

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Šrank

Rychlost reorientace slapově vázaných měsíců

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Vojtěch Patočka, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Praha 2025

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Rád by som poďakoval RNDr. Vojtěchovi Patočkovi, Ph.D. za odborné rady ale aj trpezlivé vysvetľovanie práce s príkazovým riadkom. Ďakujem taktiež mojím najbližším za podporu počas celého štúdia.

Název práce: Rychlost reorientace slapově vázaných měsíců

Autor: Michal Šrank

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Vojtěch Patočka, Ph.D., Katedra geofyziky

Abstrakt: Práce se zabývá rychlostí reorientace slapově vázaných těles. Nejprve je přiblížen princip reorientace rotační osy tělesa, dané vznikem topografické zátěže na něm. Dále je odvozena příslušná pohybová rovnice a formulován problém potenciální nestabilní rotace tělesa, v důsledku degenerace jeho tenzoru setrvačnosti. Jsou vysvětleny předpoklady numerické metody, použité k výpočtům reorientace. Je ověřena stabilita rotační osy, následně je zkoumána rychlost reorientace, v závislosti na parametrech zátěže jako jsou velikost, poloha a doba vzniku. Jsou použity modely dvou těles, se zanedbatelným a naopak významným slapovým vydutím.

Klíčová slova: rotační dynamika planet, numerické metody, kolébání

Title: Reorientation speed of tidally locked moons

Author: Michal Šrank

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Vojtěch Patočka, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: In this thesis, reorientation speed of tidally locked bodies is studied. Firstly, reorientation of the body's rotational axis, caused by topographic load formation, is explained. Then, corresponding equation of motion is derived and the problem of potentially unstable rotation of the body, arising from its inertia tensor degeneracy, is described. Assumptions of the numerical method, used for reorientation calculations are explained further. Stability of the rotational axis is verified, then the reorientation speed, as a function of load parameters such as load's size, position and loading time, is studied. Two different bodies are used throughout the paper, one having negligible, the other one significant tidal bulge.

Keywords: rotational dynamics of planets, numerical methods, wobble

Obsah

Úvod	6
1 Teoretický popis	9
1.1 Liouvillova rovnica	9
1.2 Moment slapových síl	10
1.3 Veta o tenisovej rakete	11
1.4 Rotácia deformujúceho sa telesa	12
2 Numerická metóda	13
2.1 Približné riešenie Liouvillovej rovnice	13
2.2 Modelovanie záťaže	14
2.3 Modelovanie telies	15
3 Nestabilná rotácia?	18
3.1 Priblíženie vlastných čísel	18
3.2 Kritické polohy záťaže	19
4 Rýchlosť reorientácie	21
4.1 Počiatočná poloha	21
4.2 Veľkosť záťaže	26
4.3 Čas nárastu	27
Záver	28
Literatúra	29
Dodatok: Vplyv slapového vydutia na trajektóriu záťaže	31

Úvod

Reorientácia vesmírneho telesa (true polar wander) je jav, kedy sa jeho rotačná osa v dôsledku zmeny rozloženia hmoty v telese presunie, vzhľadom k sústave spojennej s telesom. Príčina redistribúcie hmoty môže byť vonkajšia alebo vnútorná. Pri vnútornej (napríklad plášťová konvekcia, zmena zaľadnenia, vulkanická činnosť, tektonické pohyby a pod.) sa nemení celková hmotnosť telesa, iba jej priestorové rozloženie. Vonkajšie príčiny (dopady vesmírnych telies, erózia a pod.) menia okrem rozloženia hmoty aj celkovú hmotnosť a hybnosť telesa. V tejto práci sa zaoberáme reorientáciou spôsobenou vnútornými príčinami. Takéto preskupenia hmoty (ďalej označované ako záťaže) tak zmenia pôvodný moment zotrvačnosti telesa pričítaním bezstopového tenzoru. Reorientáciu telesa treba taktiež odlíšiť od zdanlivého posunu pólov (apparent polar wander), spôsobeného kontinentálnym driftom.

Motivácia pre štúdium reorientácie vychádza z početných pozorovaní ukazujúcich na zrejmy výskyt tohto javu na viacerých telesách slnečnej sústavy. Ide napríklad o planétu Mars, kde oblasť veľkých vulkánov Tharasis Montes bola kedysi asi o 25° severnejšie ako je dnes [1]. Ďalšími príkladmi sú mesiac Saturnu Enceladus [2], mesiac Jupitera Európa [3] a nakoniec aj nami skúmaná planétka Pluto, kde nahromadenie dusíkového ľadu v kráteri Sputnik taktiež spôsobilo reorientáciu [4].

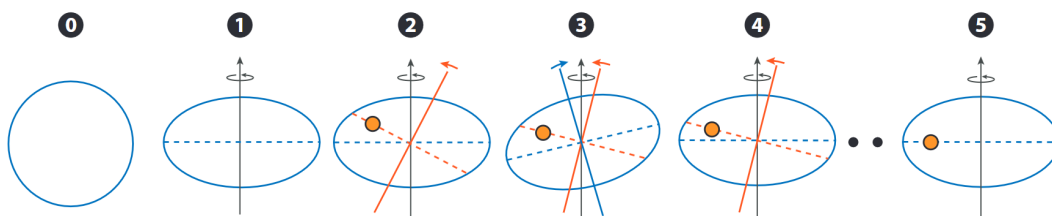
V počiatočnom stave, t.j. pred vznikom záťaže, budeme uvažovať rotáciu telesa okolo osi totožnej s vlastným vektorom jeho tenzoru zotrvačnosti s maximálnym vlastným číslom. To je zrejme správny predpoklad, keďže vesmírne telesá sú napospol deformovateľné, teda rotáciou okolo ľubovoľnej osi získavajú rotačné vydutie v rovine kolmej na túto os. Tvar každého takého telesa potom vieme (pri zanedbaní slapových síl) získať rozrotovaním gule okolo nejakej, v čase nemennej osi. Následným rotačným vydutím tak prejde v sústave z vlastných vektorov jej pôvodne izotropný tenzor zotrvačnosti na tvar $\mathbf{I} = \text{diag}(I_A, I_A, I_C)^1$, kde $I_C > I_A$, teda teleso naozaj rotuje okolo osi s maximálnym vlastným číslom. Ako ukážeme v práci, rotácia deformovateľného telesa je z dlhodobého hľadiska stabilná iba okolo tejto osi. Pri vzniku záťaže preto teleso reorientuje svoju osu rotácie tak, aby sa opäť zhodovala s hlavným smerom nového tenzoru zotrvačnosti s maximálnym vlastným číslom. Ukazuje sa (viď Patočka, 2021 [5]), že rovnobežnosť týchto dvoch osí je s dostatočnou presnosťou stála, čo využijeme ďalej pri numerickom modelovaní reorientácie.

Skôr, ako budeme v popise reorientácie pokračovať, osvojme si pre prehľadnosť označenie osi v hlavnom smere tenzoru zotrvačnosti s maximálnym, stredným, či

¹V celej práci označujeme skaláry *kurzívou*, vektory *tučnou kurzívou* a tenzory 2. stupňa *tučným písmom*.

minimálnym vlastným číslom jednoducho ako (hlavnú) osu maximálnu, strednú či minimálnu.

Teraz už môžeme proces reorientácie schematicky ilustrovať. Na obrázku 0.1 (prevzaté Matsuyama a kol., 2013 [6]) je takáto schéma pre reorientáciu v dôsledku nahromadenia hmoty v určitom mieste na povrchu telesa (tzv. kladná záťaž). Na začiatku je teleso v hydrostatickej rovnováhe s odstredivou silou, čo sa prejaví rotačným vydutím okolo rovníku (obr. 0.1.1). Pridaním záťaže sa začne jej maximálna osa (oranžová) približovať k rotačnej ose telesa (čierna, obr. 0.1.2), čo spôsobí vychýlenie maximálnej osi rotačného vydutia (modrá, obr. 0.1.3). Záťaž sa totiž po telese nepohybuje. Následne sa rotačné vydutie opäť zjednotí s novou osou rotácie (obr. 0.1.4), keďže stabilizácia rotačným vydutím je iba prechodná (viď Gold, 1955 [7]) a teleso ďalej reorientuje svoju osu, až kým je voči nej záťaž na rovníku (obr. 0.1.5). V prípade zápornej záťaže (odoberanie hmoty) proces prebehne analogicky, so stabilnou polohou na póle. Čo presne sa myslí kladnou resp. zápornou záťažou, popíšeme bližšie v časti 2.2.



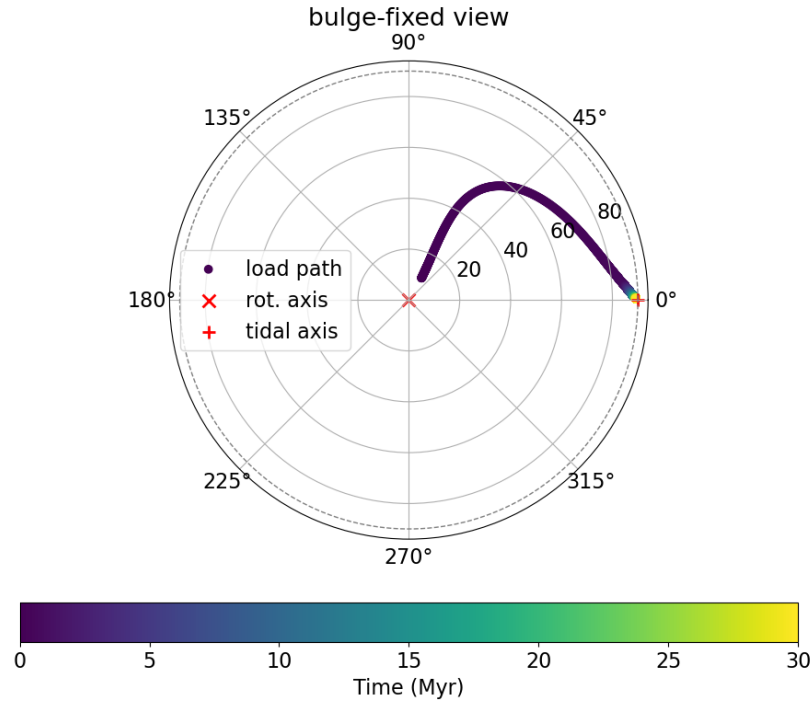
Obr. 0.1: Princíp reorientácie (prevzaté z [6]).

Proces reorientácie na obrázku 0.1 implicitne predpokladá existenciu iba rotačného vydutia telesa. Videli sme, že takáto reorientácia je latitudálna. V práci ale budeme uvažovať aj slapové sily, teda nami skúmané telesá budú mať okrem rotačného vydutia aj vydutie slapové, spôsobené gravitačným pôsobením hostujúceho telesa. Skúmané teleso tak už nebude rotačný elipsoid ale elipsoid trojosý a výsledná krivka reorientácie bude mať vo všeobecnosti latitudálnu aj longitudálnu zložku, viď obrázok 0.2. Miera týchto dvoch typov reorientácie bude závisieť od počiatočnej polohy záťaže na povrchu telesa ako aj od veľkosti rotačného resp. slapového vydutia a veľkosti samotnej záťaže.

V princípe je možné nájsť takú polohu a veľkosť záťaže, ktorá spôsobí degeneráciu niektorej dvojice hlavných osí výsledného tenzoru zotrvačnosti. Špeciálne prekryv maximálneho a stredného vlastného čísla naruší rotačnú stabilitu telesa. Pri rotácii okolo strednej osi je totiž teleso v stave labilnej rovnováhy, teda ľubovoľne malý vonkajší vplyv vyvolá významné pohyby rotačnej osi. Tento jav je známy ako *Dzhanibekov effect* a bližšie sa mu venujeme v časti 1.3.

Ukazuje sa však, že týmto nestabilitám teleso predchádza práve priebežnou reorientáciou a prekryv vlastných čísel nastane iba pri istých singulárnych, teda nefyzikálnych polohách záťaže. Toto detailnejšie skúma kapitola 3.

Kapitola 4 sa zaoberá rýchlosťou reorientácie. V súvislosti so spomínanými dôkazmi o prítomnosti reorientácie na telesách slnečnej sústavy v minulosti treba totiž dodať, že prvé fotografie týchto telies majú už niekoľko desiatok rokov, a preto nám práve rýchlosť reorientácie napovie, aké sú charakteristické časy týchto dejov a či je možné očakávať pozorovateľný posun rotačnej osi na fotografiách od súčasných resp. nadchádzajúcich vesmírnych misií.



Obr. 0.2: Reorientácia Pluta v dôsledku kladnej záťaže v polohe $(\theta, \varphi) = (10^\circ, 60^\circ)$. Obrázok je v tzv. geografických (bulge-fixed) súradniciach, kedy fixujeme orientáciu rotačného a slapového vydutia planéty. Reorientácia tak v týchto súradniciach vyzerá ako putovanie záťaže po planéte.

Konkrétne budeme skúmať rýchlosť reorientácie ako funkciu počiatočnej polohy záťaže, jej veľkosti a rýchlosti vzniku. To všetko pre prípad telesa s veľkým aj malým slapovým vydutím. Pôjde o ľadový mesiac Saturnu Mimas a planétku Pluto, ktorá tvorí binárny systém s jej mesiacom Chárónom. Obe tieto telesá rotujú tzv. viazane, čo znamená, že okolo svojho hostiteľa obehnú za rovnakú dobu, za akú sa otočia okolo vlastnej osi. Ich slapová osa je tak v rovnováhe zhodná s minimálnou osou, čo nám zjednoduší numerické simulácie.

Fyzikálne je reorientácia jav, vychádzajúci z druhej impulzovej vety, keďže tá predstavuje pohybovú rovnicu pre otáčavý pohyb. V neinerciálnej sústave spojennej s rotujúcim, deformujúcim sa telesom sa tejto vete hovorí tiež Liouvillova rovnica. Odvodíme ju v kapitole 1. Jej numerické riešenie pre spomínané prípady Pluta a Mimasu budeme realizovať v existujúcom fortranovskom kóde [8], pomocou metódy $\omega||mMIA$, ktorej princíp vysvetlíme v kapitole 2. Nakoniec výsledky stručne zhrnieme v závere práce.

1 Teoretický popis

1.1 Liouvillova rovnica

Ako už bolo spomínané, rotácia deformujúceho sa telesa je popísaná Liovillovou rovnicou. Pri jej odvodení (viď napr. Munk, MacDonald, 1960 [9]) vyjdeme z 2. impulzovej vety, ktorá má v inerciálnej sústave (takej, kde súradnicové osi sú pevne fixované v priestore) tvar

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}_{fix} = \mathbf{M}, \quad (1.1)$$

kde $\mathbf{L}$ je moment hybnosti telesa a $\mathbf{M}$ moment vonkajších síl naň pôsobiacich.

Pripomeňme vzťah medzi časovou deriváciou vektora v inerciálnej sústave a v sústave korotujúcej s telesom uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$ (viď napr. Podolský, 2024 [10]), tzv. *Bourov vzorec*

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}_{fix} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}_{mov} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Jeho aplikovaním na definičný vzťah pre moment hybnosti, dostávame výraz

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}_{fix} \rho dV = \int \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}_{mov} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) \rho dV, \quad (1.3)$$

kde ρ je hustota telesa. Ďalej definujeme tenzor zotrvačnosti telesa

$$\mathbf{I} = \int \left(r^2 \mathbf{E} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \right) \rho dV. \quad (1.4)$$

$\mathbf{E}$ označuje jednotkový operátor a $\otimes$ tenzorový súčin. Nakoniec použitím známeho vzorca pre dvojité vektorové súčiny

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.5)$$

a vzťahov (1.2) až (1.4) prepíšeme 2. impulzovú vetu (1.1) do tvaru

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{l}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{l}), \quad (1.6)$$

kde $\mathbf{l} = \int \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}_{mov} \rho dV$ je relatívny moment hybnosti telesa vzhľadom ku korotujúcej sústave.

V ďalšom si z triedy neinerciálnych sústav, korotujúcich s telesom, vyberieme sústavu *Tisserandovu*, čo je taká, kde $\mathbf{l} = \mathbf{0}$. Práve požiadavka na nulovosť

vektoru $\mathbf{l}$ zaručí jednoznačnosť korotujúcej sústavy aj pri deformujúcom sa telese. Liouvillovu rovnicu tak môžeme písať v tvare

$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt} (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (1.7)$$

Všimnime si, že narozdiel od inerciálnej sústavy je tu zmena momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$, daná súčtom momentu vonkajších síl $\mathbf{M}$ a momentu odstredivých síl $\mathbf{M}_{centrif} = -\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})$, spôsobeného práve neinercialitou sústavy. O tvare druhého zmieneneho sa môžeme presvedčiť, keď odstredivé zrýchlenie v známejšom tvare $\mathbf{a}_{centrif} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ vyjadríme pomocou definície $\mathbf{I}$ v (1.4).

1.2 Moment slapových síl

V tejto práci sa zaoberáme rotáciou slapovo viazaných telies. Moment vonkajších síl $\mathbf{M}$, vystupujúci v Liouvillovej rovnici (1.7) tak bude v našom prípade od síl slapových. Ich pôvod je nehomogenita gravitačného poľa naprieč telesom.

Odvodenie momentu slapových síl (podľa Patočka, 2023 [11]) je nasledujúce. Slapový potenciál sa dá vyjadriť ako

$$\varphi_{tidal} = \frac{1}{6} s^2 r^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})^2, \quad (1.8)$$

pričom $\mathbf{s}$ je tzv. slapový vektor s amplitúdou $s = \frac{3GM}{a^3}$, mieriaci do stredu hostujúceho telesa, G je gravitačná konštanta, M hmotnosť hostujúceho telesa a a polomer obežnej dráhy. Moment slapových síl potom vypočítame ako

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{tidal} &= \int \mathbf{r} \times (-\nabla \varphi_{tidal}) \rho dV = \int \mathbf{r} \times \left(\frac{1}{3} s^2 \mathbf{r} - \mathbf{s} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) \right) \rho dV \\ &= \mathbf{s} \times \int \mathbf{r} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) \rho dV = \mathbf{s} \times (\mathbf{I} \cdot \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (1.9)$$

kde sme v poslednej rovnosti využili definíciu $\mathbf{I}$ z (1.4) a fakt, že ľavá časť výrazu $\mathbf{I} \cdot \mathbf{s} = \int (r^2 \mathbf{s} - \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})) \rho dV$ je rovnobežná so slapovým vektorom $\mathbf{s}$, teda jej vektorový súčin s ním, bude nulový. Liouvillova rovnica s momentom slapových síl potom bude mať tvar

$$\mathbf{s} \times (\mathbf{I} \cdot \mathbf{s}) = \frac{d}{dt} (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (1.10)$$

Ide o sústavu troch obyčajných diferenciálnych rovníc 1. stupňa, popisujúcich vývoj rotačnej osi telesa $\boldsymbol{\omega}(t)$ v čase, v závislosti na tenzore zotrvačnosti $\mathbf{I}(t)$ zaťaženeho telesa. Jej riešenie určuje reorientáciu telesa. Naše riešenie tejto rovnice bude aproximatívne a bližšie ho popíšeme v časti 2.1.

1.3 Veta o tenisovej rakete

O podmienke stability rotačnej osi, v najjednoduchšom prípade tuhého, voľného telesa, hovorí *veta o tenisovej rakete*, tiež známa ako *Dzhanibekov effect*, popísaná napr. v Landau, Lifshitz, 1976 [12]. Môžeme ju formulovať nasledovne:

Majme tuhé teleso s nulovým momentom vonkajších síl, rotujúce v jednom z hlavných smerov jeho tenzoru zotrvačnosti. Potom smery s maximálnym resp. minimálnym vlastným číslom zodpovedajú stabilnej rovnováhe telesa a smer so stredným vlastným číslom zodpovedá labilnej rovnováhe telesa.

Rovnovážnou polohou telesa rozumieme takú orientáciu jeho rotačnej osi ω , kedy vymiznú tzv. deviačné momenty, dané mimo-diagonálnymi členmi tenzoru $\mathbf{I}$. To zjavne nastane pri rovnobežnosti ω s jednou z hlavných osí.

Rovnovážnu polohu definujeme ako stabilnú, ak po zmenení $\omega(t=0)$ o vektor $\delta\omega$, kde $|\delta\omega| \ll |\omega|$, platí

$$\omega(t) = \omega(0) + O(|\delta\omega|) \quad (1.11)$$

aj pre $t > 0$. Naopak, rovnovážna poloha je labilná, ak vzťah 1.11 neplatí pre $t > 0$.

Dôkaz vety (podľa [13])

Vyjdeme z Eulerových dynamických rovníc v sústave z vlastných vektorov

$$I_A \dot{\omega}_A - (I_B - I_C) \omega_B \omega_C = M_A \quad (1.12a)$$

$$I_B \dot{\omega}_B - (I_C - I_A) \omega_C \omega_A = M_B \quad (1.12b)$$

$$I_C \dot{\omega}_C - (I_A - I_B) \omega_A \omega_B = M_C \quad (1.12c)$$

Pri východnom stave trojosého elipsoidu platí $I_A < I_B < I_C$.

i) Vyšetrimo najprv rotáciu okolo minimálnej hlavnej osi ω_A . Zavedieme malé variácie $\delta\omega_B, \delta\omega_C \ll \omega_A$, teda $\omega_A = (\omega_A, \delta\omega_B, \delta\omega_C)$. Z rovnice (1.12a) potom plynú

$$\dot{\omega}_A = \frac{I_B - I_C}{I_A} \delta\omega_B \delta\omega_C \quad (1.13)$$

V následnom derivovaní rovnice (1.12b) podľa času, potom môžeme v lineárnej aproximácii položiť $\dot{\omega}_A = 0$, čiže $\omega_A = \text{const}$. Za ω_C dosadíme z (1.12c) a dostávame

$$\ddot{\omega}_B(t) + k^2 \omega_B(t) = 0, \quad (1.14)$$

kde $k^2 = \frac{(I_C - I_B)(I_B - I_A)}{I_B I_C} \omega_A^2$, čo je známa rovnica harmonického oscilátora s riešením

$$\omega_B(t) = A \sin(kt) + B \cos(kt). \quad (1.15)$$

Pre $\omega_C(t)$ získame časovou deriváciou vzťahu (1.12c) rovnaké riešenie. Keďže sínus a kosínus sú ohraničené funkcie, podmienka stability (1.11) bude zachovaná.

ii) Pre rotáciu okolo osi $\omega_C = (0, 0, \omega_C)$ s najväčším vlastným číslom bude výsledok rovnaký. Malé variácie od osi budú v čase oscilovať tak, ako v (1.15), teda rotácia okolo maximálnej hlavnej osi je tiež stabilná.

iii) Pri rotácii okolo strednej osi $\omega_B = (0, \omega_B, 0)$, získame rovnakým postupom rovnicu

$$\ddot{\omega}_A - k^2 \omega_A = 0, \quad (1.16)$$

čo dáva riešenie tvaru

$$\omega_A(t) = C \exp(kt) + D \exp(-kt), \quad (1.17)$$

resp. analogicky pre $\omega_C(t)$. Počiatočné variácie v čase exponenciálne porastú, čím sa poruší podmienka (1.11) a dôjde k zmene pôvodnej osi rotácie. $\square$

Telesá, ktorých rotáciu budeme v práci ďalej skúmať, nie sú ani tuhé, ani voľné. Pôsobí na ne slapová sila, ktorá ich deformuje, teda Eulerove rovnice (1.12) budú mať nenulovú pravú stranu. Pre vysvetlenie, prečo je pri deformujúcom sa telese z dlhodobého hľadiska stabilná iba maximálna hlavná osa, nám však stačí vyšetrovať rotáciu voľného, deformujúceho sa telesa.

1.4 Rotácia deformujúceho sa telesa

Uvažujme rotáciu voľného ale deformovateľného telesa. Jeho kinetická energia, definovaná napr. v Podolský, 2024 [10] ako

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.18)$$

bude narozdiel od tuhého telesa s časom klesať, práve vďaka vnútorným stupňom voľnosti telesa. Keď vzťah (1.18) prepíšeme do báze z vlastných vektorov $\mathbf{I}$ a vyjadríme pomocou momentu hybnosti $\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$, dostaneme

$$E_{rot} = \frac{1}{2} (I_A \omega_A^2 + I_B \omega_B^2 + I_C \omega_C^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{L_A^2}{I_A} + \frac{L_B^2}{I_B} + \frac{L_C^2}{I_C} \right). \quad (1.19)$$

Pre voľné teleso sa moment hybnosti zachováva (viď (1.1)), teda

$$L^2 = L_A^2 + L_B^2 + L_C^2 = \text{const.} \quad (1.20)$$

Zo vzťahu (1.19) potom získavame podmienku pre minimálnu možnú kinetickú energiu $E_{rot}^{(min)} = \frac{L^2}{2I_C}$. Voľné deformujúce sa teleso tak nakoniec dospeje do rotácie okolo svojej maximálnej hlavnej osi $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_C)$.

Pripomeňme, že moment zotrvačnosti počítame ako

$$dI = r^2 dm, \quad (1.21)$$

kde r je vzdialenosť elementu dm od osi. Potom pridaním kladnej záťaže k pôvodnému tenzoru zotrvačnosti, bude táto najviac zvyšovať nové I_C (a tým minimalizovať E_{rot}), pokiaľ bude čo najďalej od osi rotácie, teda na rovníku a zároveň v slapovej ose. Analogicky v prípade záťaže zápornej, bude E_{rot} minimálna v polohe priamo na rotačnej osi, čo z bodov na povrchu spĺňa iba pól. Tým sú vysvetlené stabilné polohy záťaže, intuitívne vyplývajúce z obrázku 0.1 v úvode práce.

2 Numerická metóda

2.1 Približné riešenie Liouvilovej rovnice

Popis reorientácie slapovo viazaných telies spočíva v nájdení ich rotačnej osi $\boldsymbol{\omega}(t)$, ako riešenia Liouvilovej rovnice (1.10). Ukazuje sa však (viď Patočka, 2021 [5]), že pri vyšetrovaní reorientácie rýchlo rotujúcich telies, možno získať riešenie, ktoré bude na geologických škálach zhodné s riešením plnej Liouvilovej rovnice (1.10), pokiaľ túto rozdelíme na dve časti

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}, \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{s} \times (\mathbf{I} \cdot \mathbf{s}) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}). \quad (2.1b)$$

Inak povedané, periodické výchylky rotačnej osi telesa, popísané rovnicou (2.1a), sú v deformujúcom sa telese časom potlačené, pričom tento dej sa ukazuje byť nezávislý od reorientácie $\boldsymbol{\omega}(t)$, popísanej rovnicou (2.1b), danej vznikom povrchovej záťaži na telese.

Rovnicu (2.1b) budeme riešiť nasledovne: Prejdeme do sústavy z hlavných vektorov $\mathbf{I}$ a všimneme si, že jednoduchým riešením je voľba $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_C)$ a súčasne $\mathbf{s} = (s_A, 0, 0)$, kedy sú obe strany rovnice identicky nulové. Tento prípad ale zodpovedá umiestneniu rotačnej osi do maximálnej hlavnej osi a slapovej osi do minimálnej hlavnej osi, čo sú práve podmienky tenisového efektu pre deformujúce sa teleso a jeho viazanej rotácie!

Dokopy potom táto, tzv. $\mathbf{o}\boldsymbol{\omega}$ ||mMIA¹ aproximácia (Patočka, 2023 [11]), prevádza pôvodnú Liouvilovu rovnicu (1.10) na tri samostatné rovnice

$$\mathbf{s} \times (\mathbf{I} \cdot \mathbf{s}) = \mathbf{0}, \quad (2.2a)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}, \quad (2.2b)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0}. \quad (2.2c)$$

Časový vývoj smeru rotačnej osi $\boldsymbol{\omega}(t)$, teda reorientáciu telesa, vieme potom určiť jednoducho diagonalizáciou jeho tenzoru zotrvačnosti $\mathbf{I}(t)$. Na riešenie týchto rovníc využijeme fortranovský kód *LIOUSHELL* od Patočku, 2022 [8].

¹mIA označuje minimálnu (minor inertia axis) a MIA maximálnu (major inertia axis) osu tenzoru zotrvačnosti. $\mathbf{o}$ v pôvodnom článku[11] označovalo slapový vektor, avšak kvôli jeho podobnosti s nulovým vektorom sme ho v tejto práci preznačili na $\mathbf{s}$.

2.2 Modelovanie záťaže

Reorientácia telesa je spôsobená vznikom tzv. záťaže, teda zmenou rozloženia hmoty v telese. Moment zotrvačnosti zataženého telesa potom bude

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}_0 + \mathbf{I}_{load}(t), \quad (2.3)$$

kde $\mathbf{I}_0$ je tenzor zotrvačnosti nezataženého telesa. Nami použitá záťaž má tvar pologule s výškou h_{load} , na povrchu telesa zaberá uhlový rozsah ϑ . Jej hustota je $\rho_{load} = const$. Záťaž sa vyvinie postupne v čase t_{growth} ako

$$h(t) = h_{load} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{t_{growth}}\right), \quad (2.4)$$

keďže našou snahou je simulovať pozvoľné prírodné procesy.

Pri výpočte tenzoru zotrvačnosti záťaže $\mathbf{I}_{load}(t)$, túto vertikálnu záťaž sprojektujeme na povrch gule, čím získame povrchovú záťaž s premennou plošnou hustotou $\sigma(\theta, \varphi)$ (viď Spada 2011, [14]). Túto plošnú hustotu záťaže následne rozvineme do stupňa $l = 2$ vo sférických harmonikách Y_{lm} (podľa Martinca, 2014 [15]) ako

$$\sigma(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^2 \sum_{m=-l}^l \left(\frac{4\pi}{2l+1} \sigma_l Y_{lm}^*(\theta_{load}, \varphi_{load}) \right) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.5)$$

kde $\theta = \theta_{load} \pm \vartheta/2$ a $\varphi = \varphi_{load} \pm \vartheta/2$, pričom $(\theta_{load}, \varphi_{load})$ označuje polohu stredu záťaže, vyjadrenú vo sférických súradniciach. σ_l je koeficient rozvoju plošnej záťaže umiestnenej na póle, do Legendrových polynómov $P_l(\cos \theta)$ (viď Spada, 2011 [14]).

Stupeň $l = 0$ odpovedá celkovej hmote záťaže. Keďže chceme skúmať iba záťaž nemiace hmotnosť telesa, musíme hmotu pridanú (odobratú) na tomto stupni, kompenzovať jej odobratím (pridaním) na povrchu telesa mimo záťaž. Toto urobíme rovnomerne, aby sa nezmenila poloha ťažiska telesa. Potom bude nulový aj príspevok na stupni $l = 1$. Rozvoj hustoty pre $l = 2$ má nulovú stopu, teda mení iba rozloženie hmoty, nie jej celkové množstvo.

Záťaž môže byť záporná alebo kladná. Záporná zodpovedá presunu hmoty z miesta záťaže na iné miesta v telese, teda $\rho_{load} < 0$, pri kladnej je to opačne. V praxi budeme držať $\rho_{load} = +1000 \text{ kg/m}^3$ pre oba typy záťaže, pričom kladnú resp. zápornú záťaž budeme rozlišovať znamienkom h_{load} .

Pri sférických súradniciach, spomenutých vyššie, používame konvenciu

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad (2.6a)$$

$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \quad (2.6b)$$

$$z = r \cos(\theta). \quad (2.6c)$$

θ má potom význam zemepisnej košírky (uhol počítaný od severného pólu) a φ zemepisnej dĺžky, počítanej od nultého poludníka, ktorý zároveň stotožníme so slapovou osou². Ako už bolo zmienené v úvode (viď obr. 0.2), ide o tzv. geografické (bulge-fixed) súradnice, v ktorých reorientácia rotačnej osi vyzerá ako putovanie

²Zo symetrie úlohy vyplýva, že stačí uvažovať počiatočné polohy záťaže v 1. oktante, teda $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, \pi/2]$.

záťaže po telese. Toto za týka iba obrázkov reorientácie, numerické výpočty sú robené v *Tisserandovej* sústave, kde relatívny moment hybnosti vymizne (viď časť 1.1).

Ďalej namiesto vyšetrovania vlastných čísel celého tenzoru zotrvačnosti, využijeme jeho rozklad na izotropnú časť $\frac{1}{3}\text{Tr}(\mathbf{I})\mathbf{E}$ a bezstopový deviátor $\mathbf{I} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\mathbf{I})\mathbf{E}$, ktorý určuje odchýlku telesa od gule. Význam vlastných čísel celkového tenzoru zotrvačnosti tak prevezmú vlastné čísla deviátoru, ktoré sú v súčte nula, avšak stále pre ne platí $I_A \leq I_B \leq I_C$.

2.3 Modelovanie telies

Telesá modelujeme nasledovne: Obe telesá majú tuhé, nedeformovateľné silikátové jadro, nad ktorým je vrstva vody v kvapalnom skupenstve - podpovrchový oceán. Nad oceánom je vrchný, visko-elastický plášť s radiálne premennou viskozitou. Pluto má pod povrchom ešte vrstvu litosféry³. Mimas litosféru nemá, jeho plášť je ľadový a tvárne deformovateľný až k povrchu.

Vo východnom stave uvažujeme sférický tvar telies, ktoré vystavíme pôsobeniu odstredivej sily (planétu v modeli rozrotujeme) a slapovej sily od hostujúceho telesa. Tým ich vrchná vrstva plášťa nadobudne rotačné a slapové vydutie. Spodnú časť plášťa - oceán - uvažujeme po celý čas v hydrostatickej rovnováhe. Klzanie vrchnej, pod pôsobením momentov vonkajších síl relaxujúcej časti plášťa po ňom, je totiž veľmi pomalé.

Záťaž na teleso umiestnime až keď je v stave hydrostatickej rovnováhy s odstredivou a slapovou silou a všetky vnútorné tlaky pominuly. Tento čas môžeme v prvom priblížení odhadnúť ako

$$t_{relax} = \frac{\eta}{G}, \quad (2.7)$$

kde viskozita η udáva pomer medzi šmykovým napätím a rýchlosťou deformácie a modul torzie G zas pomer šmykového napätia a šmykovej deformácie.

Hustota a modul torzie telies sú v našom modeli po častiach konštantné, uvádzame ich v tabuľke 2.1. Radiálny priebeh viskozity je zobrazený na obr. 2.1.

planéta	oblasť	$r_{min} - r_{max}$ [km]	ρ [kg/m ³]	G [GPa]
Pluto	jadro	0–858	3360	–
	oceán	858–1038	1000	–
	vrchný plášť	1038–1138	950	3,5
	litosféra	1138–1188	950	–
Mimas	jadro	0–128	3360	–
	oceán	128–148	1000	–
	vrchný plášť	148–198	950	3,5

Tabuľka 2.1: Parametre telies.

Veličiny r_{min}, r_{max} v tabuľke 2.1 označujú radiálny rozmer jednotlivých vrstiev, pri počiatocnom guľovom tvare telies. Po vzniku rotačného a slapového

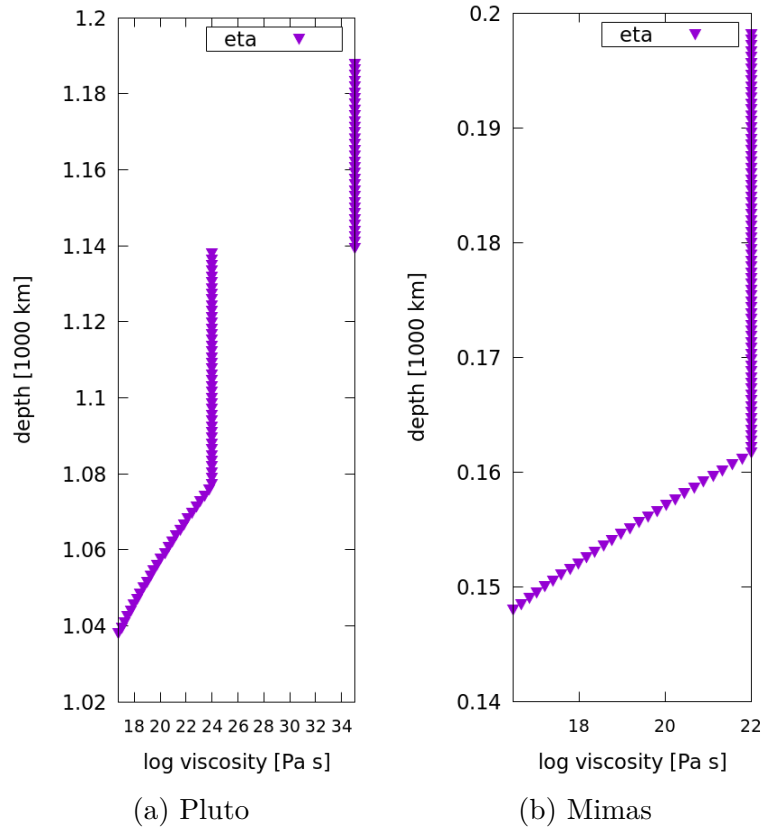
³viskozita $\eta_{lit} = 10^{35} \text{Pa} \cdot \text{s}$ spôsobí, že na skúmaných časových škálach sa litosféra nedeformuje tvárne, ako je tomu v prípade vrchnej časti plášťa s výrazne nižšou hodnotou η .

vydutia, prejdú telesá na elipsoid s poloosami a, b, c . Pre Mimas $c = 191\text{km}$, $b = 197\text{km}$, $a = 208\text{km}$, pre Pluto $c = 1189\text{km}$, $b \sim a = 1187\text{km}$.

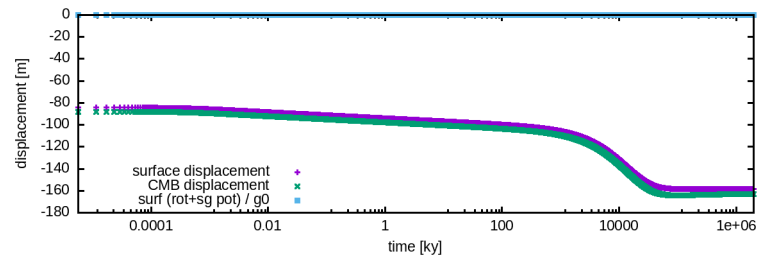
Miera slapového vydutia závisí (okrem η a G telesa) od pomeru hmotností telesa a jeho hostiteľa. Pre Mimas, obiehajúci okolo Saturnu, je hodnota tohto tzv. *hostmass faktoru* $\xi_{Mimas} = 1,5 \cdot 10^7$. Pluto, nachádzajúce sa vo viazanej rotácii so svojím mesiacom Chárónom má $\xi_{Pluto} = 0,12$.

Rotačné vydutie telies je dané ich rotáciou okolo vlastnej osi. Perióda tohto pohybu, čiže dĺžka siderického dňa je $T_{Mimas} = 0,94\text{d}$, $T_{Pluto} = 6,38\text{d}$, kde 1d je dĺžka dňa na zemi.

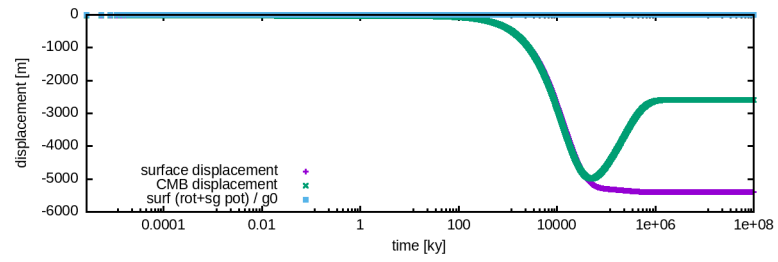
Na obrázku 2.2 je zobrazený skutočný čas relaxácie plášťa telies v našej simulácii. Z odhahu podľa (2.7) dostávame, pri uvažovaní maximálnej viskozity plášťa, hodnoty $t_{relax}^{(Pluto)} = 10^7\text{yr}$ a $t_{relax}^{(Mimas)} = 10^5\text{yr}$. V prípade Pluta sa oba časy rádovo zhodujú, pri Mimase je skutočný čas asi tisíckrát dlhší. To je zrejme spôsobené jeho veľkým slapovým vydutím, kedy už jednoduchý vzťah (2.7) nepostačuje.



Obr. 2.1: Radiálny profil viskozity telies.



(a) Pluto



(b) Mimas

Obr. 2.2: Relaxácia rotačného a slapového vydutia telies.

3 Nestabilná rotácia?

3.1 Priblíženie vlastných čísel

V tejto kapitole budeme meniť počiatočnú polohu a veľkosť záťaže a sledovať, pri akých parametroch (a či vôbec), príde k niektorej z dvoch možných nestabilit.

Nestabilita typu $I_B = I_C$ vedie k prudkým pohybom rotačnej osi telesa, keďže tá je v rovnováhe zhodná s maximálnou hlavnou osou a rotácie okolo strednej osi je nestabilná (viď *Dzhanibekov efekt*, časť 1.3). Nestabilita typu $I_A = I_B$ zmenu rotačnej osi nespôsobí, avšak vyruší efekt slapového vydutia. Ak I_A , hodnotu I_B dokonca prevýši, ocitne sa teleso mimo stavu viazanej rotácie - jeho minimálna osa nebude viac rovnobežná, s osou slapovou.

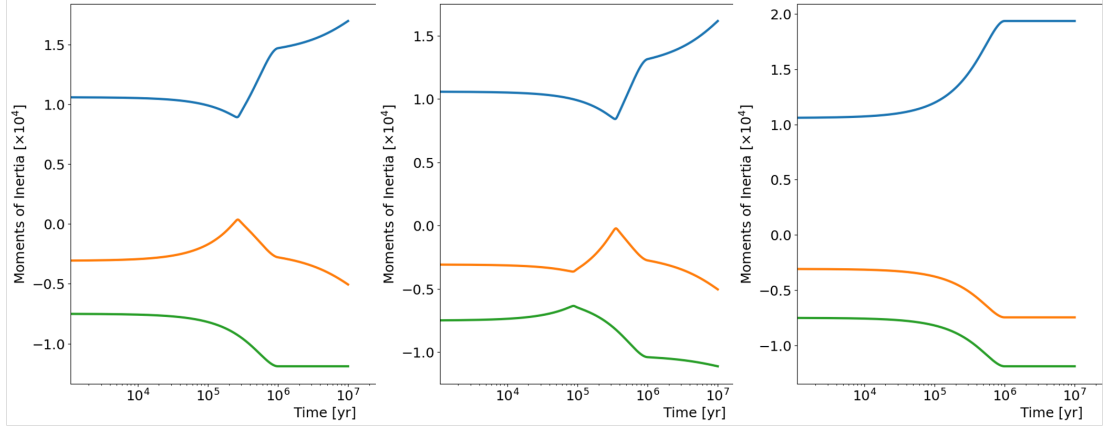
Ako modelové teleso budeme v celej kapitole využívať planétku Pluto, keďže tá má oproti klasickým mesiacom malé slapové vydutie, teda jej tvar je bližší rotačnému elipsoidu a prípadná degenerácia hlavných osí pravdepodobnejšia.

Kľúčový vzťah pre pochopenie vplyvu rôznych polôh záťaže na zmenu vlastných čísel je vzorec pre moment zotrvačnosti elementu hmoty dm voči ose od neho vzdialenej o r :

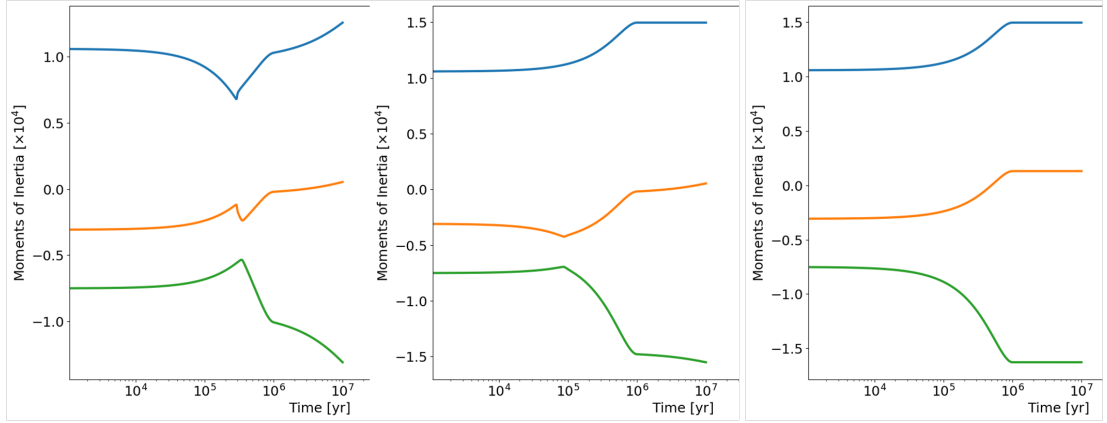
$$dI = r^2 dm. \quad (3.1)$$

Potom už vieme odhadnúť polohy na povrchu telesa, kde po umiestnení záťaže dôjde k najväčšiemu priblíženiu vlastných čísel. Pri zápornej záťaži pôjde o počiatočné polohy blízko bodov $(\theta, \varphi) = (90, 0)$ resp. $(90, 90)$, naopak stabilná poloha bude na póle $(\theta, \varphi) = (0, 0)$. Pri kladnej záťaži to bude v okolí polôh $(0, 0)$, $(90, 90)$ a stabilná poloha bude na nultom rovníkom poludníku $(90, 0)$.

Na obrázkoch 3.1 a 3.2 vidíme vývoj vlastných čísel s nárastom zápornej resp. kladnej záťaže o veľkosti $h_{load} = \mp 300\text{m}$, v čase $t_{growth} = 10^6\text{yr}$ v blízkosti uvedených význačných polôh. Reorientácia tu predchádza prekmitu vlastných čísel. Konkrétne záporná záťaž v polohe $(89, 89)$ najprv približuje I_B, I_C , až kým vyvolaná latitudálna reorientácia rotačnej osi spôsobí, že (tá istá) záťaž tieto vlastné čísla od seba začne oddalovať. Podobne záporná záťaž v polohe $(89, 1)$ približuje I_A, I_B , rotačná osa sa reorientuje longitudálne, čím sa záťaž dostane do polohy $(89, 90)$, kde sa I_A, I_B navzájom vzdalujú. Poloha $(1, 1)$ je pre zápornú záťaž stabilná. rozdiel $I_B - I_A$ sa v čase nemení a I_C sa od nich ešte vzdaluje. V prípade kladnej záťaže je približovanie dvojíc vlastných čísel v týchto polohách prepermutované oproti záťaži zápornej, viď obrázok 3.2.



Obr. 3.1: Vlastné čísla pri zápornej záťaži v poč. polohách (89,89), (89,1) a (1,1).



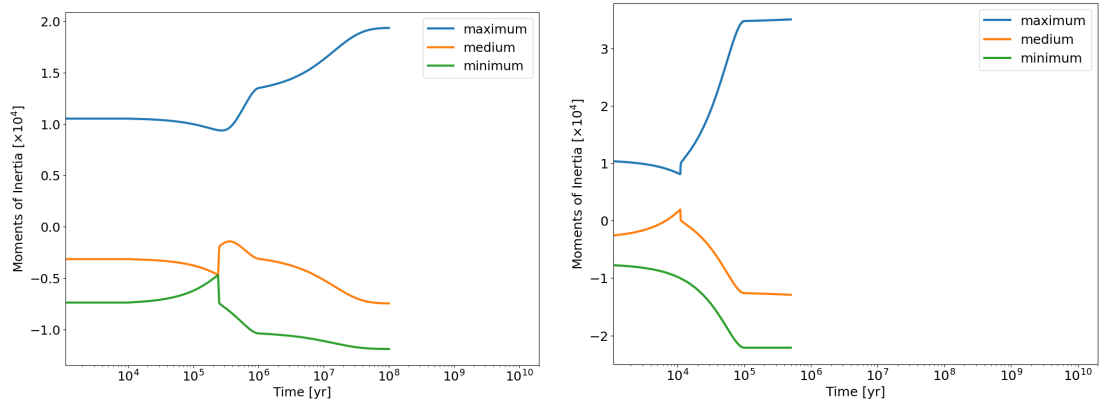
Obr. 3.2: Vlastné čísla pri kladnej záťaži v poč. polohách (1,1), (89,89) a (89,1).

3.2 Kritické polohy záťaže

Naivne by sme očakávali, že dostatočne veľká, záporná záťaž spôsobí degeneráciu $I_B = I_C$, pokiaľ ju umiestnime na 90. poludník a degeneráciu $I_A = I_B$, ak ju umiestnime na 0. poludník, keďže v týchto polohách dané rozdiely vlastných čísel najviac klesajú. Vo výpočtoch sa nám však podarilo dosiahnuť iba druhú zo spomenutých nestabilit, teda vyrušenie slapového vydutia - viď obrázok 3.3a¹. Ku prekmitu I_B, I_C nedošlo ani pri extrémne veľkej záťaži $(h_{load}, \vartheta) = (1500\text{m}, 30^\circ)$ v polohe (90,90), s krátkou dobou nárastu $t_{growth} = 10^5\text{yr}$ (viď obrázok 3.3b).

Vysvetlenie je nasledujúce: Záporná záťaž v polohe (90,90) naruší symetriu telesa voči rovine danej jeho rotačnou a slapovou osou. Vznikne tak moment síl, ktorý spôsobí, že záťaž sa longitudálne reorientuje o celých 90 stupňov až do slapovej osi. Tam už rozdiel $I_C - I_B$ rastie a k ich prekmitu nedôjde. Ak je ale záťaž v polohe (90,0), teda priamo v smere slapovej osi, symetriu telesa nezmení, teda longitudálna reorientácia, ktorá by zastavila pokles rozdielu $I_B - I_A$ nenastane. Preto, ak je zároveň záťaž dostatočne veľká, príde v určitom čase ku prekmitu I_A, I_B .

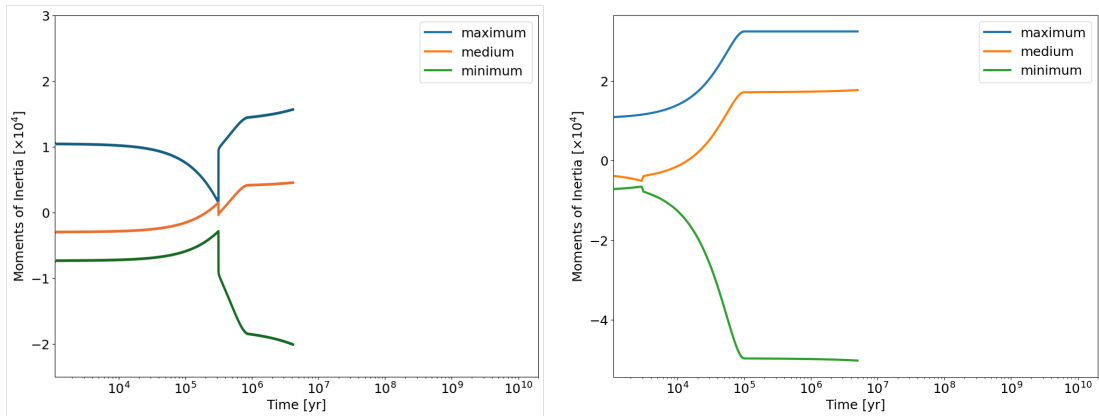
¹V čase, kedy $I_A = I_B$ dochádza k porušeniu predpokladov použitej numerickej metódy, preto zobrazené hodnoty vlastných čísel po tomto čase, nie sú ďalej pravdivé.



(a) Závaž (-500m, 30°) v počiatočnej polohe (80,0), $t_{growth} = 10^6$ yr. (b) Závaž (-1500m, 30°) v počiatočnej polohe (90,90), $t_{growth} = 10^5$ yr.

Obr. 3.3: Vývoj vlastných čísel pri zápornej záťaži v kritických polohách.

Analogicky pri kladnej záťaži teleso vždy unikne nestabilite typu $I_A = I_B$, aj keď ju umiestnime na 90. poludník. Nestabilite typu $I_B = I_C$ už ale teleso neunikne, ak záťaž umiestnime na pól. V tomto bode totiž záťaž nemení symetriu telesa voči rotačnej ose, teda latitudálna reorientácia, ktorá by odvrátila prekmit I_B, I_C nenastane. Tieto príklady vidíme na obrázkoch 3.4a a 3.4b.



(a) Závaž (500m, 30°) v počiatočnej polohe (0,0), $t_{growth} = 10^6$ yr. (b) Závaž (1500m, 30°) v počiatočnej polohe (90,90), $t_{growth} = 10^5$ yr.

Obr. 3.4: Vývoj vlastných čísel pri kladnej záťaži v kritických polohách.

Záverom môžeme povedať, že teleso reorientovaním svojej osi, predíde prekmitu vlastných čísel svojho tenzoru zotrvačnosti až na prípad (dostatočne veľkej) zápornej záťaže na nultom poludníku² resp. kladnej na póle. Keďže plošná miera poludníku je nulová, môžeme usúdiť na nefyzikálnosť spomenutých javov. V nasledujúcej kapitole, kde budeme vyšetrovať závislosť rýchlosti reorientácie preto spomínané polohy nebudeme používať.

²Čím sme ďalej od rovníku, tým potrebná veľkosť záťaže rastie.

4 Rýchlosť reorientácie

Pri vyšetrowaní rýchlosti reorientácie budeme skúmať tri veličiny. Okamžitú rýchlosť, jej maximum a celkový čas, za ktorý reorientácia prebehne. Budeme pri tom meniť počiatočnú polohu a veľkosť (jej výšku h_{load}) záťaže, dobu jej nárastu t_{growth} a model telesa: Pluto vs. Mimas. Pre rýchlosť reorientácie budeme ďalej používať označenie $\dot{\phi}(t)$, resp. $\dot{\phi}_{max}$. V celej kapitole používame konštantnú hustotu záťaže $\rho_{load} = 1000\text{kg/m}^3$. Doba nárastu bude okrem časti 4.3 taktiež konštantná: $t_{growth} = 10^6\text{yr}$.

4.1 Počiatočná poloha

Na obrázku 4.1 je znázornená závislosť maximálnej rýchlosti reorientácie v závislosti na počiatočnej polohe záťaže. Záťaž má v prípade Pluta aj Mimasu rovnaké parametre $(\vartheta, h_{load}) = (30^\circ, \pm 300\text{m})$.

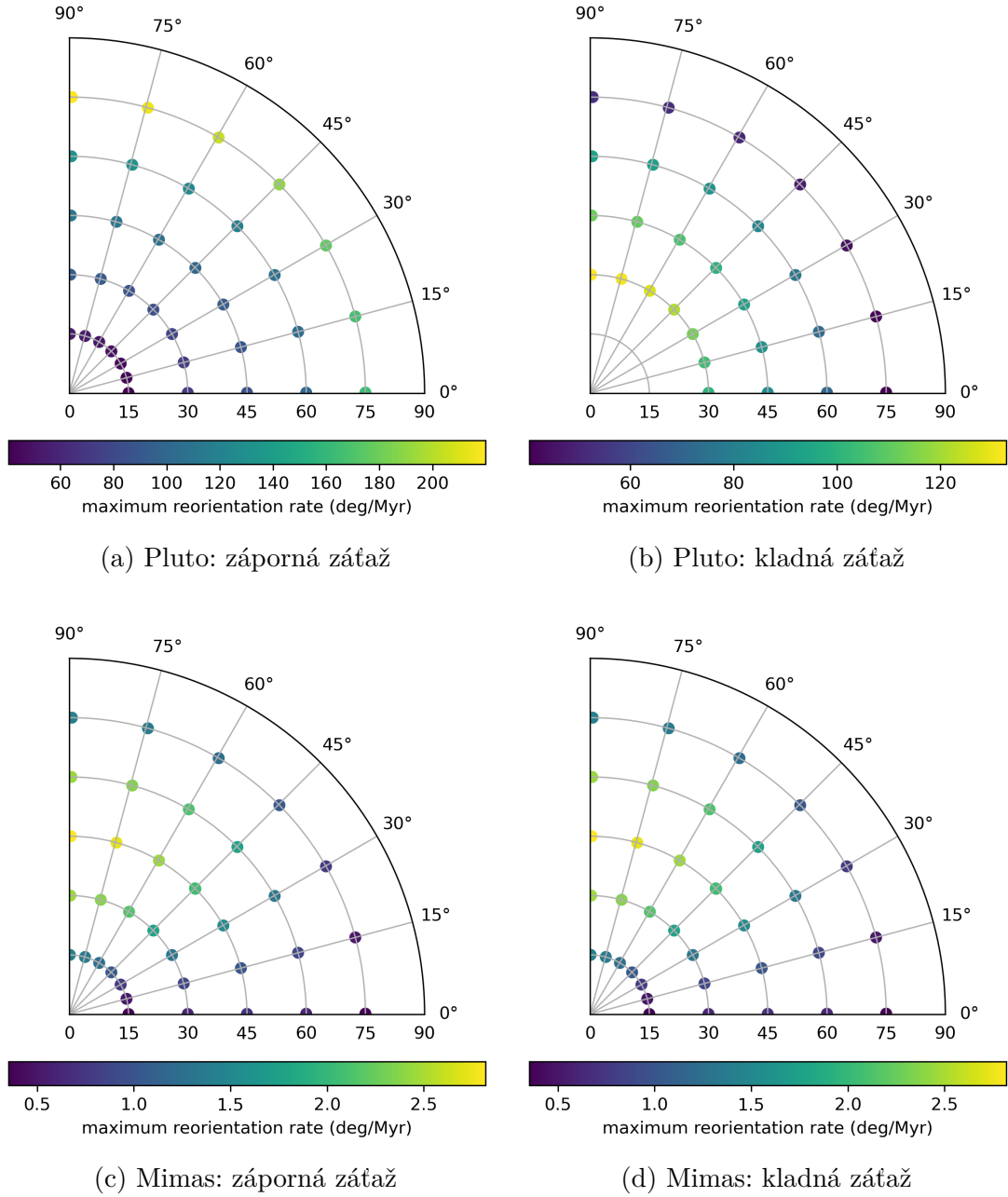
Vidíme, že pri Plute, rastie $\dot{\phi}_{max}$ smerom na rovník pri zápornej záťaži a smerom k pólu pri kladnej záťaži. V longitudálnom smere rastie $\dot{\phi}_{max}$ pri oboch typoch záťaže smerom od slapovej osi. Rast $\dot{\phi}_{max}$ teda prebieha smerom k polohám, kde dochádza k najväčšiemu priblíženiu vl. čísiel.

Číselné hodnoty $\dot{\phi}_{max}$ sú pri Mimase o niekoľko rádov menšie, a to napriek tomu, že relatívna veľkosť záťaže k planéte je v prípade Mimasu väčšia. To je spôsobené veľkým slapovým vydutím Mimasu, oproti takmer rotačne symetrickému Plutu. Na Mimase preto vznikne väčší moment sily, pôsobiaci proti vychýleniu ω z maximálnej osi. Ďalším faktorom je stabilizácia rotačným vidutím, ktoré je takisto významnejšie pri Mimase.

Ďalej je zaujímavé, že pri Mimase je závislosť $\dot{\phi}_{max}(\theta, \varphi)$ rovnaká pre kladnú aj zápornú záťaž. V longitudálnom smere rastie takisto od slapovej osi, v latitudálnom je maximum v stredných šírkach a klesá symetricky smerom k rovníku/pólu.

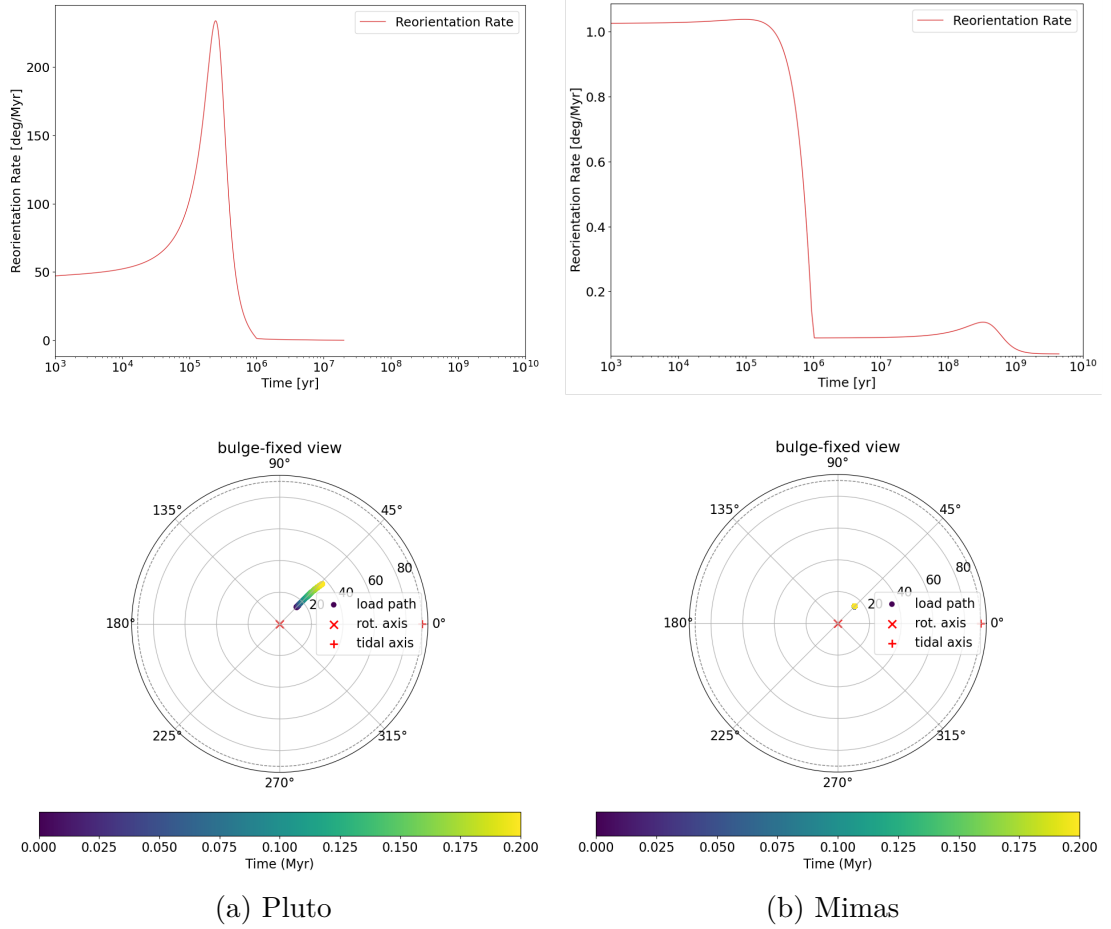
Uvedené odlišnosti medzi telesami vieme pochopiť z časových a priestorových priebehov reorientácie (obrázok 4.2). Vidíme, že s ukončením nárastu záťaže hodnoty $\dot{\phi}(t)$ rýchlo klesajú, a že prakticky celá reorientácia prebieha pri menších rýchlostiach. Rozdiel (2 rádov) medzi rýchlosťou reorientácie Mimasu a Pluta spôsobí, že do času dosiahnutia $\dot{\phi}_{max}$, prejde osa Pluta väčšiu uhlovú vzdialenosť ako pri Mimase, teda sa viac prejaví rozdiel medzi rozdielnymi trajektóriami kladnej a zápornej záťaže. Naopak, v prípade Mimasu je tento efekt prekrytý¹ pomalou reorientáciou. Táto degenerácia v znamienku záťaže pri Mimase zrejme taktiež vysvetľuje, prečo je latitudálne maximum na strednej rovnobežke $\theta = 45^\circ$.

¹rozdiely v $\dot{\phi}_{max}$ medzi kladnou a zápornou záťažou sa pri Mimase prejavajú v 2. a ďalšej platnej číslici.



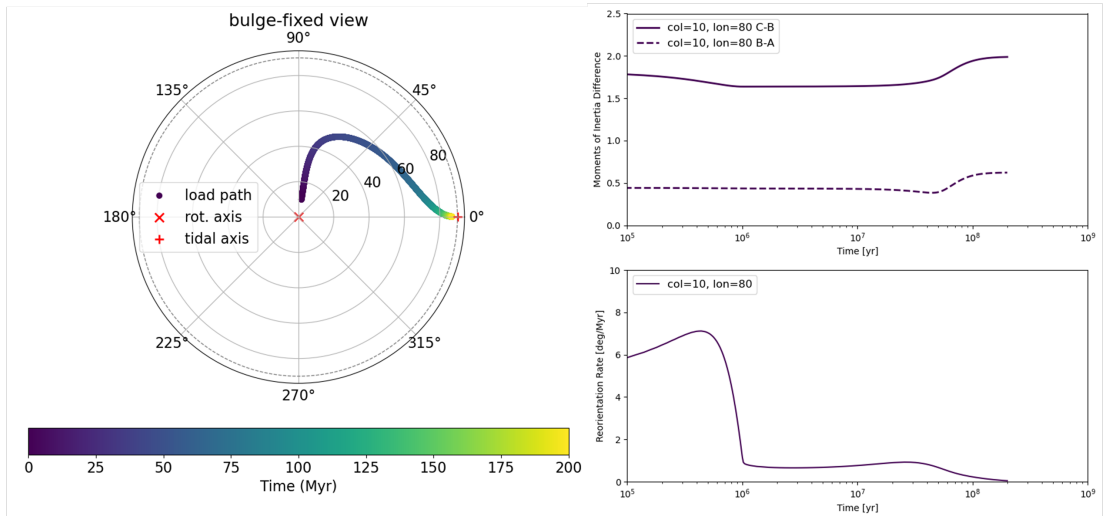
Obr. 4.1: $\dot{\phi}_{\max}$ v závislosti na počiatkovej polohe záťaže ($\pm 300\text{m}$, 30°).

Veličina $\dot{\phi}_{\max}$ teda vyjadruje skôr rýchlosť počiatkového vychýlenia osi v dôsledku nárastu záťaže, než rýchlosť následnej stabilizácie. V ďalšom sa preto zameriame na celkový priebeh $\dot{\phi}(t)$ a dobu reorientačného procesu. V prípade Pluta zmenšíme uhlový rozsah záťaže, z $\vartheta = 30^\circ$ na $\vartheta = 10^\circ$, keďže, ako uvidíme v časti 4.2, veľkosť záťaže má významný vplyv na celkovú dobu reorientácie. To nám zabezpečí, že sekundárne maximum $\dot{\phi}(t)$ sa nebude v čase prekrývať s $\dot{\phi}_{\max}$, daným počiatkovým nárastom záťaže, ako je tomu na obrázku 4.2a hore. Na Mimase, naopak, z rovnakého dôvodu uhlový rozsah záťaže ponecháme ako $\vartheta = 30^\circ$, inak by celková doba reorientácie presahovala vek vesmíru.



Obr. 4.2: Hore: rýchlosť reorientácie kladnej záťaže (30° , 300m) v počiatočnej polohe (15,45). Dole: trajektória tejto záťaže do času dosiahnutia $\dot{\phi}_{max}$.

Skôr, ako začneme systematicky skúmať vplyv konkrétnej počiatočnej polohy na $\dot{\phi}(t)$, uveďme jednoduchý príklad na pochopenie vzťahu medzi vývojom rýchlosti reorientácie, približovaním vlastných čísel a trajektoriou záťaže (obrázok 4.3).



Obr. 4.3: Trajektória kladnej záťaže a vývoj rozdielu vlastných čísel a rýchlosti reorientácie. Pluto.

Počiatočný nárast kladnej záťaže v blízkosti pólu, spôsobí pokles rozdielu vlastných čísiel $I_C - I_B$. Voči strednej a minimálnej osi je táto poloha takmer symetrická, ich rozdiel sa teda významne nemení. S týmto nárastom je spojené rýchle, avšak uhlovou vzdialenosťou mierne vychýlenie rotačnej osi telesa, ktoré pozorujeme ako $\dot{\phi}_{max}$. Následne sa teleso reorientuje, pričom sekundárne maximum rýchlosti tohto procesu označuje moment, kedy rozdiel oboch dvojíc vlastných čísiel začne rásť. Nakoniec s približovaním sa ku stabilnej polohe (90,0), rýchlosť $\dot{\phi}(t)$ postupne klesá.

V analógii s uvedeným popisom konkrétneho prípadu, vieme aj ľubovoľnú inú reorientáciu zjednodušene rozdeliť na 3 hlavné fázy:

1: Postupný nárast záťaže v čase t_{growth} , spojený s miernym ale rýchlym vychýlením rotačnej osi (na nasledujúcich obrázkoch ho pre prehľadnosť nezobrazujeme).

2: Rýchla a vzdialenosťou významná reorientácia záťaže do blízkosti stabilnej polohy.

3: Úplná relaxácia rotačného a slapového vydutia, daná doputovaním záťaže priamo do stabilnej polohy.

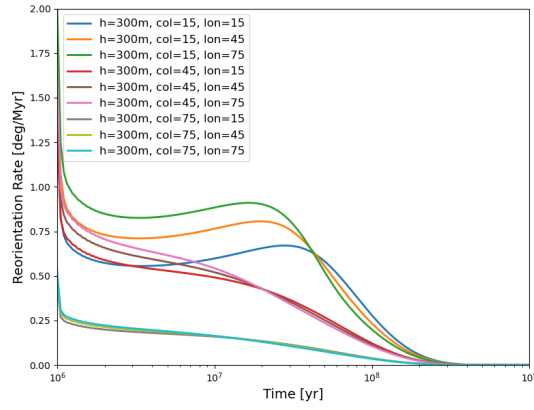
Pre dané parametre záťaže, závisí miera prítomnosti jednotlivých fáz a vývoj $\dot{\phi}_{max}$ počas nich, primárne od významnosti počiatočnej polohy. Tú bude skúmať vo zvyšku tejto podkapitoly.

Na obrázku 4.4 je zobrazený časový vývoj rýchlosti reorientácie pre $t > t_{growth}$, v závislosti na počiatočnej polohe záťaže. Môžeme si všimnúť rýchly pokles $\dot{\phi}(t)$ po ukončení nárastu záťaže. V prípade Pluta trvá kompletná reorientácia osi približne rovnako pre všetky polohy, asi $2 \cdot 10^8$ rokov. Pri Mimase ide o miliardy rokov aj napriek väčšiemu uhlovému rozsahu záťaže a jej väčšej relatívnej výške (k polomeru planéty). Ide o spomínaný vplyv slapového vydutia².

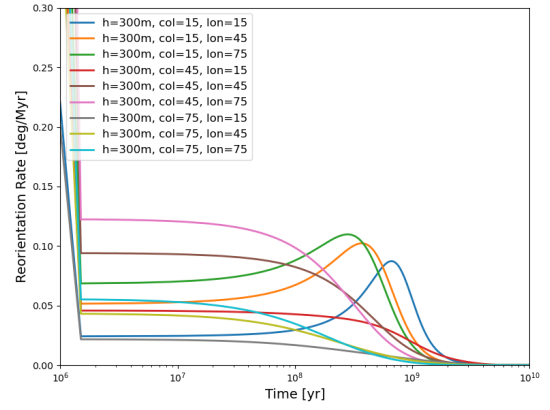
Vplyv významnosti počiatočnej polohy dobre vidieť na príklade Pluta (obrázky 4.4a, 4.4c). Pri kladnej záťaži dochádza k najvyššiemu priblíženiu vlastných čísiel, pri počiatočných polohách na rovnobežkách blízko pólu (zelená, oranžová a modrá krivka). Naopak, pri zápornej záťaži sú počiatočné polohy pri póle stabilné a táto trojica kriviek sa vyznačuje nízkymi rýchlosťami reorientácie. Práve naopak to bude s trojicou kriviek $\theta = 75^\circ$ blízko rovníku. Trojica kriviek miernych šírok $\theta = 45^\circ$ má podobný priebeh pri oboch typoch záťaže. V rámci poludníkov je trend rovnaký - priebehy $\dot{\phi}(t)$ sú vyššie a reorientácia kratšia, čím je počiatočná poloha ďalej od slapovej osi $\varphi = 0^\circ$.

Pri Mimase (obrázky 4.4b, 4.4d) sú trendy opísané na Plute rovnako platné. Sekundárne maximá rýchlosti reorientácie sú oproti Plutu výraznejšie. To je zrejme len dôsledkom použitia väčšej relatívnej záťaže pri tejto planéte.

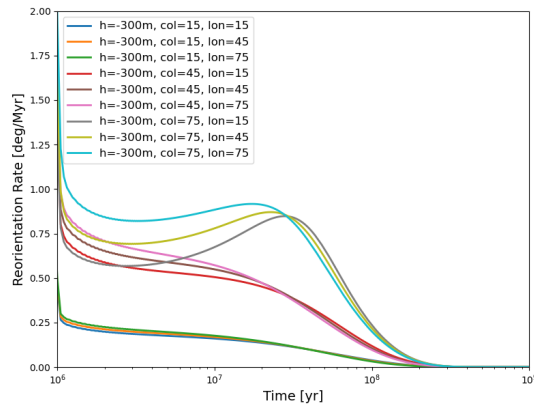
²Slapové vydutie znižuje rýchlosť reorientácie, avšak jeho vplyv na trajektóriu reorientačnej krivky je komplexnejší. Venujeme sa mu v dodatku na konci práce.



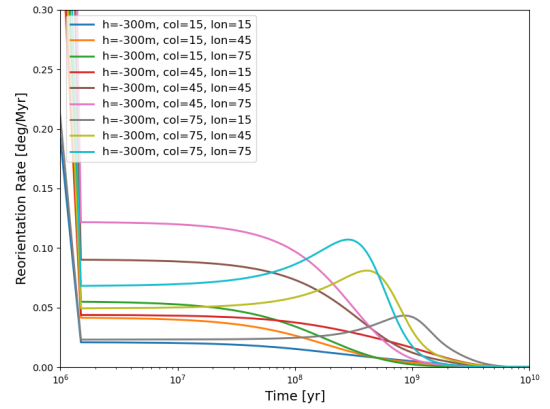
(a) Pluto: kladná zátěž



(b) Mimas: kladná zátěž



(c) Pluto: záporná zátěž



(d) Mimas: záporná zátěž

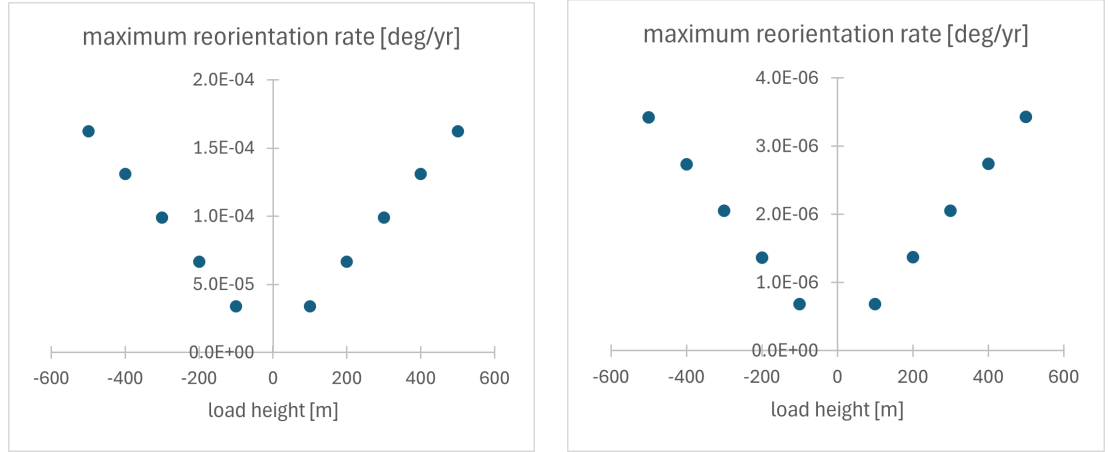
Obr. 4.4: $\dot{\phi}(t)$ v závislosti na počáteční poloze zátěže.

4.2 Veľkosť záťaže

Na obrázku 4.5 je zobrazená závislosť $\dot{\phi}_{max}(h_{load})$. Závislosť je v prípade oboch telies lineárna. Ako sme videli v predchádzajúcej časti, toto maximum zodpovedá počiatočnému vychýleniu telesa v dôsledku nárastu záťaže.

Celkový priebeh rýchlosti reorientácie ukazuje obrázok 4.6. Sekundárne maximá sú v prípade Mimasu opäť priamoúmerné výške záťaže h_{load} . Pri Plute je tento efekt prekrytý kratšou dobou reorientácie, kedy k nezanedbateľnému posunu záťaže dôjde ešte počas jej nárastu (viď obrázok 4.2a)³.

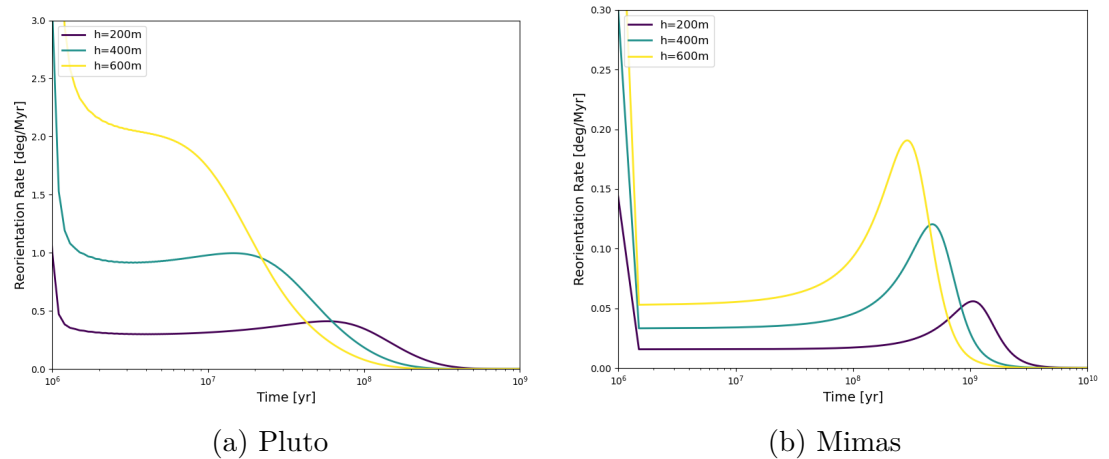
Celková doba reorientácie je u oboch telies tým dlhšia, čím je záťaž menšia.



(a) Pluto

(b) Mimas

Obr. 4.5: $\dot{\phi}_{max}$ v závislosti na h_{load} . Poč. poloha (45,45), $\vartheta = 30^\circ$.



(a) Pluto

(b) Mimas

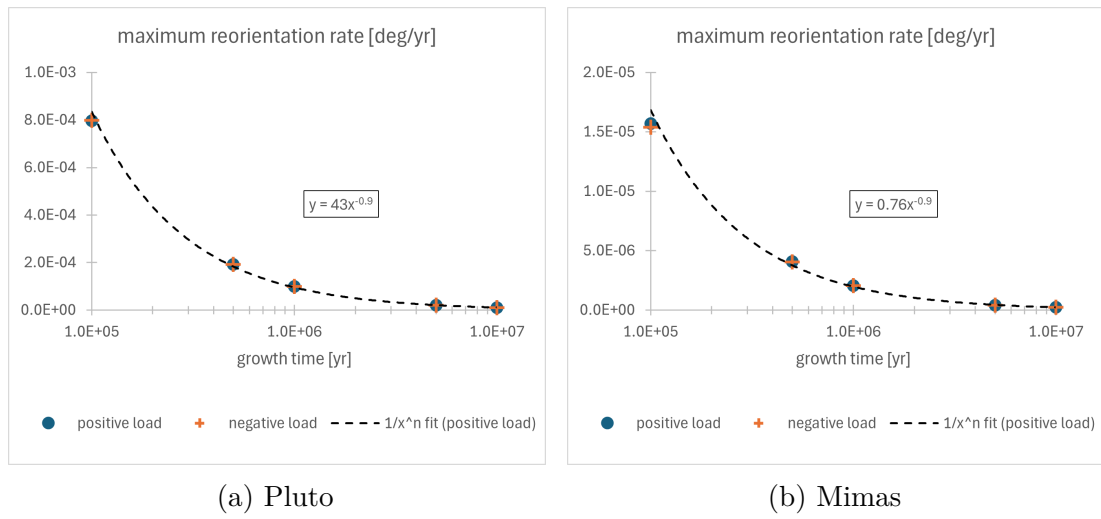
Obr. 4.6: $\dot{\phi}(t)$ v závislosti na h_{load} . Záťaž (+300m, 30°) v poč. polohe (15,15).

³To, že sú sekundárne maximá výraznejšie pri Mimase, nesúvisí priamo s veľkosťou záťaže, ale faktom, že slapové vydatie podporuje longitudálnu reorientáciu, tu použitej kladnej záťaže - viď dodatok.

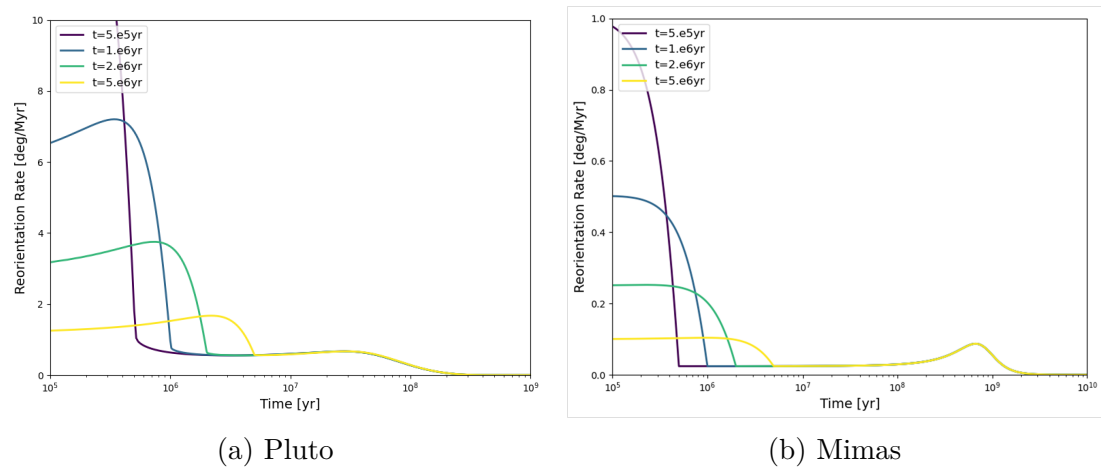
4.3 Čas nárastu

Na obrázku 4.7 je zobrazená závislosť $\dot{\phi}_{max}(t_{growth})$. Ako vidíme z fitu, maximum reorientácie klesá s časom nárastu záťaže nepriamoúmerne, približne ako $\dot{\phi}_{max} \sim 1/t_{growth}$.

Celkový priebeh rýchlosti reorientácie ukazuje obrázok 4.8. Doba nárastu záťaže má vplyv iba na výšku prvého maxima. Po ukončení vývoju záťaže sa krivky postupne spoja a sekundárne maximá $\dot{\phi}(t)$ sú zhodné pre celú sadu simulácií, teda celková doba reorientácie je rovnaká pre všetky skúmané časy t_{growth} . Vidíme tiež, že pri najpomalšej zo skúmaných dôb $t_{growth} = 5 \cdot 10^6 \text{yr}$ je prvé maximum $\dot{\phi}(t)$, dané nárastom záťaže, dokonca tak nízke, že je prakticky zhodné so sekundárnym maximom, odpovedajúcim neskoršej fáze reorientácie.



Obr. 4.7: $\dot{\phi}_{max}$ v závislosti na t_{growth} . Záťaž (30° , $\pm 300\text{m}$) v poč. polohe (45,45).



Obr. 4.8: $\dot{\phi}(t)$ v závislosti na t_{growth} . Záťaž ($+300\text{m}$, 10°) resp. ($+300\text{m}$, 30°) v poč. polohe (15,15).

Záver

V práci sme skúmali rýchlosť reorientácie slapovo viazaných telies. V prvej kapitole sme odvodili Liouvillovu rovnicu - pohybovú rovnicu pre rotujúce, deformujúce sa teleso, pod vplyvom vonkajších momentov síl. Ďalej sme popísali (ne)stabilitu rotácie telesa v hlavných smeroch jeho tenzoru zotrvačnosti.

V druhej kapitole sme vysvetlili predpoklady numerickej metódy, ktorá rieši Liouvillovu rovnicu pre prípad reorientácie slapovo viazaných telies. Ako modelové telesá boli vybraté planétka Pluto, so zanedbateľným slapovým vydutím a Saturnov mesiac Mimas, ktorého slapové vydutie je značné. Popísali sme typy povrchovej záťaže, spôsobujúcej reorientáciu.

V tretej kapitole sme skúmali, či, a pri akých počiatočných polohách záťaže, dôjde k vyrovnaniu niektorej z dvojíc vlastných čísiel, vedúcim na nestabilitu rotačnej osi telesa. Táto situácia nastala iba pre množinu počiatočných polôh, ktorých plošná miera je nulová.

V poslednej kapitole sme skúmali samotnú rýchlosť reorientácie, v závislosti na veľkosti, počiatočnej polohe a čase nárastu záťaže. Ukázalo sa, že maximálna rýchlosť je dosiahnutá počas nárastu záťaže. Okamžitá rýchlosť reorientácie je vyššia pri polohách, ktoré významne približujú vlastné čísla tenzoru zotrvačnosti telesa. Reorientácia bola všeobecne rýchlejšia pri väčšej záťaži. Slapové vydutie, naopak, dobu reorientácie predlžovalo. Čas nárastu záťaže mal, podľa predpokladu, vplyv iba na počiatočnú rýchlosť reorientácie.

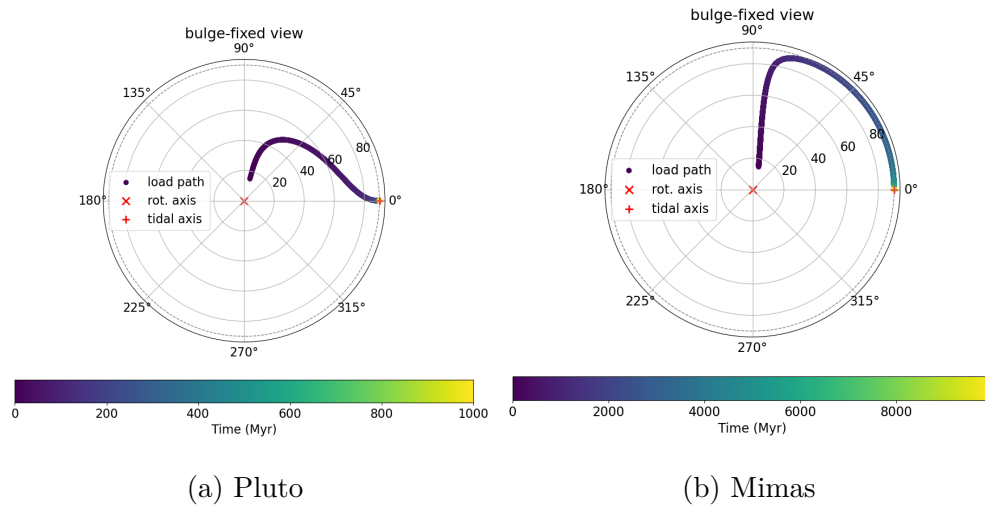
Literatúra

1. MELOSH, H. J. Tectonic patterns on a reoriented planet: Mars. *Icarus*. 1980, roč. 44, č. 3, s. 745–751. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/0019-1035\(80\)90141-4](https://doi.org/10.1016/0019-1035(80)90141-4).
2. NIMMO, F.; PAPPALARDO, R. T. Diapir-induced reorientation of Saturn's moon Enceladus. *Nature*. 2006, roč. 441, č. 7093, s. 614–616. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1038/nature04821>.
3. GEISLER, P. E. et al. Evidence for non-synchronous rotation of Europa. Galileo Imaging Team. *Nature*. 1998, roč. 391, č. 6665, s. 368–370. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1038/34869>.
4. HAMILTON, D. P. et al. The rapid formation of Sputnik Planitia early in Pluto's history. *Nature*. 2016, roč. 540, č. 7631, s. 97–99. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1038/nature20586>.
5. PATOČKA, V. True Polar Wander on Dynamic Planets: Approximative Methods Versus Full Solution. *Journal of Geophysical Research: Planets*. 2021, roč. 126, č. 12. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1029/2021JE006948>.
6. MATSUYAMA, I. et al. Planetary Reorientation. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*. 2014, roč. 42, s. 605–634. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-earth-060313-054724>.
7. GOLD, T. Instability of the Earth's Axis of Rotation. *Nature*. 1955, roč. 175, č. 4456, s. 526–529. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1038/175526a0>.
8. PATOČKA, J. *LIOUSHELL*. 2022. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7380050>.
9. MUNK, W. H.; MACDONALD, G. J. F. *The Rotation of the Earth a Geophysical Discussion*. 1. vyd. Londýn: Cambridge University Press, 1960. ISBN 9780521207782.
10. PODOLSKÝ, J. *Teoretická mechanika ve třech knihách*. 1. vyd. Praha: MatfyzPress, 2024. ISBN 9788024657479.
11. PATOČKA, V.; KIHOULOU, M. Dynamic reorientation of tidally locked bodies: Application to Pluto. *Earth and Planetary Science Letters*. 2023, roč. 617, s. 118270. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2023.118270>.
12. LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Mechanics*. 3. vyd. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1976. ISBN 9780750628969.
13. MARION, J. B.; THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5. vyd. Belmont, CA: Brooks/Cole, 2003. ISBN 9780534408961.

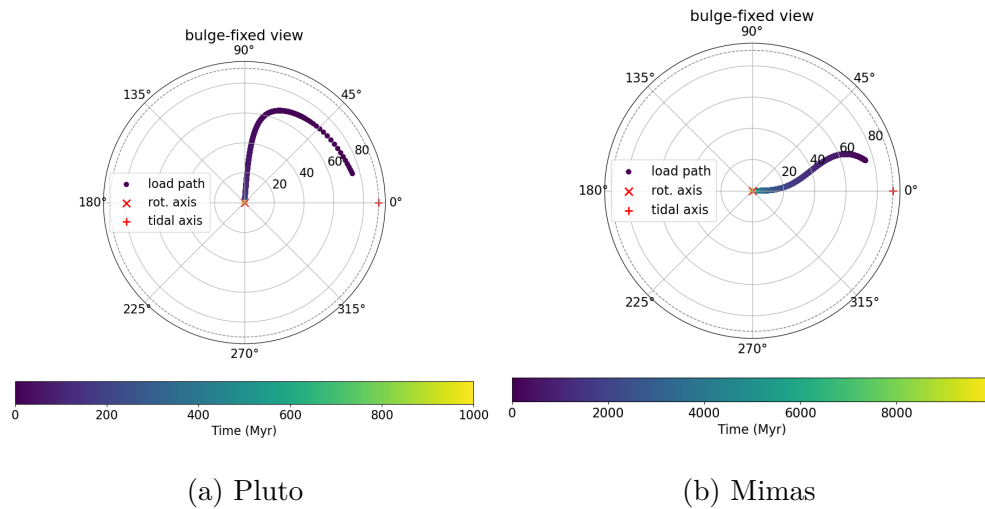
14. SPADA, G. et al. A benchmark study for glacial isostatic adjustment codes. *Geophysical Journal International*. 2011, roč. 185, č. 1, s. 106–132. Dostupné z DOI: 10.1111/j.1365-246X.2011.04952.x.
15. MARTINEC, Z.; HAGEDOORN, J. The rotational feedback on linear-momentum balance in glacial isostatic adjustment. *Geophysical Journal International*. 2014, roč. 199, č. 3, s. 1823–1846. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1093/gji/ggu369>.

Dodatok: Vplyv slapového vydutia na trajektóriu záťaže

V práci sme zistili, že slapové vydutie telesa spomaľuje jeho reorientáciu, a to pri oboch typoch záťaže. Vplyv slapového vydutia na trajektóriu reorientácie už na znamienku záťaže závisí, porovnanie je na obrázkoch nižšie.



Obr. D.1: Trajektória kladnej záťaže z poč. polohy (15,75): vplyv slapového vydutia.



Obr. D.2: Trajektória zápornej záťaže z poč. polohy (75,15): vplyv slapového vydutia.

Vidíme, že trajektória reorientácie slabo slapovo vydutého Pluta je relatívne priama pri kladnej záťaži, naopak je priestorovo rozľahlejšia pri zápornej záťaži. V prípade Mimasu, ktorého slapové vydutie je výrazné, je tomu naopak. Ako uvidíme, dôvodom je poradie, v akom prebiehajú latitudálna a longitudálna zložka reorientácie.

Pri kladnej záťaži (obr. D.1) je stabilná poloha v slapovej osi, počiatočnú sme preto zvolili blízko pólu. Jej nárast tu približuje I_B, I_C , čo vedie k latitudálnej reorientácii. Pre prakticky rotačne symetrické Pluto je rozdiel $I_B - I_A$ minimálny, teda zároveň nič nebráni reorientácii longitudálnej. Výsledná krivka tak pôjde do stabilnej polohy relatívne priamo. Mimas má slapové vydutie výrazné, teda longitudálna reorientácia prebehne až pri priblížení I_A, I_B , k čomu dôjde v polohách blízko 90. rovníkového poludníku.

Záporná záťaž (obr. D.2) má stabilnú polohu na póle. Preto, ak sa rozvíja blízko slapovej osi, tak efektívne ruší slapové vydutie telesa - približuje I_A, I_B . Pri Plute je ich rozdiel minimálny aj bez záťaže, teda teleso sa rýchlo longitudálne reorientuje do blízkosti bodu (90,90). Tam záťaž približuje I_B, I_C , takže nasleduje latitudálna reorientácia na pól. Naopak, v prípade slapovo vydutého Mimasu, klesne rozdiel I_A, I_B až s postupným nárastom záťaže. Pokiaľ tá nie je extrémne veľká, je tento rozdiel stále významný. Longitudálna reorientácia bude prebiehať pomaly a spolu s latitudálnou, čo sa prejaví ako relatívne priama krivka k pólu.