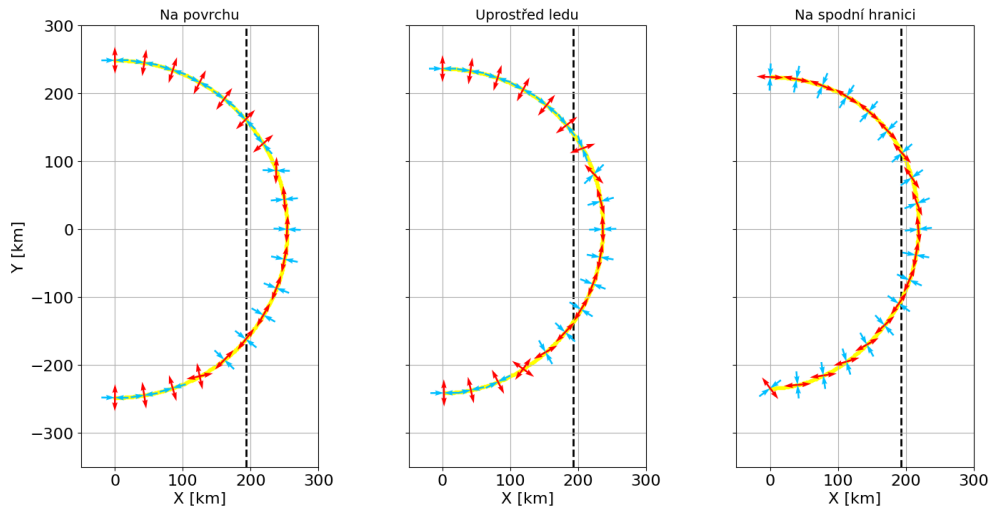
Pozorujeme, že deviatorické napětí $\mathbf{t}_{\theta\theta}^D$ dosahuje hodnot desítek kPa a se změnou viskozity η_0 se mění pouze v jednotkách kPa, což je ve shodě s úvahou výše

o zachování Cauchyho tenzoru napětí při změně η_0 . Nejvyšších číselných hodnot dosahuje na jižním pólu.

Podívejme se dále na vlastní směry tenzoru napětí na povrchu měsíce, na spodní hranici a pro body přibližně uprostřed ledové slupky (vše pro $\eta_0 = 10^{15}$ Pa s). Na obrázku 2.5 je zachycena jejich velikost, zatímco na obrázku 2.6 jsou normované na stejnou hodnotu.



Obrázek 2.5 Vlastní směry deviátoru tenzoru napětí t^D . Vlevo na povrchu měsíce, uprostřed ve středu ledové slupky, vpravo na spodní hranici. Žlutou barvou jsou vyznačeny body ledové slupky, v nichž vyhodnocuji tenzor napětí, červené šipky značí extenzi, modré kompresi. Napětí na spodní hranici je zhruba tisíckrát menší než pro horní hranici, na obrázku vpravo jsou tedy šipky z důvodu viditelnosti tisíckrát prodlouženy.



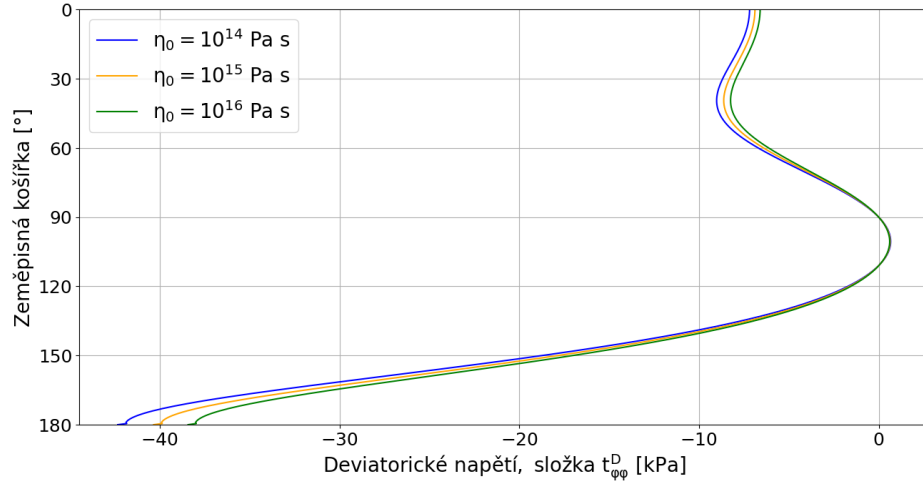
Obrázek 2.6 Vlastní směry deviátoru tenzoru napětí t^D normované na stejnou hodnotu. Černou čárkovanou čarou je znázorněn tzv. tečný cylindr, pomyslný válec rovnoběžný s rotačním vektorem, dotýkající se jádra.

Pokud se na obrázcích 2.5 a 2.6 zaměříme na latitudinální směr, sledujeme obdobné rozložení komprese a extenze jako na obrázku 2.4. Obrázek 2.6 nena-

značuje, že by změna orientace hlavních směrů napětí přímo souvisela s polohou tečného cylindru, protože k její změně dochází v jiné oblasti, než kde se tečný cylindr dotýká ledové slupky.

Ve 2D sférické axisymetrické geometrii má gradient vektorové funkce také longitudinální složku $\varphi\varphi$. Pro deviator tenzoru napětí je zřejmě dána vztahem

$$\mathbf{t}_{\varphi\varphi}^D = 2\eta \frac{v_r}{r}. \quad (2.10)$$



Obrázek 2.7 Longitudinální složka deviatoru tenzoru napětí. Na ose x jsou hodnoty složky $\mathbf{t}_{\varphi\varphi}^D$ a na ose y zeměpisná košířka θ .

Obrázek 2.7 ukazuje, že ledová slupka je v longitudinálním směru v kompresi téměř pro všechny zeměpisné šířky. Nejvyšších hodnot dosahuje $\mathbf{t}_{\varphi\varphi}^D$ v okolí jižního pólu měsíce.

3 Diskuze

V této práci předpokládáme ustálený tvar ledové slupky, a tedy, že rozdíl v tepelných tocích na spodní hranici ledové slupky je kompenzován tečením ledu. Velikost tepelného toku z oceánu se pohybuje v řádu desítek mW m^{-2} s maximem v oblasti jižního pólu. Výsledky, které jsme získali, jsou v souladu s předchozí studií Čadek et al. (2019) a na jejich základě lze usoudit, že aby ledová slupka zůstala stabilní, je potřeba silný tepelný tok v okolí jižního pólu.

Napětí v latitudinálním směru, $t_{\theta\theta}^D$, nabývá na povrchu hodnot desítek kPa, což je řádově srovnatelné s napětím slapového původu, spočítaným v práci Souček, Běhouňková, Čadek et al. (2019). Tyto hodnoty jsou výrazně pod mezí pevnosti krystalického ledu, která byla změřena v laboratorních podmínkách na Zemi (Petrovic, 2003). Přesto na povrchu pozorujeme tektonické útvary. Reálná mez pevnosti ledu totiž může být na Enceladu nižší. Gravitační zrychlení dosahuje pouze $0,13 \text{ m s}^{-2}$ a led nemusí být působením dlouhodobé zátěže plně konsolidovaný. Navíc v místech, kde je ledová slupka tenčí (například na jižním pólu), může být napětí lokálně zesíleno. Pokud bychom se soustředili na menší oblast (okolo nějakého lokálního geologického útvaru), mohli bychom spočítat větší hodnoty napětí.

Z výsledků je patrné, že řada významných geologických procesů se soustředí v oblasti jižního pólu. Uvnitř této oblasti, označované v anglické literatuře jako South Polar Terrain (SPT) a ležící přibližně mezi 150° zeměpisné košířky (60° jižní šířky) a samotným pólem, se nachází čtyři trhliny, souhrnně označované jako Tygří pruhy (angl. Tiger Stripes), které se působením periodické slapové deformace otevírají a zavírají. Právě zde zdokumentovala sonda Cassini přítomnost gejzírů, které těmito trhlínami chrlí částice ledu a vodní páry z podpovrchového oceánu do okolí. Náš model napovídá, že jižní pól je v kompresi, což se v kontrastu s očekávanou extenzí, související s přítomností gejzírů, jeví jako neobvyklý výsledek. Gejzíry jsou běžně spojovány s extenzí, kde roztahování ledové kůry umožňuje vznik trhlin a následné vytrysknutí ledových částic zpod povrchu. Práce Souček, Běhouňková, Lanzendörfer et al. (2024) ovšem popisuje mechanismus, umožňující otevření zlomu i za podmínek celkové komprese (obrázek 2). Protože napětí odhadnuté naším modelem je srovnatelné se slapovým napětím z práce Souček, Běhouňková, Čadek et al. (2019), nemusí ani námi předpovídaná komprese bránit otevření zlomů.

Ledová slupka je v longitudinálním směru v kompresi téměř po celém povrchu. To by mohlo odůvodnit proč u tektonických útvarů na povrchu převažuje severo-j jižní orientace. V této práci jsme pro usnadnění výpočtů zanedbali některé reálné efekty a zavedli několik zjednodušujících předpokladů. Mezi ně například patří fakt, že jsme vztah pro viskozitu uvažovali pouze s teplotní závislostí. Byl tak zcela vynechán vliv napětí. Námi zvolený model viskozity odpovídá tzv. difúznímu tečení (creepu) (Goldsby a Kohlstedt, 2001).

Obecná viskozita, do které kromě difúzního creepu zahrneme i jiné deformační mechanismy polykrystalického ledu, může být popsána pomocí kompozitního modelu pro efektivní viskozitu:

$$\frac{1}{\eta_{eff}} = \frac{1}{\eta_{dif}} + \frac{1}{\eta_{disl}} + \frac{1}{\eta_{GBS} + \eta_{BS}} + \frac{1}{\eta_{max}}, \quad (3.1)$$

kde η_{eff} je efektivní viskozita, η_{disl} dislokační creep, η_{GBS} tečení po hranicích zrn (angl. grain boundary sliding) a η_{BS} skluz v bazálních rovinách zrn (angl. basal slip), které jsou obecně dány vztahem pro viskozitu (viz Kihoulou et al., 2023):

$$\eta_i = \frac{d^p T^r}{2 B (\mathbf{t}_{II}^D)^{n-1}} \exp\left(\frac{Q}{RT}\right), \quad (3.2)$$

kde d je velikost zrna, $\mathbf{t}_{II}^D$ je druhý invariant deviátoru Cauchyho tenzoru napětí a p, r, Q, B a n jsou materiálové parametry popsané v tabulce 1 v práci Kihoulou et al. (2023):

Pokud číselné hodnoty parametrů z této tabulky dosadíme do vztahu (3.2), můžeme si vypočítat také ostatní viskozity a porovnat je pro teplotu na spodní hranici T_m s naším modelem viskozity. Pokud nám vyjdou menší než η_{dif} , znamenalo by to, že ve vztahu pro efektivní viskozitu (3.1) budou hrát větší roli a bylo by ke zvážení, jestli by neměly být zahrnuty do našeho výpočtu. Ve vztahu pro dislokační creep a basal slip nevystupuje velikost zrna, ale je zde závislost na napětí. Vypočítáme si tedy druhý invariant deviatorické části Cauchyho tenzoru napětí: $\mathbf{t}_{II}^D = \sqrt{\mathbf{t}^D : \mathbf{t}^D / 2}$ a vyhodnotíme jej na spodní hranici, kde dosahuje nejvýše 30 Pa. Dostáváme: $\eta_{disl} \approx 10^{24}$ Pa s, $\eta_{BS} \approx 10^{15}$ Pa s.

Ve vztahu pro grain boundary sliding vystupuje kromě napětí také velikost zrna. Tu můžeme určit z našeho modelu dislokačního creepu pomocí (3.2). Viskozita $\eta_0 = 10^{14}$ Pa s odpovídá velikosti zrna 0,6 mm, viskozita $\eta_0 = 10^{15}$ Pa s velikosti 2 mm a $\eta_0 = 10^{16}$ Pa s velikosti 6 mm. Výsledkem je viskozita $\eta_{GBS} \approx 10^{14}$ Pa s pro velikost zrna $d = 0,6$ mm, $\eta_{GBS} \approx 10^{15}$ Pa s pro $d = 2$ mm a $\eta_{GBS} \approx 10^{16}$ Pa s pro $d = 6$ mm, neboli $\eta_{GBS} \approx \eta_0$. Na základě toho můžeme usoudit, že pro viskozitu $\eta_0 = 10^{16}$ Pa s se začíná významněji projevovat vliv dalších reologických mechanismů, a zvolený model viskozity tak nemusí být nadále postačující.

Dalšími zjednodušeními jsou Boussinesqova aproximace a zanedbání setrvačných sil v rovnici popisující zákon zachování hybnosti. Běžně používaná Boussinesqova aproximace umožňuje zjednodušit formulaci rovnic bez zásadní ztráty přesnosti výsledků. Zanedbání setrvačných sil v rovnici zachování hybnosti je rovněž fyzikálně rozumné, protože Prandtlovo číslo ledu je vysoké a viskózní síly tak výrazně převyšují síly setrvačné. Předpoklad stacionárního rozložení teploty se zanedbáním konvektivního členu je odůvodněný tím, že rychlosti tečení ledu jsou malé a směřují podél hranice ledové slupky.

Pro popis ledu jsme využili model newtonovské viskózní tekutiny, což je běžná praxe při popisování chování ledu na dlouhých časových škálách. Na povrchu měsíce však pozorujeme geologické útvary, které vznikly prasknutím ledu. Pokud bychom je chtěli zahrnout do našich výpočtů, museli bychom pracovat s visko-elasto-plastickou reologií ledu.

Ve výpočtech jsme uvažovali 2D axisymetrickou oblast, když jsme využili skutečnosti, že změny tloušťky ledu na Enceladu v závislosti na zeměpisné délce jsou ve srovnání se změnami podle zeměpisné šířky zanedbatelné. Trojrozměrný model ale více odpovídá reálné situaci, proto by v případném pokračování práce bylo rozumné rozšířit naše výpočty do 3D sférické geometrie.

Závěr

V této práci jsme se zabývali deformací a přenosem tepla na Enceladu. Vytvořili jsme pomocí softwaru FEniCS program pro řešení diferenciálních rovnic metodou konečných prvků a pomocí něj se pokusili odpovědět na otázky, jak predikované pole napětí na Enceladu souvisí s tektonickým obrazem ledové slupky a zda vypočítaný tepelný tok s oceánu odpovídá modelům oceánské dynamiky.

Při interpretaci výsledků je důležité vzít v potaz všechna zjednodušení, kterých jsme se dopustili v několika aspektech našeho modelu. Zatímco Boussinesqova aproximace či zanedbání setrvačných sil bude mít na výsledek pouze malý vliv, tak 2D geometrie nebo viskózní chování ledu by jej mohlo ovlivnit více.

Výsledky práce můžeme shrnout do následujících bodů:

1. Velikost napětí v tečném směru se pohybuje v řádu desítek kPa a dosahuje maximálních hodnot 42 kPa v oblasti jižního pólu. Ledová slupka je v latitudinálním směru v rovníkových oblastech v extenzi a naopak na obou pólech v kompresi.
2. V longitudinálním směru je ledová půlka v kompresi pro téměř všechny zeměpisné košíčky a nejvyšších hodnot přibližně 40 kPa dosahuje opět v blízkosti jižního pólu.
3. Tepelný tok z oceánu je nejvyšší v oblasti jižního pólu, kde může nabývat přes 70 mW m^{-2} . Tyto výsledky ukazují, že aby ledová slupka zůstala stabilní, potřebuje na jižním pólu výrazný tepelný tok z oceánu.

Do budoucna by bylo možné využít jiné modely tloušťky ledové slupky, které vznikly v minulých letech, a porovnat je s výsledky této práce. V následujících studiích také můžeme zohlednit některé ze zjednodušujících předpokladů použitých v této práci (například přechod ke 3D geometrii).

Literatura

- A, G.; WAHR, J.; ZHONG, S., 2014. The effects of laterally varying icy shell structure on the tidal response of Ganymede and Europa. *J. Geophys. Res.: Planets*. Roč. 119, s. 659–678. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/2013JE004570>.
- ALNÆS, M.; BLECHTA, J.; HAKE, J.; JOHANSSON, A.; KEHLET, B.; LOGG, A.; RICHARDSON, C.; RING, J.; ROGNES, M. E.; WELLS, G. N., 2015. The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software*. Roč. 3, s. 9–23. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.11588/ans.2015.100.20553>.
- BEUTHE, M., 2018. Enceladus's crust as a non-uniform thin shell: I tidal deformations. *Icarus*. Roč. 302, s. 145–174. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.11.009>.
- BLANKENBACH, B.; BUSSE, F.; CHRISTENSEN, U.; CSEREPES, L.; GUNKEL, D.; HANSEN, U.; HARDER, H.; JARVIS, G.; KOCH, M.; MARQUART, G. et al., 1989. A benchmark comparison for mantle convection codes. *Geophys. J. Intern.* Roč. 98, s. 23–38. Dostupné z DOI: [10.1111/j.1365-246X.1989.tb05511.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1989.tb05511.x).
- BURMAN, Erik, 2012. A Penalty-Free Nonsymmetric Nitsche-Type Method for the Weak Imposition of Boundary Conditions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. Roč. 50, s. 1959–1981. Dostupné z DOI: [10.1137/10081784X](https://doi.org/10.1137/10081784X).
- CARNAHAN, E.; WOLFENBARGER, N.S.; JORDAN, J.S.; HESSE, M.A., 2021. New insights into temperature-dependent ice properties and their effect on ice shell convection for icy ocean worlds. *Earth and Planet. Sci. Lett.* Roč. 563, s. 116886. Dostupné z DOI: [10.1016/j.epsl.2021.116886](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2021.116886).
- ČADEK, O.; SOUČEK, O.; BĚHOUNKOVÁ, M.; CHOBLET, G.; TOBIE, G.; HRON, J., 2019. Long-term stability of Enceladus' uneven ice shell. *Icarus*. Roč. 319, s. 476–484. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.10.003>.
- DOTSON, R., 2018. *Enceladus and the Icy Moons of Saturn* [online]. University of Arizona Press [cit. 2024-11-06]. ISBN 9780816537075. Dostupné z: <http://www.jstor.org/stable/j.ctv65sw2b>.
- GOLDSBY, D. L.; KOHLSTEDT, D. L., 2001. Superplastic deformation of ice: Experimental observations. *J. Geophys. Res.-Solid Earth*. Roč. 106, s. 11017–11030. Dostupné z DOI: [10.1029/2000JB900336](https://doi.org/10.1029/2000JB900336).
- KIHOULOU, M., 2021. *Impact crater relaxation throughout the Solar System*. Dipl. pr. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.
- KIHOULOU, M.; ČADEK, O.; KVORKA, J.; KALOUSOVÁ, K.; CHOBLET, G.; TOBIE, G., 2023. Topographic response to ocean heat flux anomaly on the icy moons of Jupiter and Saturn. *Icarus*. Roč. 391, s. 115337. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2022.115337>.
- KVORKA, J.; ČADEK, O.; TOBIE, G.; CHOBLET, G., 2018. Does Titan's long-wavelength topography contain information about subsurface ocean dynamics? *Icarus*. Roč. 310, s. 149–164. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.12.010>.

- LARSON, M.; BENGZON, F., 2013. *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*. Springer Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-642-33286-9. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-642-33287-6.
- LOGG, A.; WELLS, G.; MARDAL, K.A., 2012. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method: The FEniCS Book*. Springer Berlin, Heidelberg. ISBN 978-3-642-23098-1. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-642-23099-8.
- MARTINEC, Z., 2011. Continuum Mechanics (Lecture Notes), s. 159–169. Dostupné také z: <https://geo.mff.cuni.cz/studium/Martinec-ContinuumMechanics.pdf>.
- MCCORD, T. B.; SOTIN, C., 2005. Ceres: Evolution and current state. *J. Geophys. Res.* Roč. 110, E05009. Dostupné z DOI: 10.1029/2004JE002244.
- NIMMO, F.; PAPPALARDO, R. T., 2016. Ocean worlds in the outer solar system. *J. Geophys. Res.: Planets*. Roč. 121, s. 1378–1399. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/2016JE005081>.
- PETROVIC, J., 2003. Review Mechanical properties of ice and snow. *Journal of Materials Science*. Roč. 38, s. 1–6. Dostupné z DOI: 10.1023/A:1021134128038.
- POSTBERG, F.; KEMPF, S.; SCHMIDT, J.; BRILLIANTOV, N.; BEINSEN, A.; ABEL, B.; BUCK, U.; SRAMA, R., 2009. Sodium salts in E-ring ice grains from an ocean below the surface of Enceladus. *Nature*. Roč. 459, s. 1098–1101. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1038/nature08046>.
- SLATTERY, J.C.; SAGIS, L.; OH, E.S., 2007. *Interfacial transport phenomena*. Springer Science & Business Media. ISBN 978-0-387-38438-2. Dostupné z DOI: 10.1007/978-0-387-38442-9.
- SOUČEK, O.; BĚHOUNKOVÁ, M.; ČADEK, O.; HRON, J.; TOBIE, G.; CHOBLET, G., 2019. Tidal dissipation in Enceladus' uneven, fractured ice shell. *Icarus*. Roč. 328, s. 218–231. Dostupné z DOI: 10.1016/j.icarus.2019.02.012.
- SOUČEK, O.; BĚHOUNKOVÁ, M.; LANZENDÖRFER, M.; TOBIE, G.; CHOBLET, G., 2024. Variations in plume activity reveal the dynamics of water-filled faults on Enceladus. *Nature Communications*. Roč. 15. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1038/s41467-024-51677-z>.

Seznam obrázků

1	Umělecké ztvárnění Enceladu na základě snímků sondy Cassini . .	6
2	Model tloušťky ledové slupky	7
1.1	Výpočetní oblast Ω	10
2.1	Normálové složky tepelného toku $\vec{q}$ a rychlosti $\vec{v}$ na spodní hranici pro $\eta_0 = 10^{14}$ Pa s v závislosti na zeměpisné košířce.	18
2.2	Normálové složky tepelného toku $\vec{q}$ a rychlosti $\vec{v}$ na spodní hranici pro $\eta_0 = 10^{15}$ Pa s v závislosti na zeměpisné košířce.	18
2.3	Normálové složky tepelného toku $\vec{q}$ a rychlosti $\vec{v}$ na spodní hranici pro $\eta_0 = 10^{16}$ Pa s v závislosti na zeměpisné košířce.	19
2.4	Deviátor tenzoru napětí $\mathbf{t}^D$ (složka $\mathbf{t}_{\theta\theta}^D$) na horní hranici	20
2.5	Vlastní směry deviátoru tenzoru napětí $\mathbf{t}^D$	21
2.6	Vlastní směry deviátoru tenzoru napětí $\mathbf{t}^D$ normované na stejnou hodnotu.	21
2.7	Longitudinální složka deviátoru tenzoru napětí	22
A.1	Nusseltovo číslo (případ 1a)	32
A.2	Střední kvadratická rychlost (případ 1a)	32
A.3	Nusseltovo číslo (případ 1b)	33
A.4	Střední kvadratická rychlost (případ 1b)	33
A.5	Nusseltovo číslo (případ 1c)	33
A.6	Střední kvadratická rychlost (případ 1c)	34
A.7	Nusseltovo číslo (případ 2a)	34
A.8	Střední kvadratická rychlost (případ 2a)	34
A.9	Případ 1a: ustálený stav teploty a rychlosti	35
A.10	Případ 1b: ustálený stav teploty a rychlosti.	36
A.11	Případ 1c: ustálený stav teploty a rychlosti.	37
A.12	Případ 2a: ustálený stav teploty a rychlosti.	38

Seznam tabulek

1.1	Seznam parametrů a konstant	9
A.1	Seznam parametrů a konstant v benchmarku	30
A.2	Porovnání Nusseltova čísla a střední kvadratické rychlosti s hodnotami z Blankenbach et al. (1989) (případy 1a, 1b, 1c, 2a)	31
A.3	Relativní odchylky od hodnot z Blankenbach et al. (1989)	31

A Přílohy

A.1 Konvekční benchmark

Před samotným řešením řídicích rovnic uvnitř ledové slupky Enceladu pomocí softwaru FEniCS jsme nejprve ověřili správnost jejich implementace a současně získali praktické zkušenosti s tímto nástrojem. K tomu jsme využili konvekční benchmark (Blankenbach et al., 1989), kde jsme porovnali naše výsledky — bezrozměrné Nusseltovo číslo Nu a střední kvadratickou rychlost v_{rms} — s referenčními hodnotami.

V konvekčním benchmarku nalezneme srovnání výsledků dvanácti různých výpočtů rovnic termální konvekce v pravoúhlé oblasti o délce l a výšce h . Nusseltovo číslo (poměr celkového a konduktivního tepelného toku) a střední kvadratická rychlost se v Blankenbach et al. (1989) počítají pomocí vztahů:

$$Nu = -h \frac{\int_0^l \partial_z T(x, z = h) dx}{\int_0^l T(x, z = 0) dx}, \quad (\text{A.1})$$

$$v_{rms} = \frac{h}{\kappa} \left(\frac{1}{hl} \int_0^l \int_0^h \vec{v} \cdot \vec{v} dz dx \right)^{1/2}, \quad (\text{A.2})$$

kde κ je tepelná difuzivita, $\partial_z T = \frac{\partial T}{\partial z}$ a h a l jsou výška a délka výpočetní oblasti. V tabulce A.1 shrnujeme číselné hodnoty parametrů a konstant používané v konvekčním benchmarku.

Parametr	Význam	Hodnota	Jednotka
g	gravitační zrychlení	10	m s^{-2}
ρ_0	referenční hustota	4000	kg m^{-3}
c_p	měrná tepelná kapacita	1250	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$
α	koeficient teplotní roztažnosti	$2,5 \cdot 10^{-5}$	K^{-1}
T_0	referenční teplota pro hustotu	0	K
ΔT	teplotní rozdíl	1000	K
h	výška oblasti	10^6	m
κ	tepelná difuzivita	10^{-6}	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ν (1a)	kinematická viskozita (1a)	$2,5 \cdot 10^{19}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ν (1b)	kinematická viskozita (1b)	$2,5 \cdot 10^{18}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ν (1c)	kinematická viskozita (1c)	$2,5 \cdot 10^{17}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
ν_0 (2a)	kinematická viskozita na povrchu (2a)	$2,5 \cdot 10^{19}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

Tabulka A.1 Seznam parametrů a konstant v benchmarku

Poznámka: ΔT zde značí teplotní kontrast mezi spodní a horní hranicí a c_p je měrná tepelná kapacita při konstantním tlaku. Využijeme následující vztahy mezi dynamickou a kinematickou viskozitou a mezi teplotní difuzivitou a teplotní vodivostí.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (\text{A.3})$$

$$k = \frac{\kappa}{\rho c_p}. \quad (\text{A.4})$$

Případ 1a-1c

Nejprve se podívejme na řešení rovnic (1.1), (1.6) a (1.3) ve čtvercové oblasti se stranou $h = l = 10^6$ m, kde předepíšeme na horní hranici teplotu $T = 0$ a na spodní hranici teplotu ΔT . U bočních hranic pak nulový tepelný tok ($\frac{\partial T}{\partial x} = 0$) a na každé hranici nulovou normálovou složku rychlosti, viz (1.9). Vnitřní zahřívání nebudeme uvažovat. Kinematickou viskozitu uvažujeme konstantní a zvolíme ji následovně:

- (a) $\nu = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- (b) $\nu = 2,5 \cdot 10^{18} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
- (c) $\nu = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Případ 2a

Následně zachováme oblast i okrajové podmínky, ale tentokrát budeme uvažovat teplotně závislou viskozitu danou předpisem:

$$\nu(T) = \nu_0 \cdot \exp\left(\frac{-bT}{\Delta T}\right), \quad (\text{A.5})$$

kde $b = \ln(1000)$. Vnitřní zahřívání opět nebudeme uvažovat.

Výsledky

Výsledky si nejprve shrneme do tabulky A.2 a poté je zakreslíme do grafů. V tabulce A.3 jsou relativní odchylky námi vypočítaných hodnot od hodnot z Blankenbach et al. (1989).

Případ	Nu	Nu (ref)	v_{rms}	v_{rms} (ref)
1a	4,8884	4,8844	42,8617	42,8650
1b	10,5793	10,5341	193,2140	193,2146
1c	22,3997	21,9725	833,9630	833,9909
2a	10,0742	10,0660	479,2810	480,4334

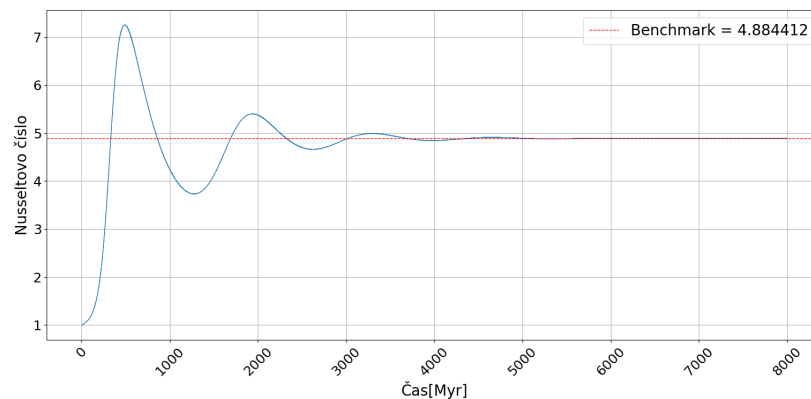
Tabulka A.2 Porovnání Nusseltova čísla a střední kvadratické rychlosti s hodnotami z Blankenbach et al. (1989) (případy 1a, 1b, 1c, 2a)

Případ	Nu	v_{rms}
1a	0,0008	$7,7 \cdot 10^{-5}$
1b	0,0043	$3,1 \cdot 10^{-6}$
1c	0,0194	$3,3 \cdot 10^{-5}$
2a	0,0008	0,0024

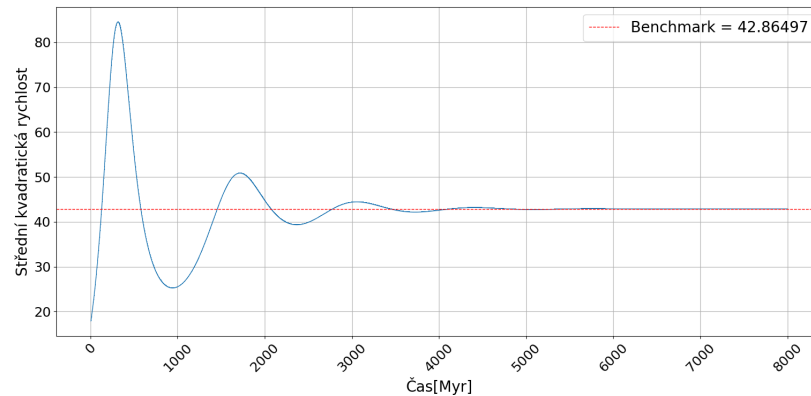
Tabulka A.3 Relativní odchylky od hodnot z Blankenbach et al. (1989)

Pozorujeme, že v případě konstantní kinematické viskozity (1a-1c) s klesající viskozitou klesá také přesnost výpočtu Nusseltova čísla. Při výpočtu střední kvadratické rychlosti jsme v těchto případech (bez ohledu na hodnotu kinematické viskozity) dosáhli velmi dobré přesnosti, mnohem lepší než u Nusseltova čísla. V případě teplotně závislé viskozity (2a) máme pro Nusseltovo číslo podobnou shodu s benchmarkem jako pro konstantní viskozitu z případu 1a, zatímco přesnost u výpočtu střední kvadratické rychlosti se výrazně zhoršila.

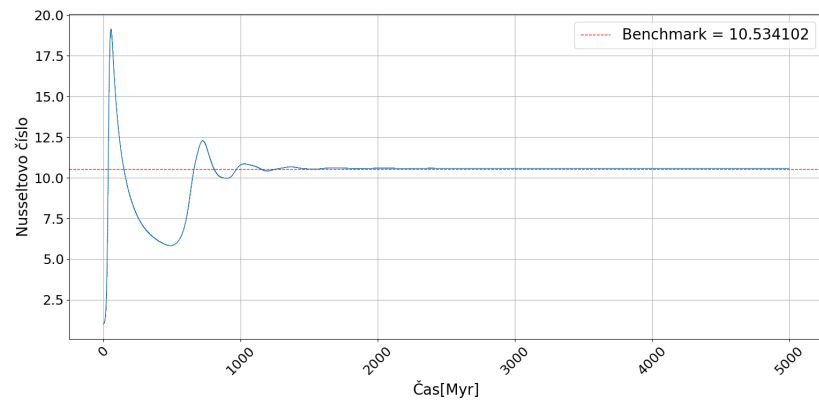
Na následujících obrázcích A.1-A.8 je znázorněn vývoj hodnoty Nusseltova čísla, nebo střední kvadratické rychlosti v průběhu výpočtu konvekce.



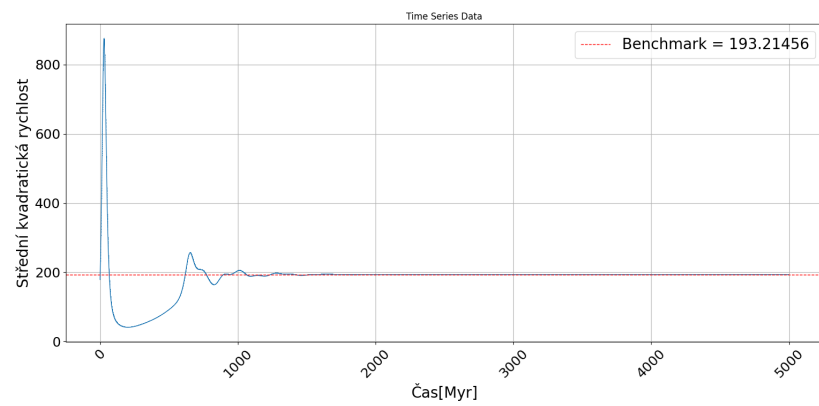
Obrázek A.1 Nusseltovo číslo (případ 1a)



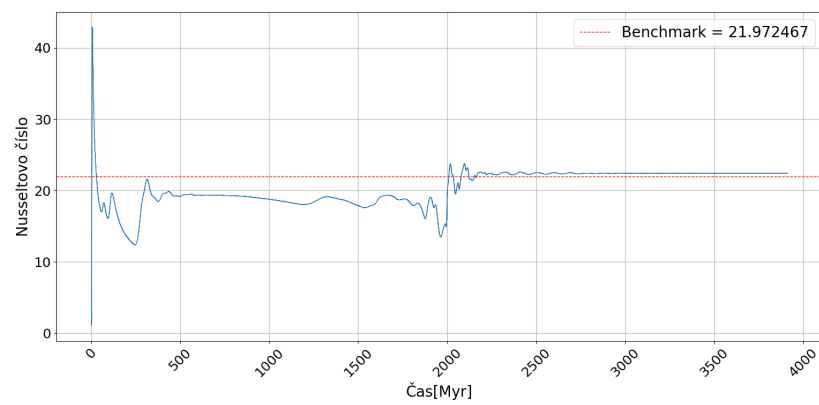
Obrázek A.2 Střední kvadratická rychlost (případ 1a)



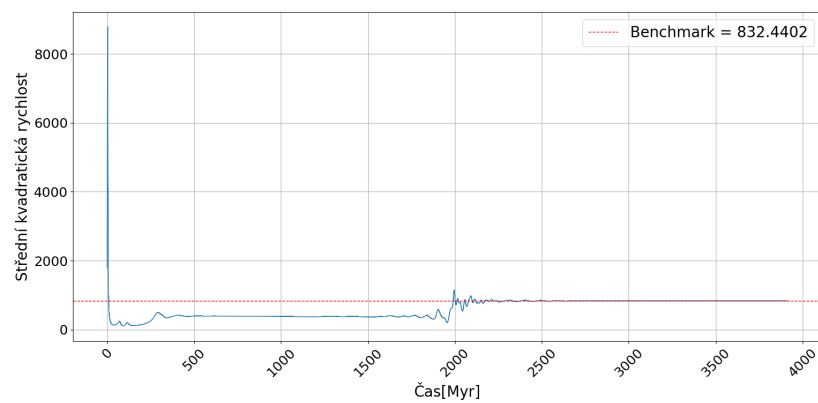
Obrázek A.3 Nusseltovo číslo (případ 1b)



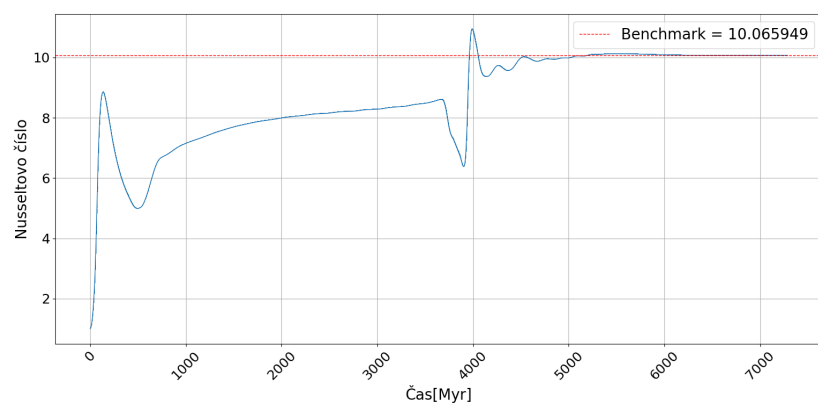
Obrázek A.4 Střední kvadratická rychlost (případ 1b)



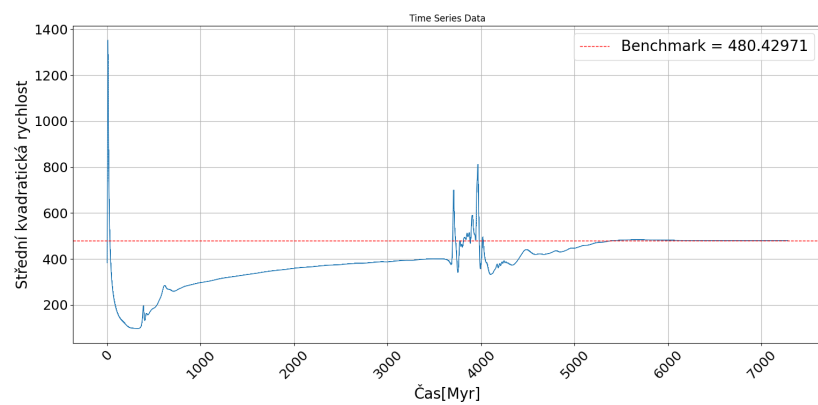
Obrázek A.5 Nusseltovo číslo (případ 1c)



Obrázek A.6 Střední kvadratická rychlost (případ 1c)

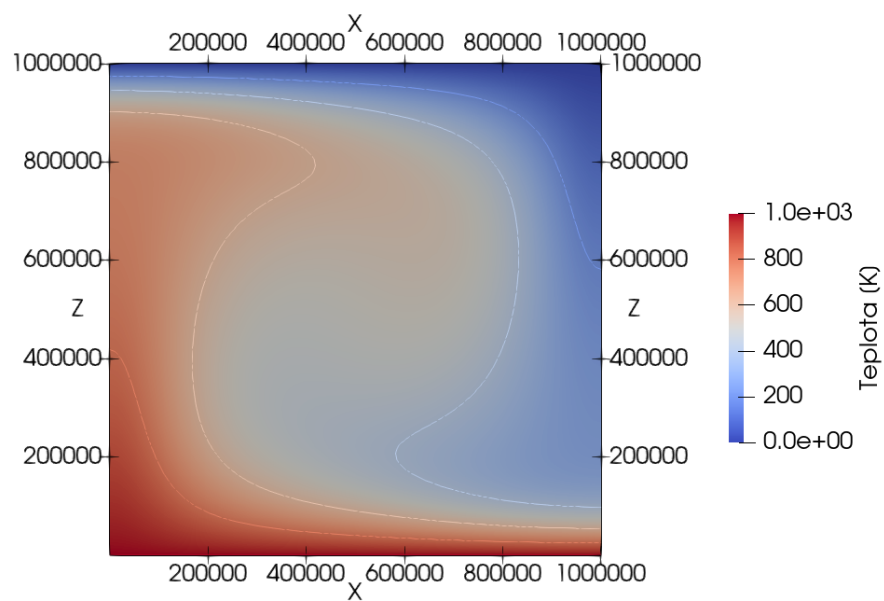


Obrázek A.7 Nusseltovo číslo (případ 2a)

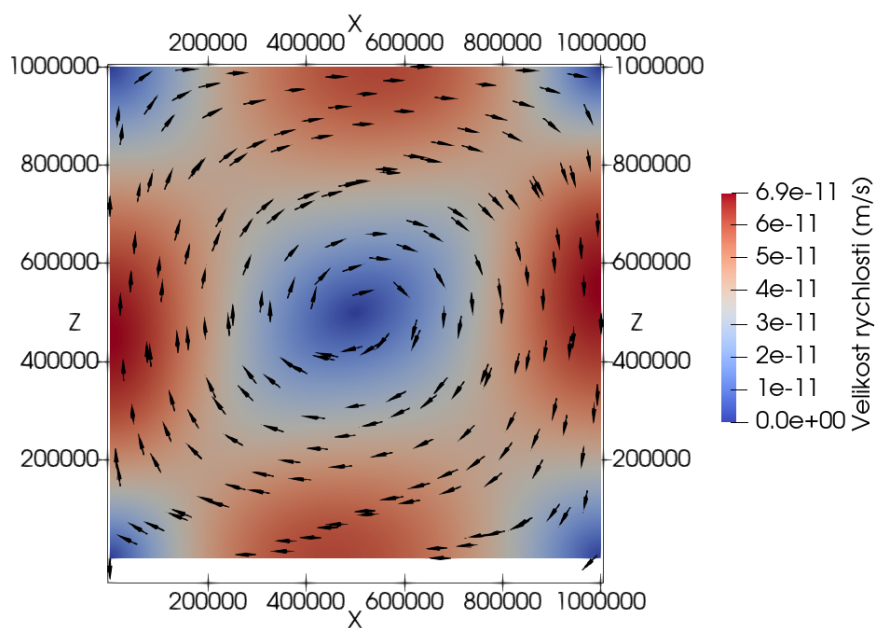


Obrázek A.8 Střední kvadratická rychlost (případ 2a)

Podívejme se ještě na ustálené stavy teploty a rychlosti.

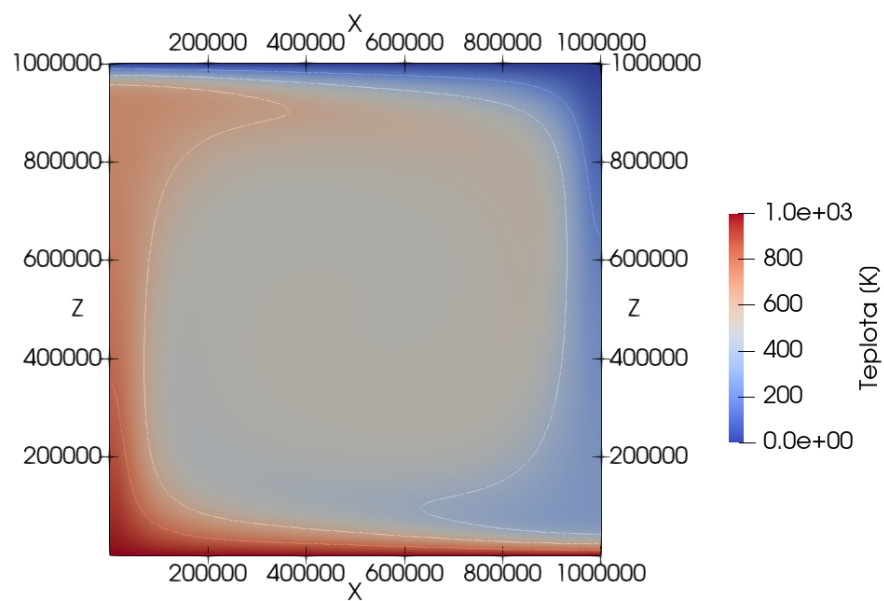


(a) Teplota 1a.

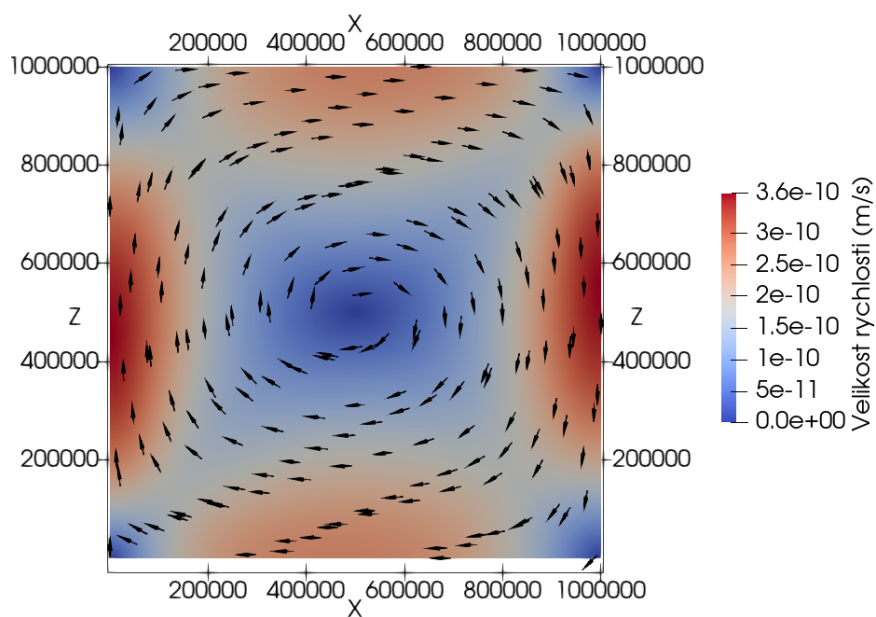


(b) Velikosti rychlosti 1a.

Obrázek A.9 Příklad 1a: ustálený stav teploty a rychlosti. Vrstevnice v teplotním poli odpovídají kroku 200 K.

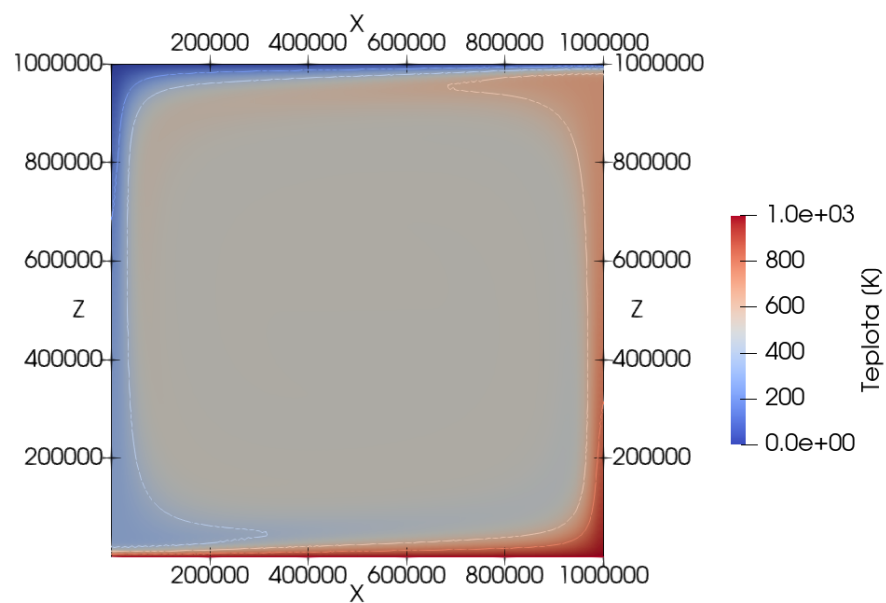


(a) Teplota 1b.

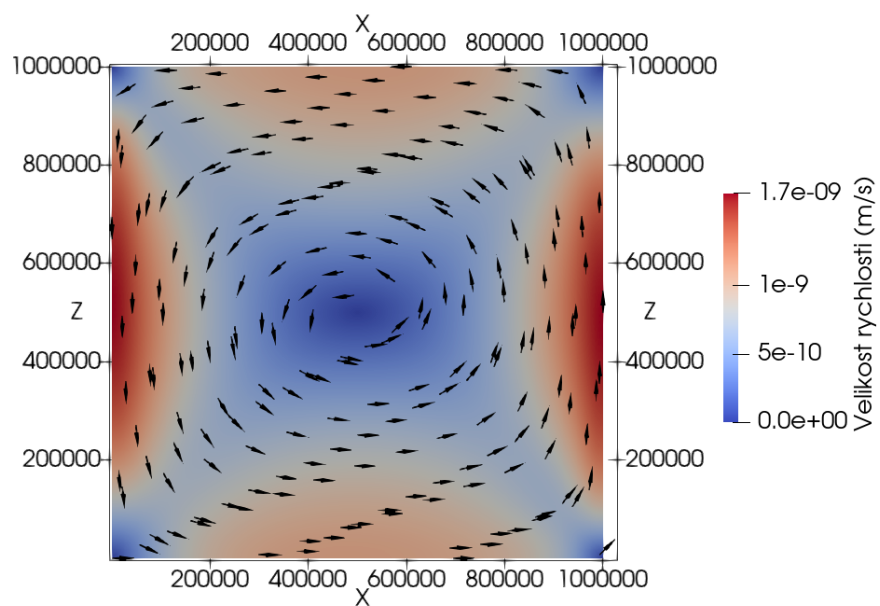


(b) Velikost rychlosti 1b.

Obrázek A.10 Příklad 1b: ustálený stav teploty a rychlosti.

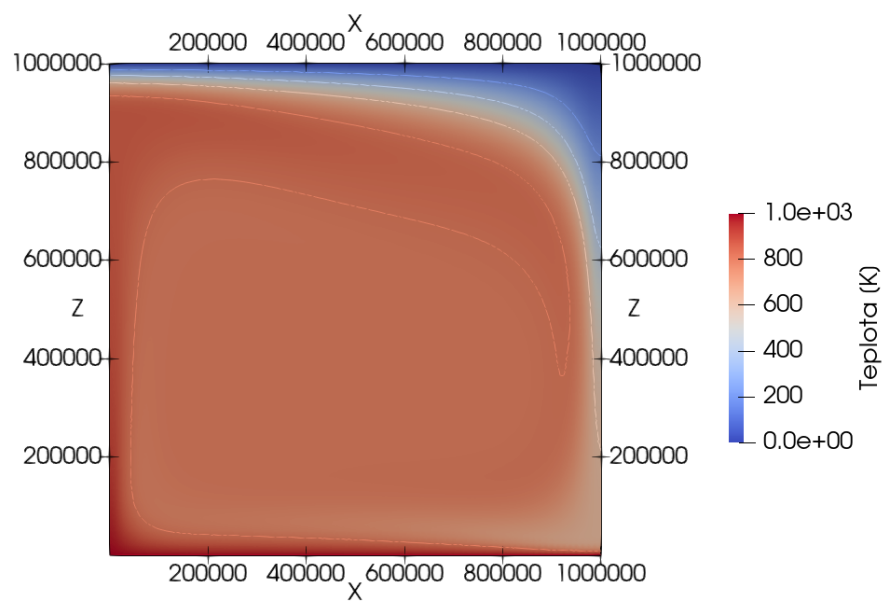


(a) Teplota 1c.

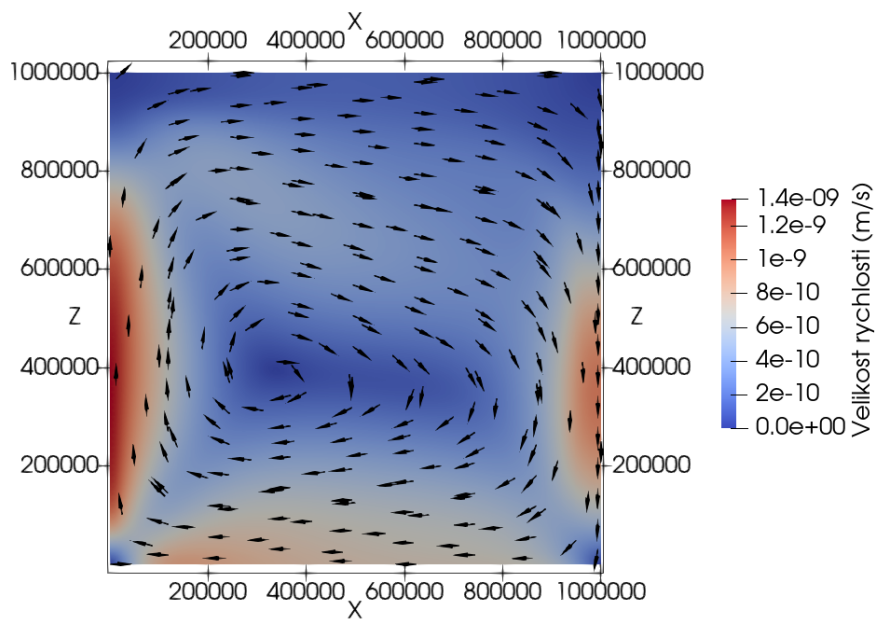


(b) Velikost rychlosti 1c.

Obrázek A.11 Příklad 1c: ustálený stav teploty a rychlosti.



(a) Teplota 2a.



(b) Velikost rychlosti 2a.

Obrázek A.12 Příklad 2a: ustálený stav teploty a rychlosti.