

**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Švanda

**Variace tloušťky ledu na Saturnově
měsíci Enceladu: Odhad na základě
analýzy gravitačních a tvarových dat**

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika

Praha 2026

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Prohlašuji, že při přípravě předložené práce byly použity následující nástroje generativní AI uvedenými způsoby:

Při přípravě práce byl použit nástroj ChatGPT v období 1. 1. 2025 až 30. 4. 2026. Nástroj jsem použil jako pomoc při programování (především pro hledání chyb v kódu, numerickou optimalizaci) a jako nástroj stylistické a gramatické revize textu.

Při přípravě práce byl použit nástroj SciSpace v období 1. 3. 2026 až 30. 3. 2026. Nástroj jsem použil pro základní rešerši literatury v kombinaci s běžnými metodami rešerše nezahrnujícími umělou inteligenci.

Po použití uvedených nástrojů umělé inteligence jsem důkladně revidoval a upravil obsah podle potřeby a plně přejímám odpovědnost za výslednou podobu práce.

Děkuji svému vedoucímu práce za dlouhodobou spolupráci a podporu a trpělivost při vytváření tohoto textu. Dále děkuji všem předchozím mentorům, vedoucím a kolegům, kteří mě provázeli v mé předchozí vědecké práci.

Název práce: Variace tloušťky ledu na Saturnově měsíci Enceladu: Odhad na základě analýzy gravitačních a tvarových dat

Autor: Martin Švanda

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Katedra geofyziky

Abstrakt: Enceladus je malý ledový měsíc Saturnu s vnitřním vodním oceánem. Jeho struktura, zejména tloušťka ledové slupky H a poloměr kamenného jádra R_C , je předmětem současného výzkumu. Předchozí studie řešily obrácenou úlohu k určení těchto parametrů, dále se věnujeme obrácené úloze v podobě inverze gravitačních dat, nebo simulaci librace. V posledních letech byly publikovány nové práce, které se vracejí k datům z mise Cassini a na jejich základě představují aktualizované modely tvaru, gravitačního pole a fyzikální librace. Cílem této práce je realizovat inverzi gravitačních dat a simulaci fyzikální librace a aplikovat je na tyto nové modely. Enceladus modelujeme jako těleso složené ze tří homogenních vrstev: kamenného jádra, vodního oceánu a ledové slupky. Hledáme parametry R_C , H a tvary vnitřních rozhraní tak, aby tato rozhraní generovala pozorované vnější gravitační pole a zároveň aby byla co nejlépe splněna Airyho izostáze ledové slupky. Ukázali jsme, že výsledky této inverze gravitačních dat omezují hodnotu R_C na interval přibližně 198–202 km, a to jak pro starší, tak i pro novější modely tvaru a gravitačního pole uvedené ve výše citovaných pracích. Předchozí studie byly omezeny předpokladem hydrostatického jádra, my jsme zkoumali vliv topografie jádra a ukázali jsme, že má zásadní dopad na řešení obrácené úlohy a významně snižuje přesnost určení R_C . Neznámá topografie jádra o amplitudě 250 m rozšiřuje odhad R_C na zhruba 190–210 km. Inverze gravitačních dat však neposkytuje silné omezení H , a proto jsme se dále věnovali fyzikální libraci. Tu modelujeme simulací pohybu Enceladu v gravitačním poli Saturnu v časové oblasti a ukazujeme, že tato metoda omezuje H na 17–20 km podle starší hodnoty amplitudy fyzikální librace $(0,120 \pm 0,007)^\circ$, resp. na 24–27 km podle novější hodnoty $(0,091 \pm 0,003)^\circ$. Nové modely tvaru a gravitačního pole tak podle našich výsledků nevedou při použití metody inverze gravitačních dat k zásadně odlišným závěrům, ale aktualizovaná hodnota fyzikální librace naznačuje větší tloušťku ledové slupky než se dříve předpokládalo.

Klíčová slova: ledové měsíce, Enceladus, inverzní modelování, gravitace

Title: Variations in ice thickness on Saturn's moon Enceladus: An estimate based on the analysis of gravity and shape data

Author: Martin Švanda

Department: Department of Geophysics

Supervisor: prof. RNDr. Ondřej Čadek, CSc., Department of Geophysics

Abstract: Enceladus is a small, icy moon of Saturn with an internal water ocean. Its internal structure, especially the thickness of the ice crust H and the radius of the rocky core R_C , is the focus of ongoing research. Previous studies have solved inverse problems to study the internal structure and this work focuses on gravity data inversion and simulation of physical libration. In recent years, new studies have been published revisiting the Cassini data and proposing updated models of shape, gravity, and physical libration. The goal of this work is to develop a method for gravity data inversion and a simulation of physical libration and to apply them to these new models. We model Enceladus as a body consisting of three homogeneous layers: a rocky core, a water ocean, and an ice crust. R_C , H , and the shape of the internal density discontinuities are determined so as to reproduce the observed external gravity field and to satisfy Airy isostasy of the ice crust as closely as possible. We show that the results of this inversion constrain R_C to approximately 198–202 km, with only minor differences between the older models and the newer ones. Previous publications have been limited by the assumption of a hydrostatic core, whereas in this work the effect of core topography is investigated and it is found that it has a significant impact on the inverse problem solution. An unknown topography of about 250 m broadens the estimate of R_C to approximately 190–210 km. The gravity data inversion does not provide an accurate estimate of H and thus the physical libration of Enceladus is investigated. It is modeled by simulating its motion in Saturn's gravity field in the time domain. This constrains H to 17–20 km based on the older value of physical libration $(0.120 \pm 0.007)^\circ$, or to 24–27 km according to the new value $(0.091 \pm 0.003)^\circ$. The new shape and gravity models yield results similar to the old ones by using the gravity data inversion, but the updated value of physical libration suggests a thicker ice crust than previously considered.

Keywords: icy moons, Enceladus, inverse modeling, gravity

Obsah

Úvod	8
1 Teorie	10
1.1 Sférické harmonické funkce a koeficienty	10
1.2 Model vnitřní stavby Enceladu	10
1.3 Potenciál hustotního rozhraní	11
1.4 Odstředivé a slapové síly	12
1.5 Geoid	12
1.6 Topografie	12
1.7 Izostatická rovnováha	12
1.8 Formulace obrácené úlohy pro inverzi gravitačních dat	13
1.8.1 Formulace přímé úlohy	13
1.8.2 Formulace obrácené úlohy	13
1.9 Librace	14
2 Vstupní data	15
2.1 Tvar Enceladu	15
2.2 Gravitační potenciál Enceladu	17
2.3 Použité datové sady	20
2.4 Topografie	20
2.5 Poloměr jádra	22
2.6 Střední tloušťka ledové slupky	22
2.7 Hustota ledu	22
2.8 Hustota oceánu	22
3 Metodika	24
3.1 Linearizovaná inverze gravitačních dat	24
3.2 Zjednodušená nelinearizovaná inverze gravitačních dat	25
3.3 Nejjednodušší nelinearizovaná inverze	26
3.4 Výpočet geoidu	26
3.5 Výpočet kompenzačních koeficientů	27
3.6 Celkový postup inverze gravitačních dat	28
3.7 Misfit	28
3.8 Topografie jádra	29
3.9 Librace	29
4 Výsledky	30
4.1 Kompenzační koeficienty	30
4.2 Výsledky inverze gravitačních dat pro fixní H a R_C	35
4.3 Vliv topografie jádra na výsledky inverze gravitačních dat	40
4.4 Librace	41

5	Diskuze	45
5.1	R_C a H	45
5.2	Přesnost výpočtů	46
5.2.1	Porovnání linearizované a nelinearizované metody výpočtu potenciálu hustotního rozhraní	46
5.2.2	Srovnání zjednodušené a přesné metody určení geoidu . . .	48
5.3	Chyba vstupních dat	49
5.4	Topografie jádra a její důsledky pro inverzi gravitačních dat . . .	49
5.5	Variace tloušťky ledu	51
5.6	Srovnání datových sad	52
5.7	Srovnání měření librace	53
	Závěr	54
	Literatura	55
	Seznam užitého značení a konstant	58
A	Přílohy	60
A.1	Sférické harmonické funkce a normalizace koeficientů	60
A.1.1	Konvence použité v této práci	60
A.1.2	Jiné konvence	60

Úvod

Enceladus je malý ledový měsíc Saturnu zajímavý svou aktivitou, především v okolí jižního pólu, kde byly v oblasti tygrích pruhů pozorovány gejzíry (Porco et al., 2006; Yin a Pappalardo, 2015; Helfenstein a Porco, 2015). Enceladus zkoumala v letech 2004–2017 sonda Cassini při několika průletech, během nichž mimo jiné pořídila snímky povrchu a zaznamenala radiometrická data. Radiometrická data byla brzy použita k odvození gravitačního pole Enceladu (Iess et al., 2014). Hodnoty odvozené v Iess et al. (2014) byly dlouhou dobu jediné publikované, ale v posledních letech se začaly objevovat nové studie, které přinášejí vlastní zpracování původních dat (Goossens et al., 2024; Park et al., 2024). Fotografické snímky povrchu byly dále použity k odvození tvaru Enceladu, první modely byly prezentovány například v Nimmo et al. (2011), Thomas et al. (2016) a Tajeddine et al. (2017). Tajeddine et al. (2017) odvodil tvar pomocí metody obloukových profilů a sítě kontrolních bodů a jeho model tvaru byl dále hojně využíván v dalších publikacích. V posledních letech se po dlouhé době objevila nová zpracování původních dat, konkrétně Schenk a McKinnon (2024) (metodou stereometrie a obloukových profilů) a Park et al. (2024) (stereofotoklinometrie). Thomas et al. (2016) na základě optického pozorování sondy Cassini změřil fyzikální libraci Enceladu a Park et al. (2024) nedávno přišel na základě stejných dat s novou, nižší hodnotou amplitudy fyzikální librace.

Pod pozorovanou ledovou slupkou se předpokládá existence oceánu kapalné vody a kamenného jádra (Thomas et al., 2016; Van Hoolst et al., 2016). Zatímco samotná existence kapalného oceánu je všeobecně přijímána, tloušťka ledové slupky, její vnitřní tvar a hloubka oceánu jsou stále předmětem výzkumu. Parametry jako poloměr jádra a tloušťka ledové slupky byly zkoumány mimo jiné řešením obrácené úlohy (Čadek et al., 2019; Park et al., 2024; McKinnon, 2015; Thomas et al., 2016), ale pouze na základě starších modelů tvaru a gravitačního pole a hodnoty fyzikální librace, typicky tvar z Tajeddine et al. (2017), gravitační pole z Iess et al. (2014) a fyzikální librace Thomas et al. (2016), případně z předchozích, podobných modelů. První používanou metodou je inverze gravitačních dat, tedy hledání takové vnitřní struktury, aby replikovala pozorované vnější gravitační pole. Druhou použitou metodou, často využitou v kombinaci s první, je simulace fyzikální librace, která je typicky porovnávána s hodnotou z Thomas et al. (2016).

Cílem této práce je revize předchozích publikací na základě nových výsledků. Konkrétně chceme vyvinout obě metody zmiňované výše (inverze gravitačních dat a simulace fyzikální librace), aplikovat je na výsledky nových publikací, konkrétně Schenk a McKinnon (2024) (tvar Enceladu) a Park et al. (2024) (tvar, gravitační pole i fyzikální librace), a na výsledky starších publikací, konkrétně Iess et al. (2014) (gravitační pole), Tajeddine et al. (2017) (tvar) a Thomas et al. (2016) (librace). Výsledkem obrácené úlohy je vnitřní struktura Enceladu a z ní nás zajímají především tři informace: 1. střední tloušťka ledu H , která má zásadní vliv na moment setrvačnosti ledové slupky, její elastickou odezvu a vznik útvarů na jejím povrchu; 2. poloměr jádra R_C , jehož hodnota nám může poskytnout informace o jeho hustotě a tak i například o jeho porozitě a stupni hydratace; 3. tloušťka ledu v okolí jižního pólu, která je důležitá pro objasnění původu gejzírů a tygrích pruhů.

Při formulaci obrácené úlohy je obtížné určit tvar jádra, jelikož o něm máme minimální informace. Předchozí publikace řešící obrácenou úlohu typicky předpokládaly jádro v hydrostatické rovnováze (například Čadek et al., 2019; Park et al., 2024; McKinnon, 2015). V této práci jsme se s tímto předpokladem nespokojili a zkoumali jsme vliv topografie jádra na vnější gravitační pole a potažmo i na inverzi gravitačních dat.

1 Teorie

1.1 Sférické harmonické funkce a koeficienty

V této a dalších kapitolách používáme funkce na kouli rozvedené do sférických harmonických funkcí a uvádíme příslušné sférické harmonické koeficienty. V rámci celé práce používáme plně normalizované sférické koeficienty a konkrétní normalizace a použité definice v naší konvenci lze nahlédnout v appendixu v sekci A.1. Jiné publikace, včetně těch, které citujeme, často používají jiné konvence či normalizace. Vztah nenormalizovaných koeficientů v konvenci typické pro citovanou literaturu a koeficientů v naší konvenci uvádíme v appendixu na stejném místě.

Obecně pro koeficienty používáme následující značení: K_{jm} značí komplexní koeficient stupně j a řádu m a C_{jm} , respektive S_{jm} dále značí jeho reálnou, respektive imaginární část. V případě nejasností lze značení nahlédnout v kapitole 5.7.

1.2 Model vnitřní stavby Enceladu

Enceladus budeme modelovat jako těleso o hmotnosti M , otáčející se úhlovou rychlostí ω , skládající se ze tří hmot různých hustot, které přibližně tvoří tři soustředné koule. Jednotlivé hmoty jsou v pořadí od středu:

1. Vnitřní kamenné jádro o středním poloměru R_C , hustotě ρ_C a jehož tvar popisují sférické koeficienty K_{jm}^C .
2. Oceán kapalné vody o středním poloměru $R_{I/W}$, hustotě ρ_W a jehož (horní) tvar popisují sférické koeficienty $K_{jm}^{I/W}$.
3. Ledová slupka o středním poloměru a , hustotě ρ_I a jejíž (horní) tvar popisují sférické koeficienty K_{jm}^S .

Okolo Enceladu dále pozorujeme vnější gravitační pole popsané koeficienty K_{jm}^G .

Parametry M , ω a a známe velmi přesně. Tvar a vnější gravitační pole Enceladu byly měřeny (viz sekce 2.1 a 2.2), ale konkrétní hodnoty jednotlivých koeficientů se liší podle publikace. Hustoty ledu a vody ρ_I a ρ_W můžeme odhadnout (viz sekce 2.7 a 2.8) a ρ_C je jednoznačně určena ostatními hustotami, středními poloměry jednotlivých rozhraní a celkovou hmotností Enceladu:

$$M = \frac{4}{3}\pi(R_C^3\rho_C + (R_{I/W}^3 - R_C^3)\rho_W + (a^3 - R_{I/W}^3)\rho_I) \quad (1.1)$$

$$\rho_C = \frac{\frac{3}{4\pi}M - (R_{I/W}^3 - R_C^3)\rho_W - (a^3 - R_{I/W}^3)\rho_I}{R_C^3}. \quad (1.2)$$

Ostatní parametry modelu ($R_{I/W}$, R_C , $K_{jm}^{I/W}$, K_{jm}^C) zůstávají neznámé a jsou předmětem obrácené úlohy, kterou budeme dále řešit. Poznamenejme, že parametr $R_{I/W}$ budeme převážně nahrazovat parametrem střední tloušťka ledu $H = a - R_{I/W}$.

1.3 Potenciál hustotního rozhraní

Nechť v našem tělese je na středním poloměru R hustotní rozhraní, kde se hustota mění o $\Delta\rho$ a jehož tvar $s(\theta, \varphi)$ nechť je rozveden do sférických koeficientů K_{jm}^A . Pak potenciál generovaný tímto rozhraním ve vzdálenosti r (značme tento potenciál $K_{jm}^{G,A}$) je pro $r > R$ (Martinec, 1994):

$$K_{jm}^{G,A} = \frac{1}{r^{j+1}} \frac{4\pi G \Delta\rho}{(2j+1)(j+3)} s_{jm}^{j+3}, \quad (1.3)$$

kde

$$s_{jm}^{j+3} = \int_{\Omega} (s^{j+3}(\theta, \varphi) - R^{j+3}) Y_{jm}^*(\theta, \varphi) d\Omega = (s^{j+3}(\theta, \varphi) - R^{j+3})_{jm}. \quad (1.4)$$

Pro malou odchylku od koule lze vztah přibližně linearizovat:

$$K_{jm}^{G,A} = \frac{4\pi}{2j+1} Gr K_{jm}^A \Delta\rho \left(\frac{R}{r}\right)^{j+2}. \quad (1.5)$$

A pro $r < R$ a stupeň jiný než dva pak platí (postupem ekvivalentním tomu ze studie Martinec (1994)):

$$K_{jm}^{G,A} = \frac{4\pi G \Delta\rho r^j}{(2j+1)(2-j)} s_{jm}^{2-j}, j \neq 2, \quad (1.6)$$

kde

$$s_{jm}^{2-j} = (s^{2-j}(\theta, \varphi) - R^{2-j})_{jm}. \quad (1.7)$$

A pro stupeň dva pak platí

$$K_{2m}^{G,A} = \frac{4}{5} \pi G \Delta\rho r^2 s_{2m}^{ln}, \quad (1.8)$$

kde

$$s_{2m}^{ln} = (\ln(s(\theta, \varphi)) - \ln(R))_{2m}. \quad (1.9)$$

Pro malou odchylku od koule lze oba vztahy opět přibližně linearizovat:

$$K_{jm}^{G,A} = \frac{4\pi}{2j+1} Gr K_{lm}^S \Delta\rho \left(\frac{r}{R}\right)^{j-1}. \quad (1.10)$$

Povšimněme si, že pokud používáme linearizované vzorce, je řešení výrazně jednodušší a separované do jednotlivých stupňů a řádů (koeficienty se mezi sebou neovlivňují), zatímco nelinearizovaný výpočet je přesný, ale náročnější a v praxi ho musíme realizovat numericky.

1.4 Odstředivé a slapové síly

Odstředivé a slapové síly ve vzdálenosti r od středu tělesa lze charakterizovat sférickými koeficienty potenciálu C_{20} a C_{22} (Čadek et al., 2021):

$$C_{20}^{OS} = -r^2 \omega^2 \sqrt{\frac{5\pi}{9}}, \quad (1.11)$$

$$C_{22}^{OS} = r^2 \omega^2 \sqrt{\frac{3\pi}{10}}. \quad (1.12)$$

Odstředivý potenciál se pak dále projevuje na stupni nula, což pro nás ale není relevantní.

1.5 Geoid

Termínem geoid označujeme plochu konstantního tíhového potenciálu. Geoid je vždy vztažen k nějakému referenčnímu poloměru. Přibližně lze výšku geoidu v nějakém bodě spočítat jako:

$$h(r, \theta, \varphi) = V(r, \theta, \varphi) / g(r), \quad (1.13)$$

kde V je tíhový potenciál v daném bodě a g tíhové zrychlení v radiálním směru. Přesný výpočet geoidu je složitější, viz sekce 3.4. Geoidem nějakého hustotního rozhraní máme na mysli geoid vztažený k jeho střednímu poloměru. Geoidy rozhraní vakuum–led, led–voda a voda–jádro značíme $K_{jm}^{H,S}$, $K_{jm}^{H,I/W}$ a $K_{jm}^{H,C}$.

1.6 Topografie

Pod pojmem topografie rozumíme rozdíl mezi tvarem hustotního rozhraní a geoidem vztaženým k jeho střednímu poloměru. Berme na zřetel, že některé publikace však používají termín topografie jako synonymum pro „tvar“. Když je topografie nějakého rozhraní nulová, říkáme že je takové hustotní rozhraní v hydrostatické rovnováze. Topografii rozhraní vakuum–led, led–voda a voda–jádro značíme $K_{jm}^{T,S}$, $K_{jm}^{T,I/W}$ a $K_{jm}^{T,C}$.

1.7 Izostatická rovnováha

Pokud má hustotní rozhraní nenulovou topografii, bude na ni působit tíhová a vztlaková síla. Airyho izostáze je rovnovážný stav, ve kterém předpokládáme dvě hustotní rozhraní v jinak homogenní hmotě a na horní a spodní rozhraní působí stejná síla. Tedy topografie na horním rozhraní (na kterou působí síla) musí být kompenzována opačnou topografií na opačném rozhraní (na tu pak působí vztlaková síla). Pro ledovou slupku Enceladu se Airyho izostáze typicky uvažuje (Beuthe et al., 2016; Schenk a McKinnon, 2009; Iess et al., 2014). Absence izostáze může znamenat nestabilní, mladé útvary, anebo přítomnost další síly, která podporuje nekompenzovanou topografii.

Hmota konstantní hustoty nechť má horní rozhraní na středním poloměru R_T s tvarem $s_T(\theta, \varphi)$, geoidem $h_T(\theta, \varphi)$ a hustotním skokem $\Delta\rho_T$ a spodní rozhraní s odpovídajícími veličinami R_B , s_B , h_B , $\Delta\rho_B$. Pro určení „míry izostáze“ pak definujeme kompenzační koeficienty (Čadek et al., 2019) separátně pro reálnou imaginární část sférických harmonických funkcí:

$$D_{jm}^C = \frac{\Delta\rho_B}{\Delta\rho_T} \frac{\operatorname{Re} \left(\left(\int_{h_B(\theta, \varphi)}^{s_B(\theta, \varphi)} gr^2 dr \right)_{jm} \right)}{\operatorname{Re} \left(\left(\int_{h_T(\theta, \varphi)}^{s_T(\theta, \varphi)} gr^2 dr \right)_{jm} \right)}, \quad (1.14)$$

$$D_{jm}^S = \frac{\Delta\rho_B}{\Delta\rho_T} \frac{\operatorname{Im} \left(\left(\int_{h_B(\theta, \varphi)}^{s_B(\theta, \varphi)} gr^2 dr \right)_{jm} \right)}{\operatorname{Im} \left(\left(\int_{h_T(\theta, \varphi)}^{s_T(\theta, \varphi)} gr^2 dr \right)_{jm} \right)}, \quad (1.15)$$

Je důležité upozornit, že kompenzační koeficienty nejsou sférickými harmonickými koeficienty, jsou bezrozměrné a vždy reálné, a proto také upouštíme od značení K_{jm} , ale s harmonickými koeficienty zřejmě souvisejí (sdílejí stupeň, řád a reálnost/imaginárnost) a proto o nich často budeme mluvit podobně. $D_{jm} = 1$ odpovídá dokonalé izostatické rovnováze. Metoda výpočtu kompenzačních koeficientů viz sekce 3.5.

1.8 Formulace obrácené úlohy pro inverzi gravitačních dat

Zde formulujeme nejdříve přímou úlohu a následně obrácenou úlohu pro inverzi gravitačních dat. Nepleťte s obrácenou úlohou na základě fyzikální librace.

1.8.1 Formulace přímé úlohy

Nechť známe všechny parametry hustotního modelu Enceladu, včetně středních poloměrů a tvarů vnitřních hustotních rozhraní ($R_{I/W}$, R_C , $K_{jm}^{I/W}$, K_{jm}^C) a chceme určit vnější gravitační pole, které můžeme pozorovat. Řešení úlohy je jednoznačné, viz sekce 1.3.

1.8.2 Formulace obrácené úlohy

Známe všechny parametry hustotního modelu kromě čtyř ($H, R_C, K_{jm}^{I/W}$ a K_{jm}^C) a vnější gravitační pole a chceme zjistit neznámé čtyři parametry. Proto o této obrácené úloze mluvíme jako o inverzi gravitačních dat. Bez dalších předpokladů existuje příliš mnoho volných parametrů, úloha je podurčená a vnějšímu gravitačnímu poli odpovídá nekonečně velká množina parametrů. Dále budeme používat pro obrácenou úlohu následující předpoklady:

1. Hustotní rozhraní přesně generují pozorované vnější gravitační pole.
2. Jádro je dokonale hydrostatické (topografie je nulová, tvar rovná se geoid).
3. Hodnoty H a R_C jsou dané.

Za použití těchto předpokladů jsou všechny neznámé parametry jednoznačně určeny. Hodnoty H a R_C jsme zatím vybrali arbitrárně. K jejich určení budeme a-posteriorně zkoumat kompenzační koeficienty a R_C a H budeme hledat takové, aby byla kompenzace co nejlepší (viz sekce 4.1 a 5.1).

1.9 Librace

Měsíc, který obíhá planetu po eliptické oběžné dráze, se otáčí konstantní rychlostí, ale jeho oběhová rychlost se mění. Proto není k planetě natočen vždy stejnou stranou, ani pokud má vázanou rotaci, a tomuto jevu říkáme optická librace. Je-li navíc slapově vydutý, tak jeho dlouhá osa nesměřuje vždy do těžiště planety a na toto vydutí tak působí určitý moment síly. Tento moment vyvolává kolébání, kterému říkáme fyzikální librace. Fyzikální librace se pozoruje a prakticky se udává hodnota amplitudy kývání. Thomas et al. (2016) uvádí hodnotu fyzikální librace Enceladu jako $(0,120 \pm 0,007)^\circ$, Park et al. (2024) nedávno přišel s nižší hodnotou librace $(0,091 \pm 0,003)^\circ$. Amplituda fyzikální librace je závislá na tvaru Enceladu i na tvaru jeho vnitřních rozhraní a na parametrech R_C a H a dává nám proto důležitý vhled do jeho vnitřní stavby. V případě Enceladu lze pozorovanou fyzikální libraci vysvětlit pouze tenkou ledovou slupkou na kapalném oceánu, která se otáčí víceméně nezávisle na jádru (viz například Thomas et al. (2016)). Poznamenejme, že fyzikální librace nevstupuje do naší inverze gravitačních dat a obě metody používáme nezávisle.

2 Vstupní data

2.1 Tvar Enceladu

Primární data, ze kterých lze odvozovat tvar Enceladu, jsou fotografie z mise Cassini. Ty jsou dále zpracovávány buď jako obloukové profily (limb profiles), tedy zkoumání tvaru tělesa proti Slunci, metodou stereografických párů (fotografie stejné oblasti pod různými úhly), nebo metodou stereofotoklinometrie (odhad lokálního tvaru na základě stínů), případně se využívá kombinace více metod.

První tvarové modely Enceladu využívaly obloukové profily (Nimmo et al., 2011; Thomas et al., 2016; Tajeddine et al., 2017), Schenk a McKinnon (2024) používá stereografii a obloukové profily a Park et al. (2024) stereofotoklinometrii. Jednotlivé práce vycházejí ze stejných dat, ale docházejí k různým výsledkům, protože používají odlišné metodologie.

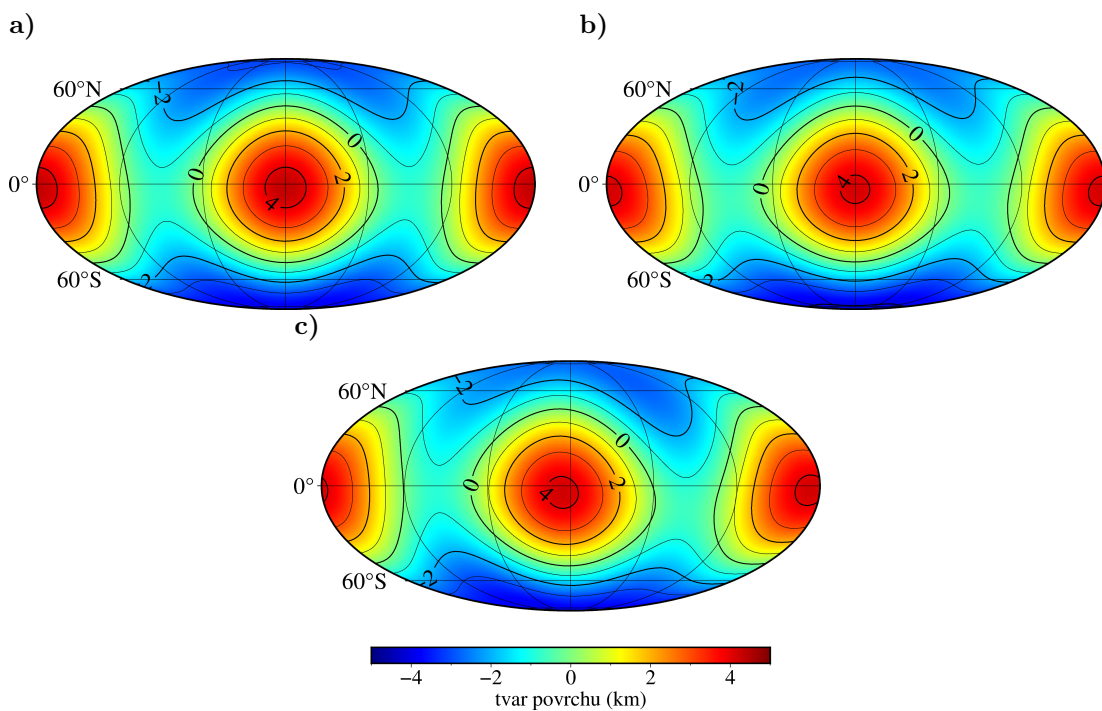
V tabulce 2.1 uvádíme sférické koeficienty tvaru pro celý stupeň dva a stupeň tři, řád nula z některých článků. Volba těchto koeficientů je daná faktem, že jsou to jediné koeficienty gravitačního pole Enceladu, které známe s použitelnou přesností (pro řešení obrácené úlohy potřebujeme tvarová i gravitační data). Uvádíme normalizované koeficienty používající naši konvenci. Modely lze také srovnat na obrázcích 2.1. Protože je tvar Enceladu dominován koeficienty C_{20} a C_{22} , uvádíme na obrázku 2.2 tvar bez nich.

Z uvedených koeficientů se jednotlivé modely dobře shodují pouze na C_{20}^S , C_{22}^S a C_{30}^S (lze nahlédnout na grafech na obrázku 2.1, které jsou velmi podobné), ostatní koeficienty se mezi modely liší. Nové publikace (Park et al., 2024; Schenk a McKinnon, 2024) uvádějí koeficienty tvaru jiné než C_{20}^S a C_{22}^S větší než starší Tajeddine et al. (2017). Za povšimnutí stojí především velmi vysoká hodnota S_{21} a S_{22} v práci Park et al. (2024). Tomu odpovídá i skutečnost, že zbytkový tvar na obrázku 2.2 je pro Park et al. (2024) největší, zatímco pro ostatní je relativně malý.

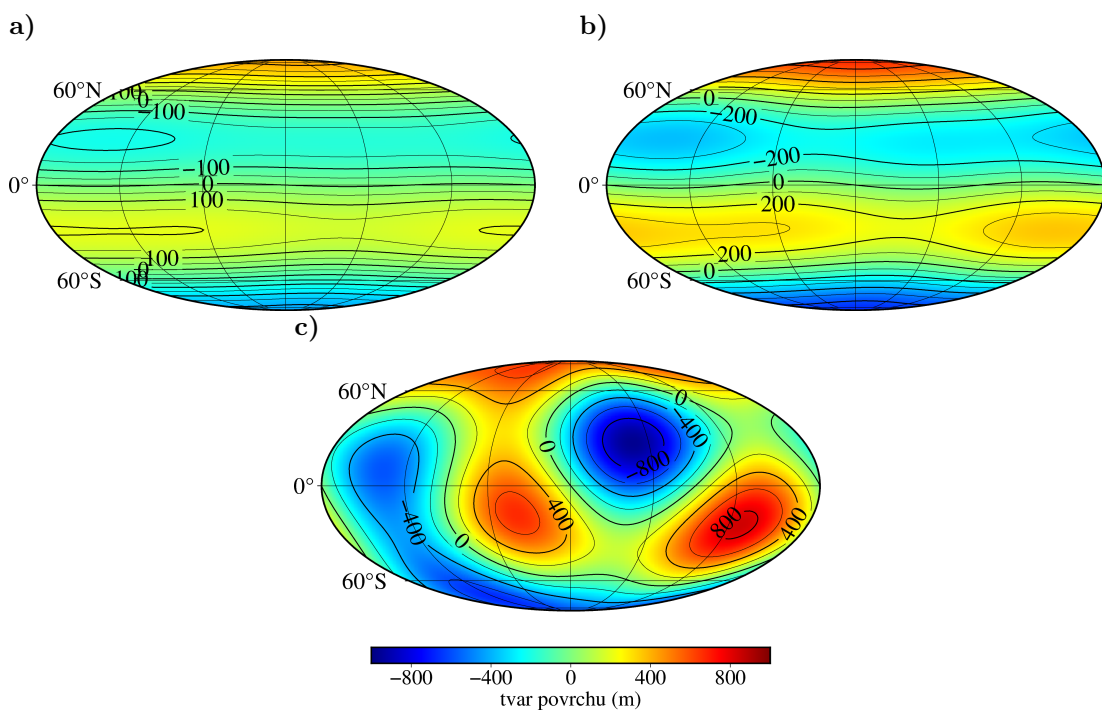
Na vyšších stupních se mezi sebou liší výrazně, což má za následek rozdílné lokální útvary, viz obrázek 2.3.

Článek	Tajeddine et al. (2017)	Schenk a McKinnon (2024)	Park et al. (2024)
C_{20}^S	-5564,2	-5436,4	-5250,5
C_{21}^S	23,5	89,7	-162,0
C_{22}^S	3329,1	3138,8	3166,4
C_{30}^S	563,3	886,3	785,0
S_{21}^S	-22,6	-21,4	406,9
S_{22}^S	12,1	47,0	731,2

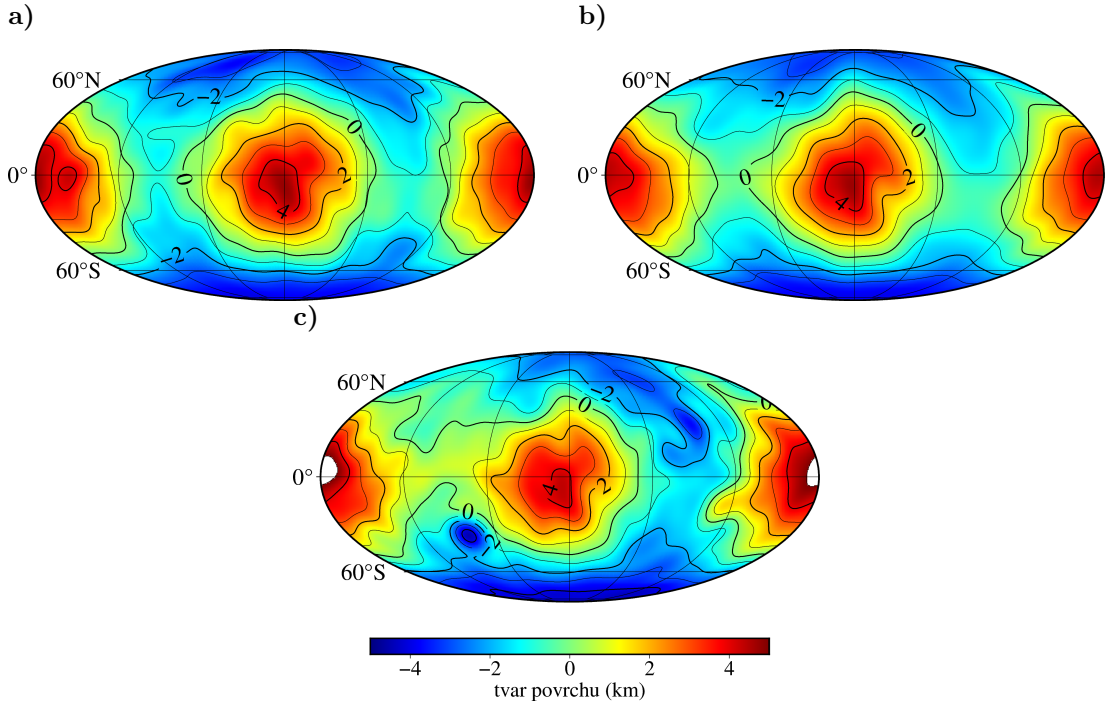
Tabulka 2.1 Plně normalizované tvarové koeficienty splňující naši konvenci, v metrech.



Obrázek 2.1 Tvar Enceladu na koeficientech stupně dva a C_{30} . a) Tajeddine et al. (2017), b) Schenk a McKinnon (2024), c) Park et al. (2024).



Obrázek 2.2 Tvar Enceladu na koeficientech C_{21} , S_{21} , S_{22} a C_{30} . a) Tajeddine et al. (2017), b) Schenk a McKinnon (2024), c) Park et al. (2024).



Obrázek 2.3 Detailní tvar Enceladu, stupeň 1 až 16. Tvarové modely ze Schenk a McKinnon (2024) a Park et al. (2024) jsou detailnější a lze je uvádět až do stupně 100, ale jsme limitováni modelem Tajeddine et al. (2017), který byl odvozen pouze do stupně 16 (využívá obloukové profily). a) Tajeddine et al. (2017), b) Schenk a McKinnon (2024), c) Park et al. (2024).

2.2 Gravitační potenciál Enceladu

Pokud v průběhu průletu sondy kolem tělesa známe zrychlení, které na ni působí, můžeme z toho vyvodit závěry o jeho gravitačním poli. Tato metoda je v současnosti prakticky jediný zdroj informací o gravitačním poli Enceladu a je tak používána všemi publikacemi, které se zabývají jeho měřením. Tato metoda dále vyžaduje odfiltrování negravitačních vlivů na zrychlení sondy, například odpor plynu a částic v okolí tělesa (Iess et al., 2014). V případě Enceladu jsou k dispozici použitelná data pouze ze tří průletů sondy Cassini a přesné, detailní měření gravitačního pole tudíž není možné a typicky se tak uvádějí pouze koeficienty gravitačního pole stupně dva a C_{30} .

První významná publikovaná sada koeficientů gravitačního pole vznikla v roce 2014 (Iess et al., 2014), ale v posledních letech se objevily nové publikace (Park et al., 2024; Goossens et al., 2024), které na základě stejných dat uvádějí jiné koeficienty.

Zde uvádíme koeficienty gravitačního potenciálu pro celý stupeň dva a stupeň tři, řád nula z některých článků a to včetně chyb. V tabulce 2.2 uvádíme původní, nenormalizované hodnoty, v tabulce 2.3 pak normalizované v naší konvenci. Pro srovnání také uvedme hodnoty koeficientů odstředivého a slapového potenciálu na povrchu Enceladu: $C_{20}^{OS} = -236,4 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, $C_{22}^{OS} = 173,7 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ (viz sekce 1.4).

Všechny modely se relativně dobře shodují na koeficientech C_{20}^S , C_{22}^S a C_{30}^S , ale nikoliv na ostatních. Starší článek Iess et al. (2014) udává hodnoty ostatních koeficientů jako velmi nízké, ostatní články pak uvádějí i vyšší hodnoty (především

S_{22}).

Jednotlivé modely je také možné porovnat na obrázku 2.4. Gravitační pole je, podobně jako tvar, dominováno koeficienty C_{20} a C_{22} a na obrázku 2.5 tak uvádíme i gravitační pole bez nich. To je pro data z Iess et al. (2014) minimální (amplituda reziduálního pole je méně než 3 % amplitudy pole včetně C_{20} a C_{22}), naopak pro data z Park et al. (2024) je zbytkové gravitační pole nezanedbatelné (amplituda reziduálního pole je více než 10 % amplitudy pole včetně C_{20} a C_{22}).

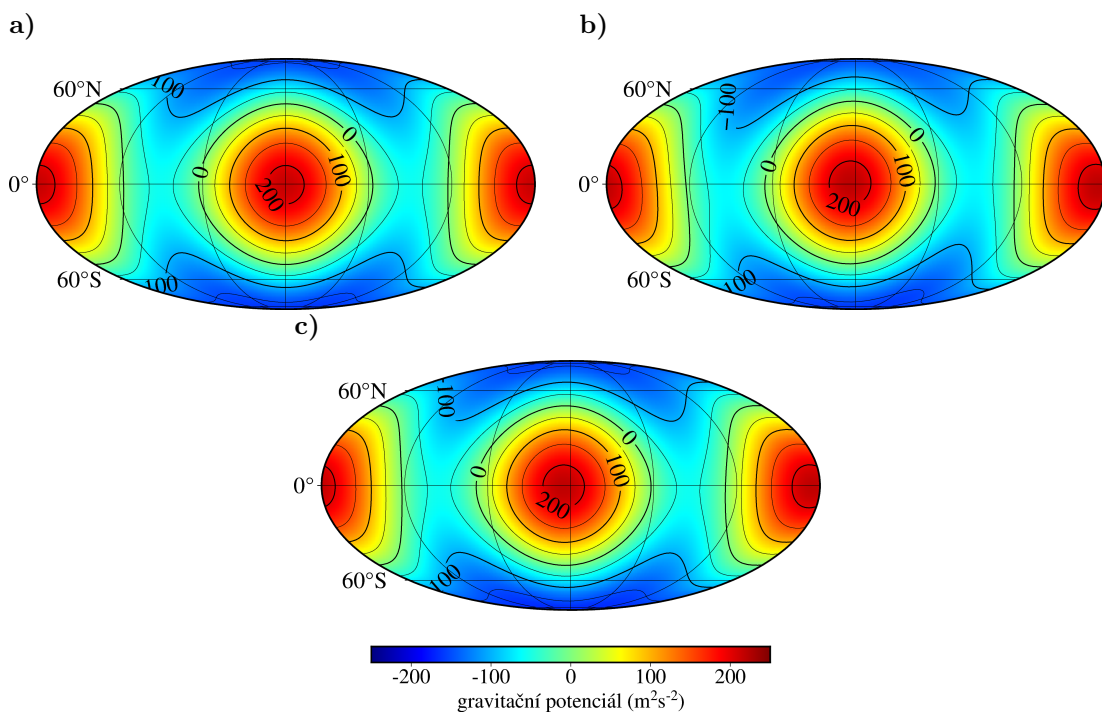
Článek a^{*1} (km)	Iess et al. (2014) 254,2	Goossens et al. (2024) 252	Park et al. (2024) 256,6
C_{20}^*	$-5435,2 \pm 34,9$	$-5406,8 \pm 175,5$	$-5477,45 \pm 37,0$
C_{21}^*	$9,2 \pm 11,6$	$-170,9 \pm 26,9$	$7,86 \pm 13,7$
C_{22}^*	$1549,8 \pm 15,6$	$1638,1 \pm 92,3$	$1517,9 \pm 14,7$
C_{30}^*	$115,3 \pm 22,9$	$202,2 \pm 116,9$	$177,8 \pm 33,4$
S_{21}^*	$39,8 \pm 22,4$	$-134,8 \pm 57,1$	$7,6 \pm 9,2$
S_{22}^*	$22,6 \pm 7,4$	$-237,8 \pm 14,8$	$-275,3 \pm 10,9$

Pozn.: ¹ referenční poloměr vůči kterému jsou data uváděna

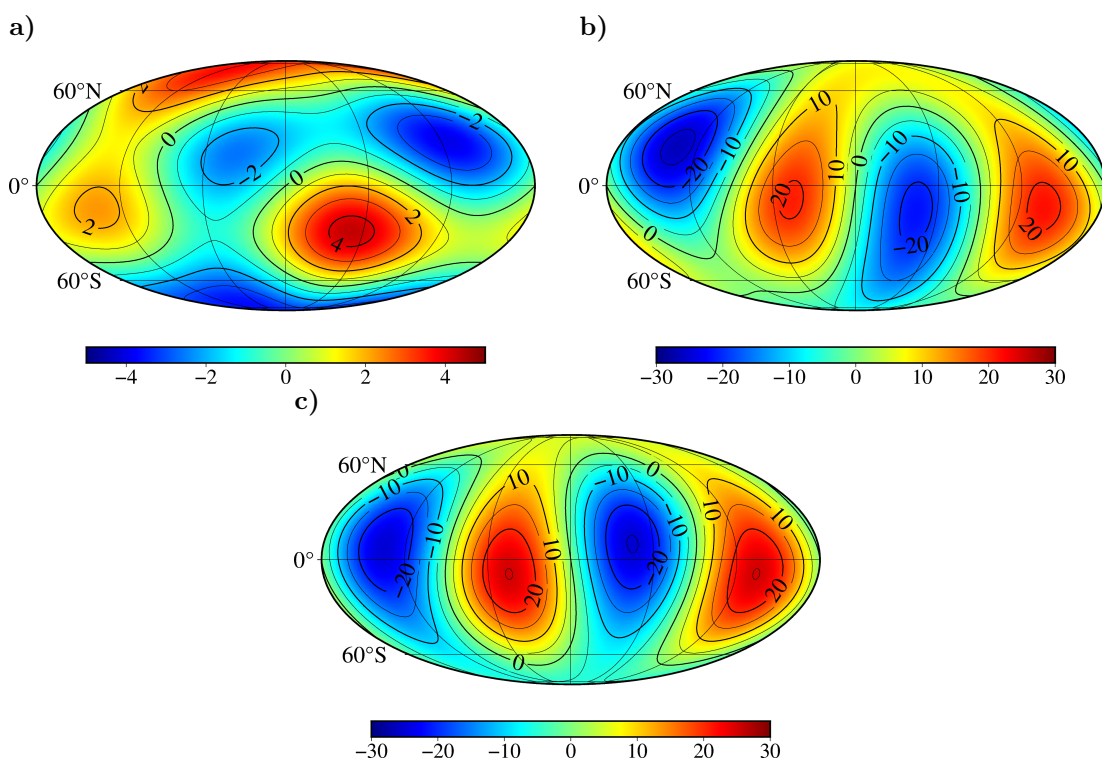
Tabulka 2.2 Sférické koeficienty gravitačního pole Enceladu, originální hodnoty, uváděné hodnoty jsou přenásobeny $\cdot 10^6$. Jedná se o nenormalizované, tedy bezrozměrné koeficienty.

Článek	Iess et al. (2014)	Goossens et al. (2024)	Park et al. (2024)
C_{20}^G	$-250,7 \pm 1,6$	$-245,1 \pm 8,0$	$-257,4 \pm 1,7$
C_{21}^G	$-0,5 \pm 0,7$	$9,5 \pm 1,5$	$-0,5 \pm 0,8$
C_{22}^G	$175,1 \pm 1,8$	$181,9 \pm 10,2$	$174,7 \pm 1,7$
C_{30}^G	$4,5 \pm 0,9$	$7,7 \pm 4,5$	$7,2 \pm 1,4$
S_{21}^G	$2,2 \pm 1,3$	$-7,5 \pm 3,2$	$0,4 \pm 0,5$
S_{22}^G	$-2,6 \pm 0,8$	$26,4 \pm 1,6$	$31,7 \pm 1,3$

Tabulka 2.3 Plně normalizované koeficienty gravitačního potenciálu splňující naši konvenci, na referenčním poloměru $a = 252,05$ km, jednotka je $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$.



Obrázek 2.4 Gravitační potenciál na referenčním poloměru a , stupeň 2 a C_{30} . a) Iess et al. (2014), b) Goossens et al. (2024), c) Park et al. (2024).



Obrázek 2.5 Zbytkový gravitační potenciál na referenčním poloměru a , koeficienty C_{21} , S_{21} , S_{22} a C_{30} . a) Iess et al. (2014), b) Goossens et al. (2024), c) Park et al. (2024).

2.3 Použité datové sady

Z literatury jsme vybrali tři sady gravitačních a tvarových dat, kterým se budeme dále věnovat. Výběr kombinací není arbitrární, přiřazujeme tvarová data k těm gravitačním datům, která byla použita při jejich výpočtu. Konkrétně:

1. tvarová data z Tajeddine et al. (2017) a gravitační data z Iess et al. (2014) (dále jako sada Tajeddine–Iess),
2. tvarová data z Schenk a McKinnon (2024) a gravitační data z Iess et al. (2014) (dále jako sada Schenk–Iess),
3. tvarová i gravitační data z Park et al. (2024) (dále jako sada Park–Park).

Gravitační data z Goossens et al. (2024) nepoužíváme, jelikož neexistují tvarová data z nich vycházející. S ohlednutím k motivaci této práce poznamenejme, že datová sada Tajeddine–Iess představuje starší data, hojně citovaná v předchozích pracích a sady Schenk–Iess a Park–Park data nová.

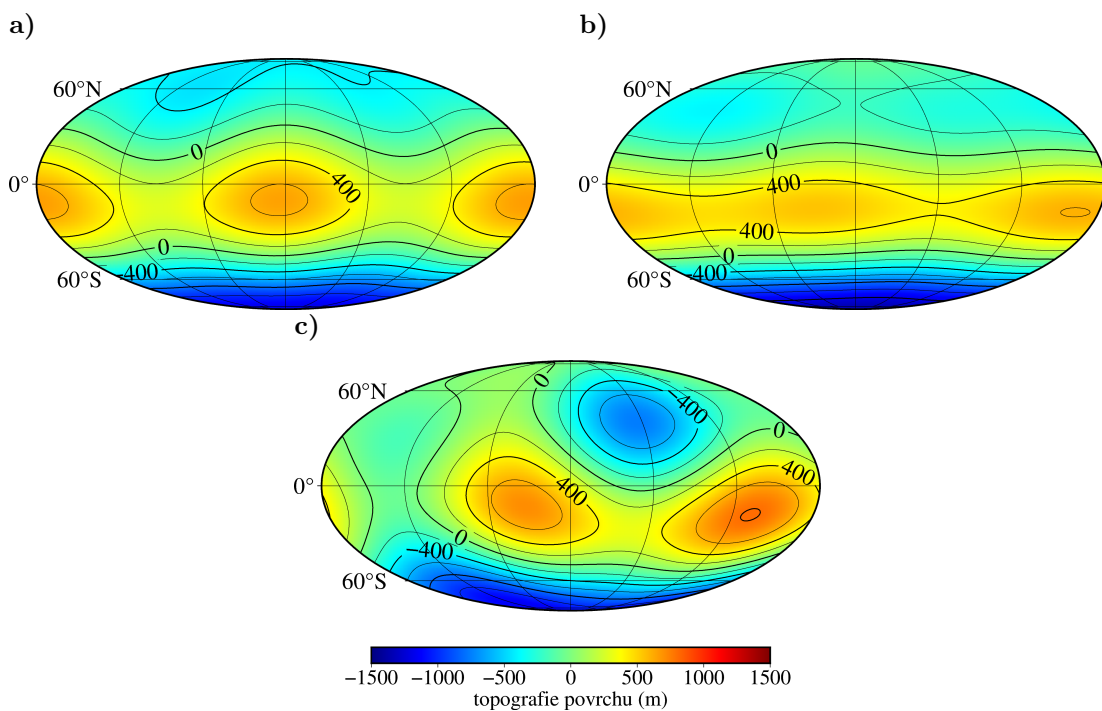
2.4 Topografie

Pro gravitační vliv hustotních rozhraní je relevantní jejich tvar, který uvádíme výše, ale pro izostázi je důležitá jejich topografie (tvar minus geoid). Proto topografii uvádíme v tabulce 2.4 a vykreslujeme na obrázku 2.6 a na obrázku 2.7 pak totéž bez $C_{20}^{T,S}$ a $C_{22}^{T,S}$.

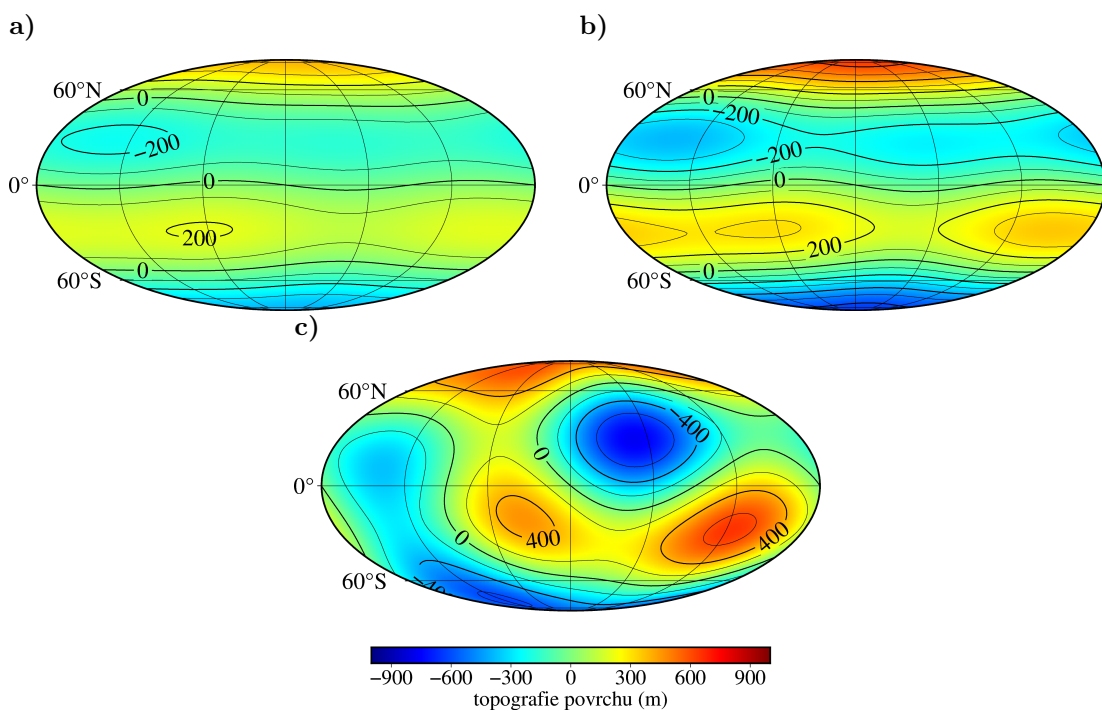
Při srovnání s tvarem zjistíme, že topografie na koeficientu C_{22}^T je velmi malá. Nejvýznamnější jsou tak koeficienty $C_{20}^{T,S}$ a $C_{30}^{T,S}$. Sada Park–Park má navíc velmi výrazné koeficienty $S_{21}^{T,S}$ a $S_{22}^{T,S}$.

datová sada	Tajeddine–Iess	Schenk–Iess	Park–Park
$C_{20}^{T,S}$	-1272,5	-1144,8	-899,4
$C_{21}^{T,S}$	-19,0	94,2	-158,0
$C_{22}^{T,S}$	255,8	65,5	96,2
$C_{30}^{T,S}$	523,3	846,4	721,6
$S_{21}^{T,S}$	2,8	-41,2	403,0
$S_{22}^{T,S}$	34,5	69,5	452,0

Tabulka 2.4 Sférické koeficienty topografie na povrchu Enceladu. Jednotka je metr.



Obrázek 2.6 Topografie (tvar minus geoid) povrchu Enceladu, stupeň 2 a C_{30} . a) datová sada Tajeddine-Iess, b) datová sada Schenk-Iess, c) datová sada Park-Park.



Obrázek 2.7 Zbytková topografie (tvar minus geoid) povrchu Enceladu, koeficienty C_{21} , S_{21} , S_{22} a C_{30} . a) datová sada Tajeddine-Iess, b) datová sada Schenk-Iess, c) datová sada Park-Park.

2.5 Poloměr jádra

Poloměr jádra a jeho hustota jsou neoddělitelně spjaty (viz rovnice 1.2). Na základě odhadu možného rozsahu hustoty jádra z Choblet et al. (2017) uvádí Čadek et al. (2019) rozsah 185–195 km. Dále se můžeme podívat na výsledky článků, které řešily obrácenou úlohu podobnou té naší, například Park et al. (2024) došel k rozsahu 193–204 km, McKinnon (2015) 190 km, Beuthe et al. (2016) 190–194 km.

Dále uvažujeme rozsah $R_C = 190\text{--}210$ km.

2.6 Střední tloušťka ledové slupky

Odhady střední tloušťky ledové slupky vychází primárně z fyzikální librace. Thomas et al. (2016) naměřil libraci jako $0,120^\circ$ na základě čehož odvodil tloušťku ledové slupky v rozsahu 21–26 km. Na základě této hodnoty librace pak Van Hoolst et al. (2016) uvádí rozsah 14–26 km a Čadek et al. (2016) rozsah 18–22 km. Park et al. (2024) později došel k nižší hodnotě librace $0,091^\circ$ a z toho odvodil tloušťku ledové slupky v rozsahu 27–33 km. V rámci této práce budeme uvažovat rozsah 15–30 km jako konzistentní s pozorovanými libračními daty a střední hodnotu $H = 22,5$ km.

2.7 Hustota ledu

Hustota kompaktního ledu na Zemi se pohybuje kolem 917 kg m^{-3} (Vargas et al., 2007; Harvey, 2019). Na Enceladu se typicky očekává nižší teplota, což koresponduje s vyšší hustotou ledu (Harvey, 2019). Přesná hustota je diskutabilní vzhledem k neznámé teplotě a porozitě ledové slupky. V literatuře se uvádějí různé hodnoty, uveďme například: Čadek et al. (2019) používá hustotu 926 kg m^{-3} , Iess et al. (2014) používá 930 kg m^{-3} , Schenk a McKinnon (2024) 900 kg m^{-3} (uvažuje porézní led), Tajeddine et al. (2017) rozsah 917 až 935 kg m^{-3} (variací od porézního ledu na povrchu ke kompaktnímu ve větší hloubce) a Shoji et al. (2013) 920 kg m^{-3} .

My používáme, v souladu s Čadek et al. (2019), hustotu ledu $\rho_I = 926\text{ kg m}^{-3}$.

Lze také uvažovat o nižších hustotách ledu v důsledku buď vysoké porozity (vzhledem k tloušťce ledu se to nezdá pravděpodobné) anebo kvůli příměsím (klatráty ledu). Těmto vlivům se však nevěnujeme.

2.8 Hustota oceánu

Odhad hustoty oceánu na Enceladu je náročnější než odhad hustoty ledu, jelikož o něm víme daleko méně. Jakýkoliv odhad hustoty bude silně zatížen neznámou koncentrací rozpuštěných solí a jiných látek. Uveďme opět některé hodnoty používané v literatuře: Shoji et al. (2013) uvažuje 1000 kg m^{-3} , Čadek et al. (2019) 1010 kg m^{-3} , Van Hoolst et al. (2016) připouští rozsah 950 až 1100 kg m^{-3} , Schenk a McKinnon (2024) uvažuje 990 kg m^{-3} , Iess et al. (2014) 1000 kg m^{-3} .

My se podržíme Čadek et al. (2019) a dále používáme hodnotu 1010 kg m^{-3} , která odpovídá oceánu nízké salinity.

Stejně jako v případě ledové slupky lze u oceánu diskutovat o exotičtějším hustotách (srovnejme s oceánem Titanu, pro který Soderlund et al. (2024) uvažuje rozsah 1100 až 1350 kg m^{-3}), ale pro Enceladus se toto typicky neuvažuje (neočekáváme zde dostatečný zdroj soli) a my se tomuto dále nevěnujeme.

3 Metodika

3.1 Linearizovaná inverze gravitačních dat

Řešme obrácenou úlohu formulovanou v sekci 1.8.2, tedy pro fixní R_C a H hledáme $K_{jm}^{I/W}$ a K_{jm}^C , aby hustotní rozhraní přesně generovaly pozorovaný vnější gravitační potenciál a jádro bylo v hydrostatické rovnováze. Dále necht jsou tvary všech rozhraní dostatečně malé, abychom mohli ospravedlnit použití lineárních vzorců pro výpočet potenciálu hustotního rozhraní (viz sekce 1.3). Pak z podmínky přesného splnění gravitačních dat plyne:

$$K_{jm}^G = \frac{4\pi}{2j+1} Ga(K_{jm}^S \Delta\rho_I + K_{jm}^{I/W} \Delta\rho_{I/W} (\frac{a}{R_{I/W}})^{j+2} + K_{jm}^C \Delta\rho_C (\frac{a}{R_C})^{j+2}), \quad (3.1)$$

kde K_{jm}^G jsou sférické koeficienty pozorovaného gravitačního pole. Z podmínky hydrostatického jádra plyne, že jeho tvar je stejný jako geoid na stejném středním poloměru (používáme zjednodušený, lineární vzorec pro geoid):

$$K_{jm}^C g(R_C) = \frac{4\pi}{2j+1} GR_C (K_{jm}^S (\frac{R_C}{a})^{j-1} \Delta\rho_I + K_{jm}^{I/W} \Delta\rho_{I/W} (\frac{R_C}{R_{I/W}})^{j-1} + K_{jm}^C \Delta\rho_C) + K_{jm}^{OS}, \quad (3.2)$$

kde poslední člen představuje odstředivý a slapový potenciál (relevantní pro stupeň dva, řád nula a dva, reálná část). Úpravami dostáváme:

$$K_{jm}^C = \frac{\frac{4\pi}{2j+1} GR_C K_{jm}^S (\frac{R_C}{a})^{j-1} \Delta\rho_I + \frac{4\pi}{2j+1} GR_C K_{jm}^{I/W} \Delta\rho_{I/W} (\frac{R_C}{R_{I/W}})^{j-1} + K_{jm}^{OS}}{g - \Delta\rho_C \frac{4\pi}{2j+1} GR_C}. \quad (3.3)$$

Dosazením 3.3 do 3.1:

$$K_{jm}^G = \frac{4\pi}{2j+1} Ga(K_{jm}^S \Delta\rho_I + K_{jm}^{I/W} \Delta\rho_{I/W} (\frac{a}{R_{I/W}})^{j+2} + \frac{K_{jm}^S (\frac{R_C}{a})^{j-1} \Delta\rho_I + K_{jm}^{I/W} \Delta\rho_{I/W} (\frac{R_C}{R_{I/W}})^{j-1} + \frac{2j+1}{4\pi GR_C} K_{jm}^{OS}}{\frac{g(2j+1)}{4\pi GR_C} - \Delta\rho_C} \Delta\rho_C (\frac{a}{R_C})^{j+2}), \quad (3.4)$$

z čehož vyjádříme $K_{jm}^{I/W}$:

$$K_{jm}^{I/W} = \frac{K_{jm}^G \frac{2j+1}{4\pi Ga} - K_{jm}^S \Delta\rho_I - \frac{K_{jm}^S (\frac{R_C}{a})^{j-1} \Delta\rho_I + \frac{2j+1}{4\pi GR_C} K_{jm}^{OS}}{\frac{g(2j+1)}{4\pi GR_C} - \Delta\rho_C} \Delta\rho_C (\frac{a}{R_C})^{j+2}}{\Delta\rho_{I/W} \left(\left(\frac{a}{R_{I/W}} \right)^{j+2} + \Delta\rho_C (\frac{a}{R_C})^{j+2} \frac{\left(\frac{R_C}{R_{I/W}} \right)^{j-1}}{\frac{g(2j+1)}{4\pi GR_C} - \Delta\rho_C} \right)}. \quad (3.5)$$

Linearizovanou inverzi uvádíme pro úplnost a názornost. V praxi používáme přesnější metodu, kterou uvádíme v další kapitole.

3.2 Zjednodušená nelinearizovaná inverze gravitačních dat

Stejně jako v předchozí kapitole řešíme obrácenou úlohu ze sekce 1.8.2, ale nyní počítáme gravitační potenciál hustotního rozhraní přesnou metodou, nikoliv linearizovaně (srovnejte rovnice 1.3 a 1.5 pro vnější potenciál a ekvivalentní pro vnitřní). Použití přesných vzorců vyžaduje především rozhraní led–voda, kde očekáváme velkou odchylku od koule. Geoid (a tudíž i tvar) rozhraní jádro–voda stále počítáme zjednodušenou metodou (přesné, nezjednodušené hledání geoidu viz sekce 3.4):

$$h(\theta, \varphi) = V(\theta, \varphi)/g \quad (3.6)$$

a gravitační působení rozhraní jádro–voda samo na sebe počítáme linearizovanými vzorci. Vzorec pro výpočet tvaru jádra tak je (srovnejte s rovnicí 3.3), za předpokladu hydrostatické rovnováhy:

$$K_{jm}^C = \frac{K_{jm}^{S,C} + K_{jm}^{I/W,C} + K_{jm}^{OS}}{g - \Delta\rho_C \frac{4\pi}{2j+1} GR_C}, \quad (3.7)$$

kde $K^{A,B}$ značí gravitační působení rozhraní A na rozhraní B , které počítáme nelinearizovanou metodou, a K_{jm}^{OS} značí odstředivé a slapové síly. Podmínka replikace vnějšího gravitačního pole pak nabývá tvaru:

$$K_{jm}^G = K_{jm}^{S,S} + K_{jm}^{I/W,S} + K_{jm}^{C,S}, \quad (3.8)$$

kde všechna gravitační působení počítáme nelinearizovanou metodou.

Kvůli dvěma aproximacím zmíněným výše (geoid rozhraní voda–jádro a gravitační působení rozhraní voda–jádro samo na sebe počítáme linearizovaně) tuto metodu nazýváme „zjednodušená“ nelinearizovaná inverze gravitačních dat. Diskuzi nezjednodušené inverze lze najít v následující kapitole, v praxi ji však nepoužíváme a to z důvodu numerické náročnosti.

Řešení obrácené úlohy jsme hledali iterací následující smyčky:

1. Zvolme $K_{jm}^{I/W}$.
2. Spočítáme gravitační vliv rozhraní vakuum–led a led–voda na jádro.
3. Spočítáme tvar jádra, viz rovnice 3.7.
4. Spočítáme gravitační působení rozhraní voda–jádro, led–voda a vakuum–led na poloměru a , viz rovnice 3.8.
5. Srovnáme spočítané a pozorované gravitační pole.
6. Vracíme se ke kroku jedna a nové $K_{jm}^{I/W}$ volíme tak, aby se rozdíl pozorovaného a predikovaného gravitačního pole pokud možno zmenšil.

Prakticky jsme smyčku realizovali v Pythonu pomocí funkce `minimize` z knihovny `scipy.optimize` za použití modifikované Powellovy metody (Powell, 1964; Deshmukh a Pecht, 1990).

3.3 Nezjednodušená nelinearizovaná inverze

Hledejme jako výše řešení obrácené úlohy definované v sekci 1.8.2, ale oproti předchozímu počítejme geoid (a tudíž i tvar) rozhraní voda–jádro přesnou metodou (viz sekce 3.4). Řešení této úlohy můžeme najít stejnou smyčkou jako v předchozím, s výjimkou kroku tři, kde tvar jádra musíme hledat iterativně (vložením další smyčky do smyčky původní). Taková podsmyčka by vypadala následovně:

1. zvolíme K_{jm}^C
2. spočítáme geoid na poloměru R_C přesnou metodou
3. spočítáme rozdíl tvaru a geoidu rozhraní
4. další K_{jm}^C volíme tak, abychom minimalizovali rozdíl spočítaný v kroku 3

Toto by bylo numericky náročné, protože přesné hledání geoidu je realistické provést jednou, jako děláme při výpočtu kompenzačních koeficientů pro ostatní rozhraní (sekce 3.5), ale počítat ho opakovaně v rámci smyčky není numericky v našich možnostech.

Odhadněme numerickou náročnost navrhovaného výpočtu. Smyčka v předchozí sekci byla typicky schopná nalézt řešení po cca 300 iteracích. Pokud bychom chtěli hledat geoid přesně, znamenalo by to zavést další smyčku přes tvar rozhraní voda–jádro (viz výše) a do ní vložit přesný výpočet geoidu, který sám o sobě trvá cca 10 s. Za předpokladu, že by sekundární smyčka vyžadovala přibližně stejný počet iterací jako ta primární, by takový výpočet trval cca $300 \cdot 300 \cdot 10 \text{ s} = 900\,000 \text{ s}$. V praxi tuto metodu nepoužíváme.

3.4 Výpočet geoidu

Za použití Brunsova teorému můžeme výšku geoidu spočítat analyticky (ale nepřesně):

$$h(\theta, \varphi, R) = V(\theta, \varphi, R)/g(R). \quad (3.9)$$

Přesný výpočet geoidu realizujeme jako numerické hledání ekvipotenciální plochy. Hledání geoidu na poloměru R v okolí hustotního rozhraní o tvaru $s(\theta, \varphi)$ byl realizován následovně:

1. Vybereme dolní a horní odhad výšky geoidu (h_{min} a h_{max}) a daný rozsah diskretizujeme do pole $A = (R + h_{min}, R + h_{min} + \Delta R, \dots, R + h_{max})$.
2. Pro všechna $r_i \in A$ spočítáme potenciál přesnou, nelineární metodou. Tvar rozhraní s se rozdělí na plochu nad a plochu pod vybraným poloměrem r_i a pro tyto dvě části počítáme gravitační působení za pomoci vzorců 1.3, 1.6 a 1.8 a výsledky plochy nad a pod r sčítáme.
3. Potenciál na každém $r_i \in A$ dále spočítáme na mříži tvaru $N \times M$ ($V_{nm}^{r_i} = V(r_i, \theta_i, \varphi_j)$, $\theta_n = \pi \frac{n}{N}$, $\varphi_m = 2\pi \frac{m}{M}$).
4. Pro každý bod na mříži (tedy pro každé θ_n, φ_m) hledáme $r_i \in A$ pro který $V_{nm}^{r_i}$ je nejbližší referenčnímu potenciálu. Nalezená r_i skládáme do mříže h_{nm} .

5. Výslednou mříž h_{nm} rozvedeme do sférických harmonických funkcí.

Přesné hledání geoidu je ze zatím uvedených metod numericky nejnáročnější, jelikož zahrnuje opakované hledání přesného potenciálu.

Přesný výpočet geoidu používáme při výpočtu kompenzačních koeficientů, viz další kapitola.

3.5 Výpočet kompenzačních koeficientů

Pro výpočet kompenzačního koeficientu pro ledovou slupku potřebujeme znát její horní tvar (známe z literatury), spodní tvar (výsledek inverze gravitačních dat) a geoidy obou rozhraní. Geoidy můžeme počítat lineárně, nebo nelineárně, viz výše. V praxi jsme oba geoidy počítali vždy přesnou metodou.

Následně je třeba řešit následující integrál:

$$\left(\int_{h_{I/W}(\theta, \varphi)}^{r_{I/W}(\theta, \varphi)} g r^2 dr \right)_{jm}, \quad (3.10)$$

kde tíhové zrychlení g je obecná funkce souřadnice, a analogický integrál pro horní rozhraní. Jako první přiblížení se může nabízet předpokládat g konstantní, my však používáme přesnější (ale stále aproximativní) metodu, které říkáme aproximace dokonalých koulí. Uvažujme Enceladus s dokonale sférickými hustotními rozhraními a odpovídající průběh g :

$$g(r) = G \frac{1}{r^2} \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (3.11)$$

Pro rozhraní na poloměru R s hustotou ρ_1 nad hustotou ρ_2 označme hmotu pod R jako M_0 a dostáváme:

$$g(r) = (M_0 + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)\rho_1) \frac{G}{r^2}, \quad r > R, \quad (3.12)$$

$$g(r) = (M_0 + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)\rho_2) \frac{G}{r^2}, \quad r < R. \quad (3.13)$$

Dosazením do integrálu v rovnici 3.10:

$$\int_h^r g r^2 dr = (M_0 + \frac{4}{3}\pi(r^3 - R^3)\rho_W) G dr = G \left[(M_0 - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_W) r + \frac{\pi}{3} r^4 \rho_W \right]_h^r, \quad (3.14)$$

kde jsme předpokládali $r > R$, $h > R$, ostatní 3 možné kombinace nerovností pak počítáme ekvivalentně. Rozdíl přístupů konstantního g a naší metody aproximace dokonalých koulí jsme pozorovali jako nezanedbatelný. Prakticky využíváme k výpočtu tento zde uvedený postup.

Odvozené vztahy jsou stále přibližné, nezohlednili jsme odstředivou a slapovou sílu a výchylky g kvůli tvaru rozhraní. Zkusme odhadnout chybu v důsledku provedených aproximací. Zrychlení způsobené odstředivou silou na rovníku odpovídá:

$$g_C = \frac{1}{2} \omega^2 a \doteq 0,000\,36 \text{ m s}^{-2}, \quad (3.15)$$

což je zanedbatelné vůči velikosti g (okolo $0,1 \text{ m s}^{-2}$ na povrchu i pod ledovou slupkou). Velikost zrychlení slapové síly je stejného řádu jako odstředivé síly..

Velikost zrychlení daného tvarovými anomáliemi odhadneme z koeficientu C_{20}^S , který je největší z povrchových koeficientů (samozřejmě kromě C_{00}^S):

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \varphi) &= Re \left(C_{20}^G Y_{20}(\theta, \varphi) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) = Re \left(\frac{4\pi}{5} Gr C_{20}^T \rho_I \left(\frac{r}{a} \right)^4 Y_{20}(\theta, \varphi) \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right) = \\ &= Re \left(\frac{4\pi}{5} \frac{G\rho_I}{a} C_{20}^T r^2 Y_{20} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} g(a, \theta, \varphi) &= \left(\frac{d}{dr} V \right)(a, \theta, \varphi) = Re \left(\frac{8\pi}{5} \frac{G\rho_I}{a} C_{20}^T r Y_{20} \right)(a, \theta, \varphi) = \\ &= Re \left(\frac{8\pi}{5} G\rho_I C_{20}^T Y_{20}(\theta, \varphi) \right) \approx 10^{-3} \text{ m s}^{-2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

což je o dva řády menší než hodnota g a tak tento vliv zanedbáváme.

3.6 Celkový postup inverze gravitačních dat

Zde uvádíme detailní postup jednoho výpočtu, jejichž výsledky prezentujeme dále:

1. Zvolíme R_C , H a datovou sadu (viz sekce 2.3).
2. Provedeme inverzi gravitačních dat (zjednodušenou nelinearizovanou inverzi, viz sekce 3.2).
3. Spočítáme geoid na horním a spodním rozhraní ledové slupky. Geoid buzený tvarem vlastního rozhraní počítáme nelineární metodou (viz sekce 3.4), ostatní lineární metodou. Gravitační vliv rozhraní na ostatní rozhraní počítáme přesnou metodou (viz sekce 1.3).
4. Spočteme topografii horního a spodního rozhraní ledové slupky a spočítáme kompenzační koeficienty (viz sekce 3.5).

3.7 Misfit

Pro zkoumání izostáze dále zavádíme veličinu misfit, S :

$$S = \sum (D_{jm} - 1)^2, \quad (3.18)$$

kde suma sčítá přes stupně, řády a reálnou a imaginární část (D_{jm}^C a D_{jm}^S). Pokud nebude řečeno jinak, myslíme misfitem sumu přes všech šest koeficientů, které běžně používáme (D_{20}^C , D_{21}^C , D_{22}^C , D_{30}^C , D_{21}^S a D_{22}^S), ale prakticky používáme i misfit nasčítaný pouze z některých těchto koeficientů (v takovém případě je na to vždy upozorněno v popisku obrázku). Dokonalá izostatická rovnováha odpovídá $S = 0$.

3.8 Topografie jádra

Předpoklad, že jádro Enceladu je dokonale hydrostatické (tedy topografie je nulová), který používáme, nemusí být v realitě přesně splněn. Topografie jádra může pocházet například od proudění vody v jádře, nebo od hustotních nehomogenit. Jak citlivá je inverze dat, kterou jsme popsali výše a jejíž výsledky prezentujeme níže, na nenulovou topografii jádra? Jak moc se změní řešení, pokud jádro nebude hydrostatické?

Pro výzkum těchto otázek budeme dále zkoumat topografii jádra rozvinutou do sférických koeficientů $K_{jm}^{T,C}$. Ta vstupuje do výpočtu tvaru jádra následovně (srovnejte s 3.7):

$$K_{jm}^C = \frac{K_{jm}^{S,C} + K_{jm}^{I/W,C} + K_{jm}^{OS} + gK_{jm}^{T,C}}{g - \Delta\rho_C \frac{4\pi}{2j+1} GR_C}. \quad (3.19)$$

Tvar jádra pak má vliv na vnější gravitační pole a tudíž i na inverzi gravitačních dat (viz rovnice 3.8). Praktický důsledek topografie jádra v naší inverzi je změna tvaru rozhraní voda–led $K_{jm}^{I/W}$ a kompenzačních koeficientů D_{jm} . Vliv topografie jádra na výsledky obrácené úlohy prezentujeme a diskutujeme v sekcích 4.3 a 5.4.

3.9 Librace

K dalšímu výzkumu vnitřní stavby Enceladu jsme dále zkoumali jeho fyzikální libraci v závislosti na relevantních parametrech. Prakticky jsme tento průzkum realizovali pomocí programu poskytnutého vedoucím práce. Ten uvažuje Enceladus s třemi hustotními rozhraními jako výše a jejich tvar aproximuje pomocí koeficientů C_{20} a C_{22} (které jsou pro libraci nejdůležitější). Program simuluje časový průběh pohybu Enceladu v gravitačním poli Saturnu a kývání (libraci) jeho dlouhé poloosy oproti spojnici Saturn–Enceladus přímým výpočtem tíhového momentu působícího na ledovou slupku i jádro a jejich momentu setrvačnosti. Výstupem programu je amplituda fyzikální librace po ustálení librace (po simulaci dostatečně dlouhého časového úseku).

4 Výsledky

V této kapitole prezentujeme výsledky inverze gravitačních dat (viz sekce 3.2) pro tři datasety definované výše (viz sekce 2.3) s dodatečným výpočtem kompenzačních koeficientů. Dále zkoumáme řešení v závislosti na parametrech H a R_C . V kapitole 4.1 hledáme hodnoty R_C a H takové, pro které náš model predikuje dobrou izostatickou rovnováhu ledové slupky. V kapitole 4.2 pak pro optimální parametry R_C a H ukazujeme výsledky inverze (tvar rozhraní voda–led a jádro–voda). V kapitole 4.3 zkoumáme citlivost inverze na topografii jádra. V poslední kapitole kapitole 4.4 prezentujeme výsledky simulace fyzikální librace v závislosti na relevantních parametrech, především R_C a H a srovnáváme tyto výsledky s měřením.

4.1 Kompenzační koeficienty

Provedli jsme inverzi gravitačních dat a výpočet kompenzačních koeficientů pro stupeň dva a koeficient C_{30} a na obrázku 4.1 vykresluje misfit S (viz sekce 3.7) v závislosti na R_C a H . Vidíme, že dokonalá izostáze ($S = 0$) není možná pro žádnou datovou sadu a kombinaci parametrů H a R_C . Jednotlivé datové sady predikují dobrou izostázi pro určitý rozsah parametrů R_C a H a každá sada je jinak citlivá na změny jednotlivých parametrů.

Pro další diskuzi a hledání parametrů R_C a H minimalizujících S je vhodné zaměřit se na misfit, který bere v potaz pouze některé z koeficientů. Na obrázku 4.2 v levém sloupci uvádíme S sčítané přes D_{20}^C a D_{22}^C (tyto koeficienty se nejvíce mění s H a R_C a zároveň je známe nejpřesněji) a v pravém sloupci S sčítané přes zbylé, tedy D_{21}^C , D_{21}^S , D_{22}^S a D_{30}^C (mění se málo v porovnání s předchozími dvěma, známe je méně přesně). Aby bylo možné zkoumat i hodnotu jednotlivých kompenzačních koeficientů, nikoliv pouze misfit, tak na obrázku 4.3 kompenzační koeficienty v závislosti na R_C , respektive H (druhý z dvojice parametrů je vždy fixní).

Nyní srovnáme výsledky pro jednotlivé datové sady. Ty se liší svou citlivostí na změny H a R_C . Sada Tajeddine–Iess je z datových sad nejcitlivější na změny H a relativně málo citlivá na změny R_C , sada Park–Park se chová obráceně, výsledky jsou málo citlivé na H , citlivé na R_C a sada Schenk–Iess je středně citlivá změnu H a velmi citlivá na změnu R_C , viz obrázek 4.1 a 4.2.

Sada Tajeddine–Iess predikuje dobrou izostázi pro koeficienty D_{20}^C a D_{22}^C pro $R_C = 199$ – 201 km (nezávisle na hodnotě H), viz obrázek 4.2 vlevo a 4.3. Díky tomu, že kompenzační koeficient D_{22}^C se s R_C mění relativně pomalu, je tato datová sada nejméně citlivá z datových sad na změny poloměru jádra, viz také obrázek 4.3a a 4.2a. D_{30}^C je blízko jedné pro všechny uvažované hodnoty R_C a H , viz obrázek 4.3b. D_{21}^C , D_{21}^S a D_{22}^S jsou pro všechny přípustné hodnoty R_C a H příliš vysoké, ale lehce klesají s H , viz obrázek 4.3b.

V sadě Schenk–Iess je koeficient D_{22}^C velmi citlivý na změny R_C a dává nejlepší izostázi na cca 201 km, viz také obrázek 4.3c a 4.2c. S měnícím H se nejvíce mění D_{22}^C , což způsobuje posun ideálního R_C v závislosti na H , viz obrázek 4.2c. Chování ostatních 4 koeficientů je ekvivalentní sadě Tajeddine–Iess, viz předchozí odstavec.

v Sada Park–Park chování koeficientů D_{20}^C a D_{22}^C omezuje R_C do rozsahu 200 – 202 km, hodnota se lehce posouvá s H , podobně jako v předchozí datové sadě, viz obrázky 4.3e a 4.2e. Křivky $D_{20}^C(R_C)$ se protínají v bodě $D^C = 0,6$ a mají výrazně jiné směrnice a dobrá izostáze na obou koeficientech zároveň tak není možná (není možné aby oba koeficienty byli blízko ejdné zároveň). Toto lze pozorovat i u ostatních sad, ale u sady Park-Park je nejvýraznější. a $D_{22}^C(R_C)$ D_{30}^C , D_{21}^C a D_{21}^S vykazují dobrou izostázi pro celý uvažovaný rozsah parametrů. Koeficient D_{22}^S je blízko nuly.

Z chování kompenzačních koeficientů jsme chtěli odhadnout možné hodnoty R_C a H . Číselné výsledky této analýzy závisí na tom, s jakou váhou budeme uvažovat jednotlivé kompenzační koeficienty („jak moc jim věříme“), což je nutně spjato s diskuzí chyb našich výpočtů a vlivů našich předpokladů. Prozatím uveďme, že data ze všech datových sad omezují R_C na blízké okolí 200 km a H v zásadě neomezuje. Pro podrobnější diskuzi přesnosti našeho modelu viz sekce 5.3 a 5.4. Pro podrobnější závěr o hodnotě R_C viz sekce 5.1.

Diskutujeme nyní vliv změny poloměru jádra na naše řešení a kompenzační koeficienty. Tato změna má následující důsledky:

1. Gravitační potenciál rozhraní se zmenšuje se vzdáleností od rozhraní a to faktorem $\left(\frac{R_C}{r}\right)^{j+2}$ respektive $\left(\frac{R_C}{r}\right)^{j-1}$ (podle toho jestli počítáme působení jiného rozhraní na rozhraní voda–jádro anebo obráceně). Uveďme možný rozsah zlomku $\frac{R_C}{a}$:

$$\frac{R_C}{a} = \frac{190}{252.05} = 0,75,$$

$$\frac{R_C}{a} = \frac{210}{252.05} = 0,83.$$
2. Aby se zachovávala celková hmotnost Enceladu a protože hustoty vody a ledu jsou fixní, tak se změnou poloměru jádra se musí změnit jeho hustota. Rozsah $R_C = 190\text{--}210$ km odpovídá $\rho_C = 2459\text{--}2083$ kg m⁻³ ($\Delta\rho_C = 1449\text{--}973$ kg m⁻³).
3. Změna poloměru jádra mění velikost odstředivé a slapové síly působící na rozhraní voda–jádro (viz sekce 1.4). Tyto síly jsou na poloměru závislé kvadraticky a na poloměru $R_C = 210$ km jsou tak 1,22-krát silnější než na poloměru $R_C = 190$ km. Tento efekt působí přímo na geoid, a tudíž i tvar jádra.

Uvědomme si, že vlivy z bodu jedna a dva jsou do jisté míry protichůdné. Čím větší je poloměr jádra, tím blíže je ostatním rozhraní a tím více se rozhraní mohou navzájem ovlivňovat (vliv jedna), ale čím větší jádro, tím méně je husté a tím méně relevantní je jeho gravitační vliv. Pohledem na levý sloupec obrázku 4.3 zjistíme, že pouze kompenzační koeficienty D_{20}^C a D_{22}^C se relevantně mění s R_C a z nich D_{22}^C je vůči změně poloměru jádra citlivější. Ostatní kompenzační koeficienty se s R_C buď nemění, anebo se mění velmi pomalu. Z toho docházíme k závěru, že z vlivů vyjmenovaných výše je buď relevantní pouze třetí vliv, tedy změna velikosti slapové a odstředivé síly (projevují se pouze na C_{20} a C_{22}), anebo se první a druhý vliv vyruší.

Změna H má následující vlivy:

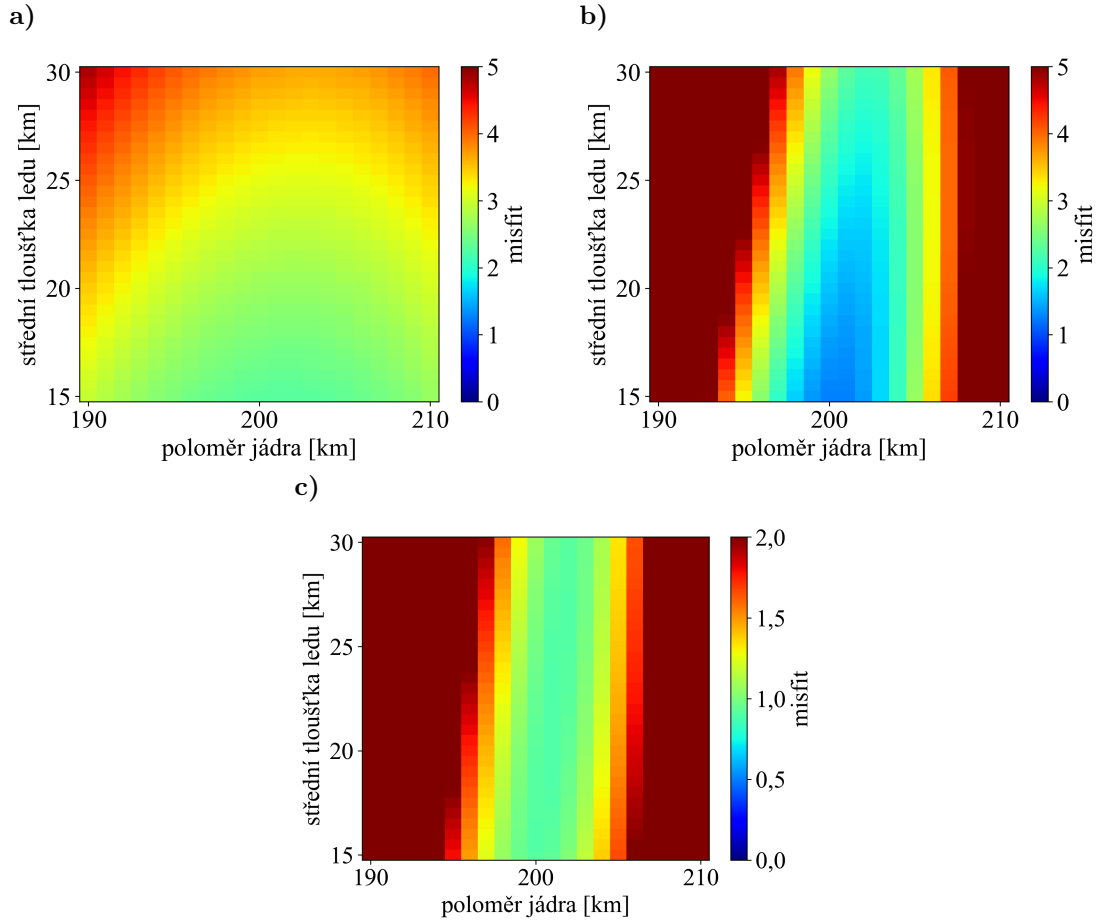
1. Mění se vzdálenost rozhraní led–voda a povrchu, respektive led–voda a voda–jádro, což mění, jak moc na sebe mají rozhraní gravitační vliv (viz bod

jedna výše). Celková problematika je však příliš složitá, na odhad jaký bude důsledek na výsledné kompenzační koeficienty. Uvedme pro odhad možného vlivu alespoň rozsah faktoru $\frac{a-H}{a}$: 0,94– 0,88. Připomeňme, že tento faktor se v gravitačním působení mocní, viz bod jedna výše.

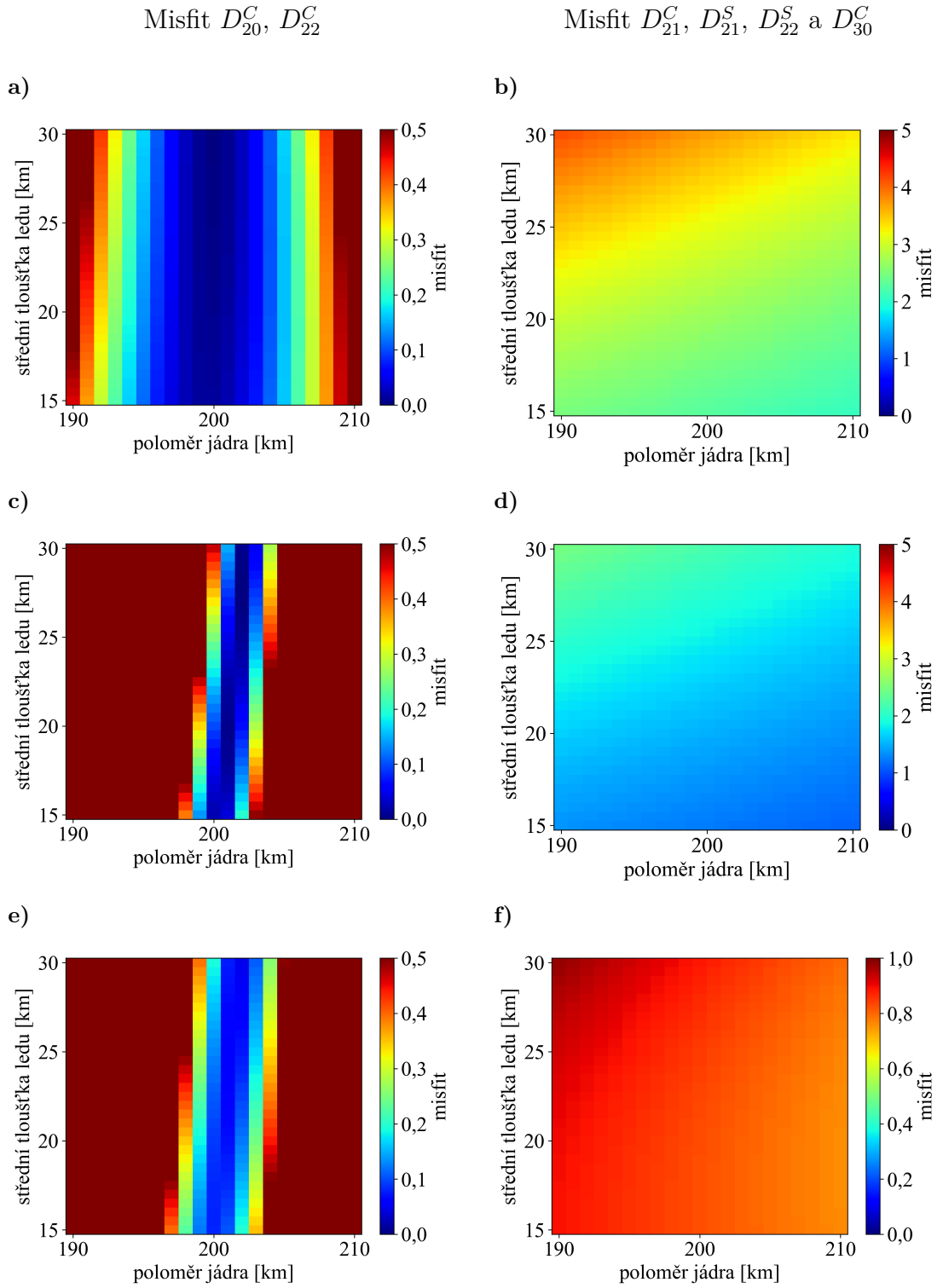
2. Hustota jádra se mění s H (podobně jako v bodě 2 výše). Vzhledem k malému rozdílu hustoty vody a ledu je tento efekt zanedbatelný v porovnání s ostatními.
3. Velikost slapové a odstředivé síly se mění a to má vliv na geoid na rozhraní voda-led na koeficientech C_{20} a C_{22} , a tudíž i na topografii a kompenzační koeficienty.

Při pohledu na pravý sloupec obrázku 4.3 vidíme, že většina koeficientů se při změně H mění. Všechny kompenzační koeficienty s H rostou s výjimkou C_{22} , který naopak klesá. Na uvažovaném rozsahu $H = 15\text{--}30$ km je změna koeficientů výrazně menší než změna D_{20}^C a D_{22}^C při změnách R_C . Změna H má za důsledek posunutí optimálního (ve smyslu minimalizace misfitu) R_C (v důsledku posunutí C_{20} a C_{22}) a malou změnu ostatních čtyř koeficientů.

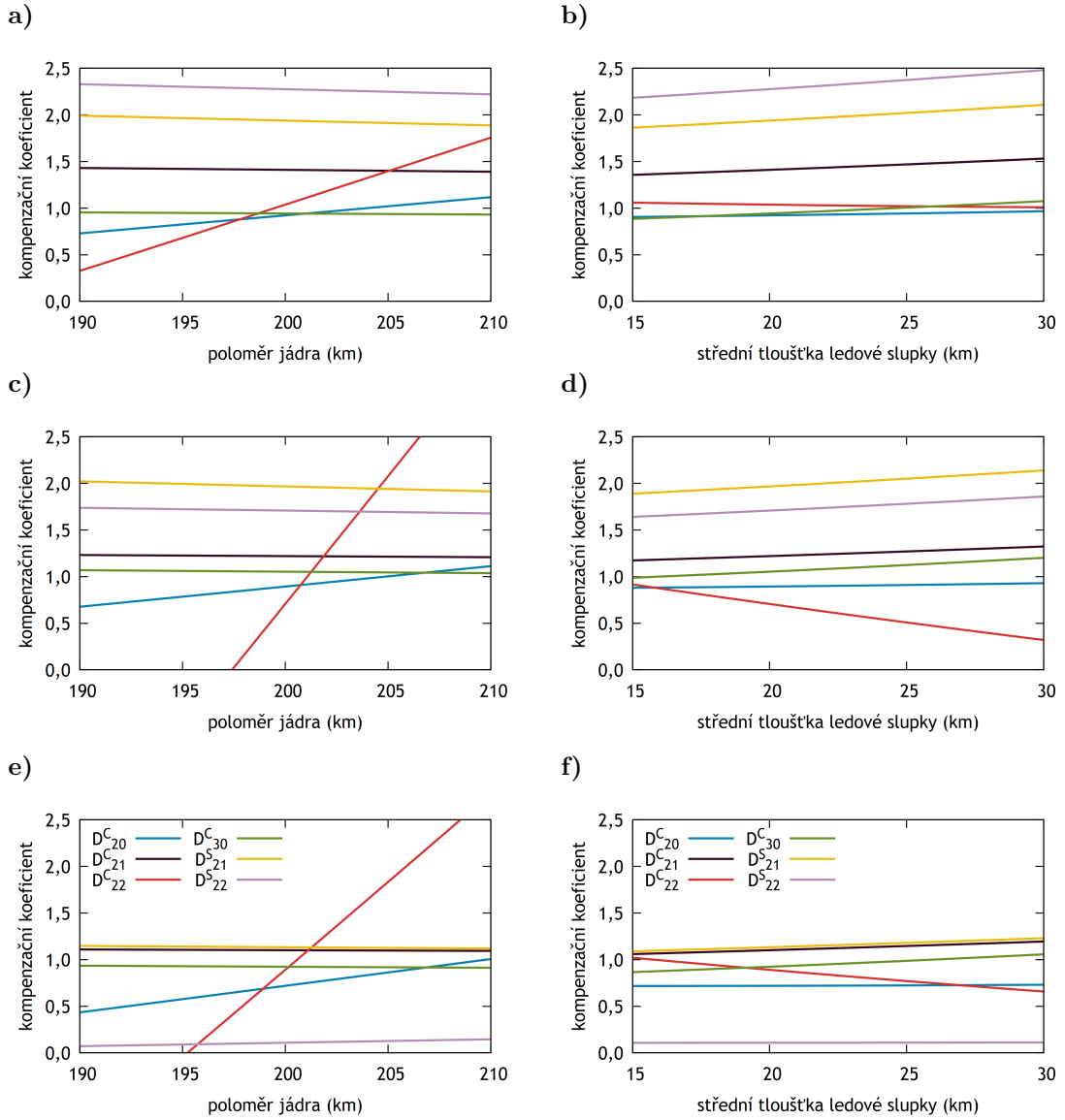
Dále se věnujme hodnotám kompenzačních koeficientů, nikoliv pouze tomu, jak se mění s parametry. Na obrázku 4.2 vidíme, že pro všechny sady jsme schopni dosáhnout $D_{20}^C = 1$, respektive $D_{22}^C = 1$ vhodnou volnou R_C a H , ale ne oboje zároveň a musíme se tak spokojit s minimalizací misfitu. Pro sadu Tajeddine–Iess je minimální misfit zohledňující tyto dva koeficienty nejmenší, péro sadu Park–Park největší, viz obrázek 4.2 vlevo. Koeficient D_{30}^C je pro všechny datové sady blízko jedné pro uvažovaný rozsah parametrů a pomalu se mění s H . Zbylé tři koeficienty jsou pro datové sady Tajeddine–Iess a Schenk–Iess příliš vysoké a pomalu stoupají s rostoucím H . Pro sadu Park–Park je koeficient D_{22}^S blízko nule a zbylé dva blízko jedné.



Obrázek 4.1 Misfit $S = \sum (D_{jm} - 1)^2$ v závislosti na H a R_C . Misfit zahrnující koeficienty stupně dva a D_{30}^C . Povšimněte si různých rozsahů barevné škály. a) datová sada Tajeddine–Iess, b) datová sada Schenk–Iess, c) datová sada Park–Park.



Obrázek 4.2 Částečný misfit $S = \sum (D_{jm} - 1)^2$ z závislosti na R_C a H , pro koeficienty C_{20} a C_{22} (vlevo) a pro koeficienty C_{21} , C_{30} , S_{21} a S_{22} (vpravo). a)-b) datová sada Tajeddine–Iess, c)-d) datová sada Schenk–Iess, e)-f) datová sada Park–Park.



Obrázek 4.3 Kompenzační koeficienty v závislosti na poloměru R_C při konstantním $H = 22,5$ km (vlevo), respektive v závislosti na H při konstantním $R_C = 200$ km (vpravo). a)-b) datová sada Tajeddine–Iess, c)-d) datová sada Schenk–Iess, e)-f) datová sada Park–Park.

4.2 Výsledky inverze gravitačních dat pro fixní H a R_C

Z výsledků předchozí sekce vyplývá pro každou datovou sadu určitý rozsah parametrů H a R_C , pro které náš model predikuje dobrou izostatickou rovnováhu ledové slupky. Konkrétní číselný rozsah závisí na tom, jak blízko požadujeme kompenzační koeficienty blízké jedné a které kompenzační koeficienty uvažujeme s jakou váhou, pro hlubší diskuzi viz sekci 5.1. Zvolili jsme hodnoty parametrů $R_C = 200$ km a $H = 20$ km, které sice nejsou zcela optimální pro minimalizaci misfitu pro všechny sady, ale misfit je stále relativně malý a stejná volba parametrů umožňuje dobré srovnání datových sad mezi sebou. Výsledky inverze jsou k

nahlédnutí v tabulkách 4.1, 4.2 a 4.3 a zobrazené na obrázcích 4.4 a 4.5.

Zaměříme se nejdříve na tvar rozhraní led–voda. Ten je dominovaný koeficienty $C_{20}^{I/W}$ a $C_{30}^{I/W}$, což je zásadní rozdíl oproti tvaru povrchu Enceladu, jelikož koeficient $C_{22}^{I/W}$ není významný. Koeficienty $C_{21}^{I/W}$, $S_{21}^{I/W}$ a $S_{22}^{I/W}$ jsou větší ve srovnání s povrchem. Velký koeficient $C_{30}^{I/W}$ vytváří ztenčení ledu na jižním pólu (obrázek 4.4). Za povšimnutí dále stojí koeficient $S_{21}^{I/W}$ v sadě Park–Park, který je neobvykle velký, dokonce větší než $C_{20}^{I/W}$.

Tvar jádra je dominován koeficienty C_{20}^C a C_{22}^C a to více než povrch, což je dobře vidět na obrázku 4.5. Důvodem je, že obě zbylá hustotní rozhraní jsou daleko a zároveň se jejich gravitační působení vzájemně kompenzuje a na tvar jádra má tak největší vliv odstředivý a slapový potenciál. Ostatní koeficienty jsou velmi malé. Jediná výjimka je koeficient S_{22}^C v sadě Park–Park s hodnotou 201,5 m, což je ale stále o řád méně než koeficienty C_{20}^C a C_{22}^C .

Na vnější gravitační pole má největší vliv tvar povrchu, viz spodní části tabulek 4.1, 4.2 a 4.3). Jádro působí prakticky jenom na koeficienty C_{20}^G a C_{22}^G . Rozhraní voda–led má nejmenší gravitační vliv, což je nepřekvapivé vzhledem k nízké hodnotě hustotního skoku ($\Delta\rho_{I/W} = 84 \text{ kg m}^{-3}$). Hraje ale zásadní roli při inverzi gravitačních koeficientů jiných než C_{20}^G a C_{22}^G , protože tvar povrchu je v našem modelu daný a tvar jádra je na těchto koeficientech minimální.

O Enceladu je známo, že jeho jižní pól je velmi aktivní oblastí, kde byly pozorovány gejzíry kapalné vody (Porco et al., 2006; Yin a Pappalardo, 2015), což je konzistentní s ledovou slupkou výrazně zeslabenou okolo jižního pólu v našich výsledcích (viz obrázek 4.4). Dle našeho modelu se ledová slupka na jižním pólu ztenčuje na 5,2 km podle datové sady Tajeddine–Iess, 2,7 km dle sady Schenk–Iess a 7,7 km dle sady Park–Park. Je však důležité upozornit, že tyto hodnoty samozřejmě záleží na volbě H , kterou jsme pro tento výpočet zvolili $H = 20 \text{ km}$, ale může být samozřejmě jiná. Tloušťka ledové slupky v nejsilnějším bodě se u všech modelů pohybuje okolo 30 km. Pro hlubší diskuzi tloušťky ledu na jižním pólu, v kombinaci s výsledky simulace librace, viz 5.5.

koef.	K_{jm}^S	$K_{jm}^{I/W}$	K_{jm}^C	$K_{jm}^{H,S}$	$K_{jm}^{H,I/W}$
C_{20}	-5564,2	10280,0	-3107,2	-4294,2	-3717,1
C_{21}	23,5	-485,5	-7,0	-4,6	-8,3
C_{22}	3329,1	-569,9	2254,1	3070,2	2702,3
C_{30}	563,3	-5825,7	-5,4	40,7	-5,8
S_{21}	-22,6	1008,8	22,2	19,7	26,3
S_{22}	12,1	-999,3	-25,5	-22,4	-29,3

koef.	K_{jm}^G	$K_{jm}^{G,S}$	$K_{jm}^{G,I/W}$	$K_{jm}^{G,C}$
C_{20}	-250,7	-213,7	27,3	-64,2
C_{21}	-0,5	0,9	-1,3	-0,1
C_{22}	175,1	129,2	-1,4	47,3
C_{30}	4,5	15,1	-10,5	-0,1
S_{21}	2,2	-0,9	2,7	0,5
S_{22}	-2,6	0,5	-2,5	-0,5

Tabulka 4.1 Výsledky zjednodušené nelinearizované inverze pro datovou sadu Tajeddine–Iess, $R_C = 200$ km, $H = 20$ km. V horní tabulce: tvar tří rozhraní, geoid rozhraní vakuum–led a led–voda, ve spodní tabulce: pozorovaný gravitační potenciál, potenciál generovaný jednotlivými rozhraními. Jednotky první tabulky jsou metry, jednotka druhé tabulky je $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$.

koef.	K_{jm}^S	$K_{jm}^{I/W}$	K_{jm}^C	$K_{jm}^{H,S}$	$K_{jm}^{H,I/W}$
C_{20}	-5436,4	8375,9	-3125,7	-4294,2	-3739,5
C_{21}	89,7	-1396,7	-13,7	-4,6	-15,8
C_{22}	3138,8	2170,7	2278,2	3070,6	2727,7
C_{30}	886,3	-10604,6	-31,1	40,7	-39,7
S_{21}	-21,4	998,5	22,3	19,8	26,1
S_{22}	47,0	-1497,9	-29,7	-22,5	-33,8

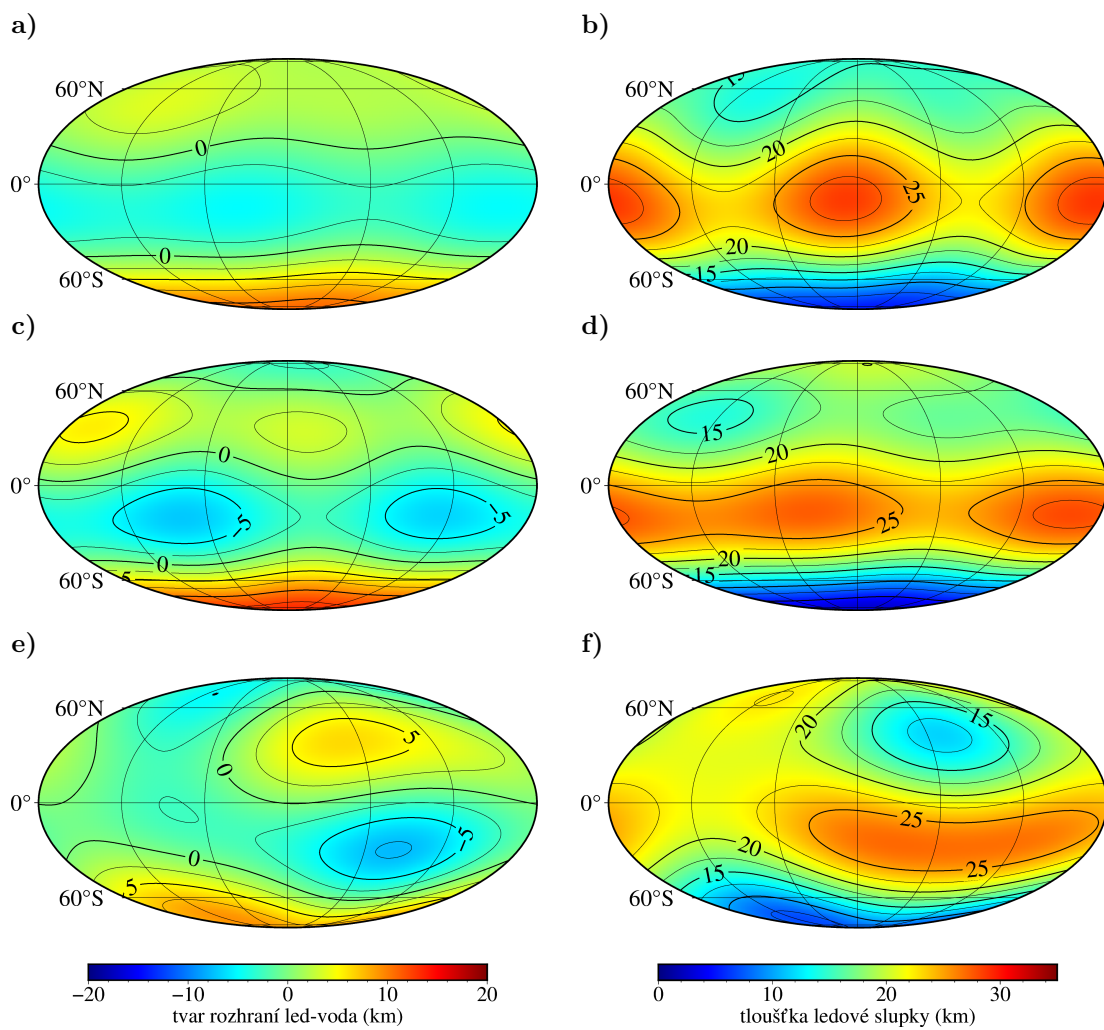
koef.	K_{jm}^G	$K_{jm}^{G,S}$	$K_{jm}^{G,I/W}$	$K_{jm}^{G,C}$
C_{20}	-250,7	-208,8	22,8	-64,6
C_{21}	-0,5	3,5	-3,7	-0,3
C_{22}	175,1	121,9	5,4	47,8
C_{30}	4,5	23,7	-18,8	-0,4
S_{21}	2,2	-0,8	2,6	0,5
S_{22}	-2,6	1,8	-3,8	-0,6

Tabulka 4.2 Jako tabulka 4.1 ale pro datovou sadu Schenk–Iess.

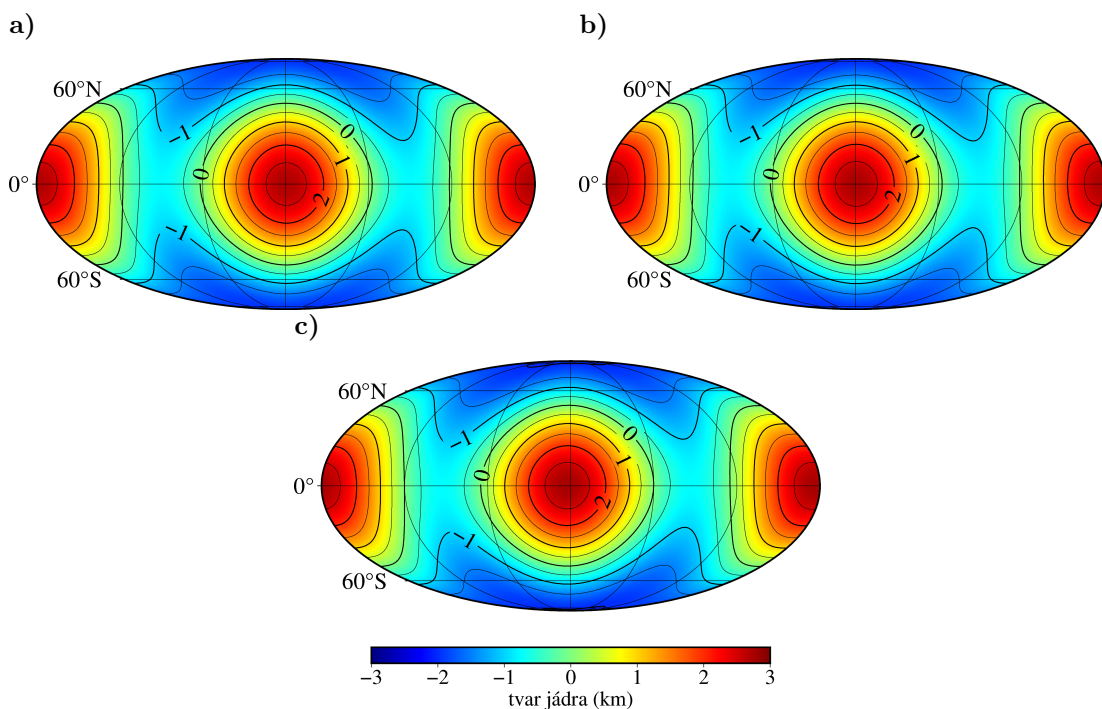
koef.	K_{jm}^S	$K_{jm}^{I/W}$	K_{jm}^C	$K_{jm}^{H,S}$	$K_{jm}^{H,I/W}$
C_{20}	-5250,5	3882,6	-3198,4	-4353,1	-3823,1
C_{21}	-162,0	2113,5	13,2	-4,0	14,7
C_{22}	3166,4	1691,5	2272,8	3067,4	2721,6
C_{30}	785,0	-7985,1	-7,5	64,2	-6,4
S_{21}	406,9	-5556,9	-40,3	4,3	-44,2
S_{22}	731,2	-333,0	204,2	278,7	244,1

koef.	K_{jm}^G	$K_{jm}^{G,S}$	$K_{jm}^{G,I/W}$	$K_{jm}^{G,C}$
C_{20}	-257,4	-201,8	10,5	-66,1
C_{21}	-0,5	-6,2	5,5	0,3
C_{22}	174,7	122,9	4,1	47,7
C_{30}	7,2	21,0	-13,8	-0,1
S_{21}	0,4	15,5	-14,3	-0,8
S_{22}	31,7	28,4	-1,0	4,3

Tabulka 4.3 Jako tabulka 4.1 ale pro datovou sadu Park–Park.



Obrázek 4.4 Vlevo tvar rozhraní voda-led, vpravo tloušťka ledu, stupeň 2 a C_{30} . a)-b) datová sada Tajeddine-Iess, c)-d) datová sada Schenk-Iess, e)-f) datová sada Park-Park.



Obrázek 4.5 Tvar rozhraní voda–jádro, stupeň 2 a C_{30} . a) datová sada Tajeddine–Iess, b) datová sada Schenk–Iess, c) datová sada Park–Park.

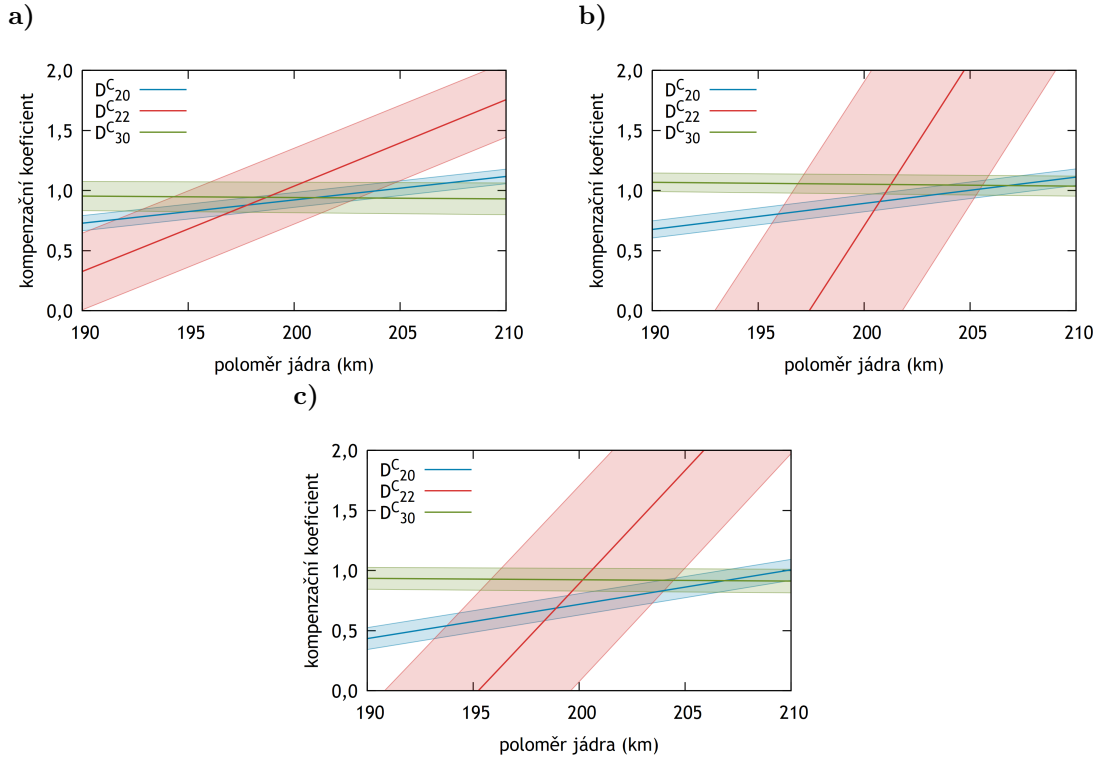
4.3 Vliv topografie jádra na výsledky inverze gravitačních dat

V tabulce 4.4 jsem spočítali všech šest uvažovaných kompenzačních koeficientů pro fixní R_C a H a možnou chybu způsobenou koeficientem topografie jádra $K_{jm}^{T,C} = \pm 100$ m. Na obrázku 4.6 pak uvádíme závislost kompenzačních koeficientů na poloměru jádra s chybou způsobenou topografickými koeficienty stejné velikosti. Vidíme, že i tato relativně malá topografie (ve srovnání s tvarem jádra) má zásadní vliv na výsledný kompenzační koeficient, s výjimkou D_{20}^C a D_{30}^C , kde je efekt malý, viz tabulka 4.4.

Protože topografii na jádře nemůžeme vyloučit, docházíme k závěru, že její existence může mít zásadní vliv na výsledky naší inverze, ale i jakékoliv jiné inverze gravitačních dat. Nejzásadnějším výsledkem je velká chyba koeficientu D_{22}^C v důsledku možné topografie. Tento koeficient byl nejcitlivější na změnu R_C a používáme ho tak k určení tohoto parametru. Vzhledem k chybě v důsledku možné topografie je však takový odhad zatížen velkou nejistotou, viz obrázek 4.6. Podrobnější diskuze vlivu topografie jádra na R_C určené inverzí gravitačních dat viz 5.4.

koef.	Taj-Iess	Schenk-Iess	Park-Park
D_{20}^C	0.92 ± 0.06	0.89 ± 0.07	0.72 ± 0.09
D_{21}^C	1 ± 3	1.2 ± 0.9	1.1 ± 0.5
D_{22}^C	1.0 ± 0.3	0.7 ± 1	0.9 ± 0.8
D_{30}^C	0.9 ± 0.1	1.05 ± 0.08	0.92 ± 0.09
D_{21}^S	2 ± 2	2 ± 2	1.1 ± 0.2
D_{22}^S	2 ± 2	2 ± 1	0.1 ± 0.2

Tabulka 4.4 Změna kompenzačních koeficientů v důsledku topografie jádra, hodnota pro $K_{jm}^{T,C} = 0 \text{ m} \pm$ rozsah pro $K_{jm}^{T,C} = \pm 100 \text{ m}$. $H = 20 \text{ km}$, $R_C = 200 \text{ km}$.



Obrázek 4.6 Změna kompenzačních koeficientů v důsledku topografie jádra. Plné čáry stejné jako na obrázku 4.3 vlevo, barevný pruh značí rozsah $K_{jm}^{T,C} = -100 \text{ m}$ až 100 m . Kompenzační koeficienty v závislosti na poloměru jádra, $H = 20 \text{ km}$. a)–b) datová sada Tajeddine–Iess, c)–d) datová sada Schenk–Iess, e)–f) datová sada Park–Park.

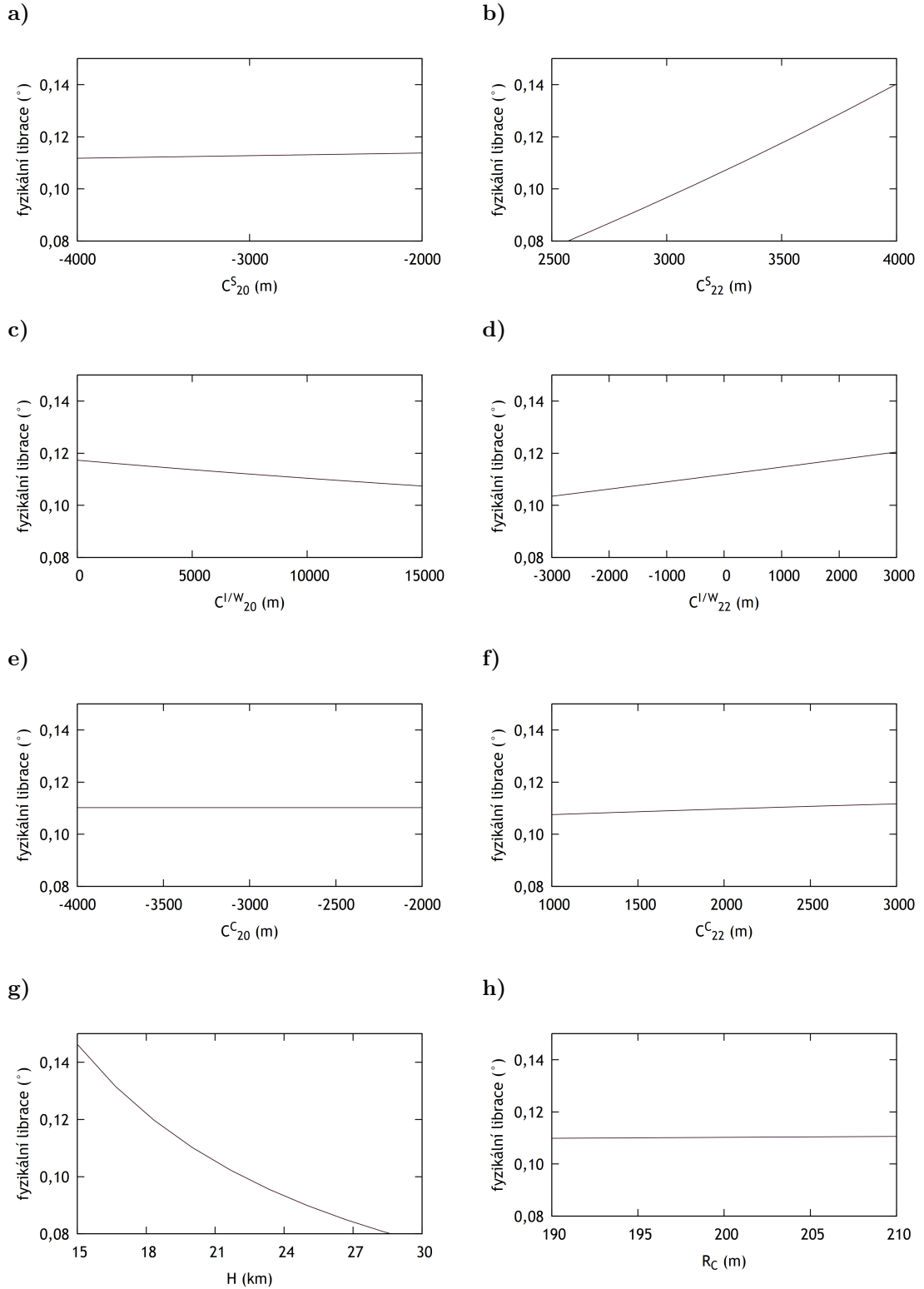
4.4 Librace

Nejdříve zjistíme citlivost fyzikální librace na jednotlivé parametry. Na grafech na obrázku 4.7 ukazujeme postupně hodnotu fyzikální librace spočítanou naším programem v závislosti na všech parametrech (s výjimkou hustot). Vidíme, že program je nejcitlivější na C_{22}^S a H , což je nepřekvapivé, první z parametrů určuje velkou část momentu síly působícího na ledovou slupku a druhý její moment setrvačnosti. Závislost na R_C a C_{20}^C a C_{22}^C je slabší. Fyzikální librace se s $C_{20}^{I/W}$ a $C_{22}^{I/W}$ mění jenom pomalu. Vzhledem k tomu, jak málo je fyzikální librace citlivá na tvar jádra a tvar rozhraní voda–led, tak docházíme k závěru, že předpoklad

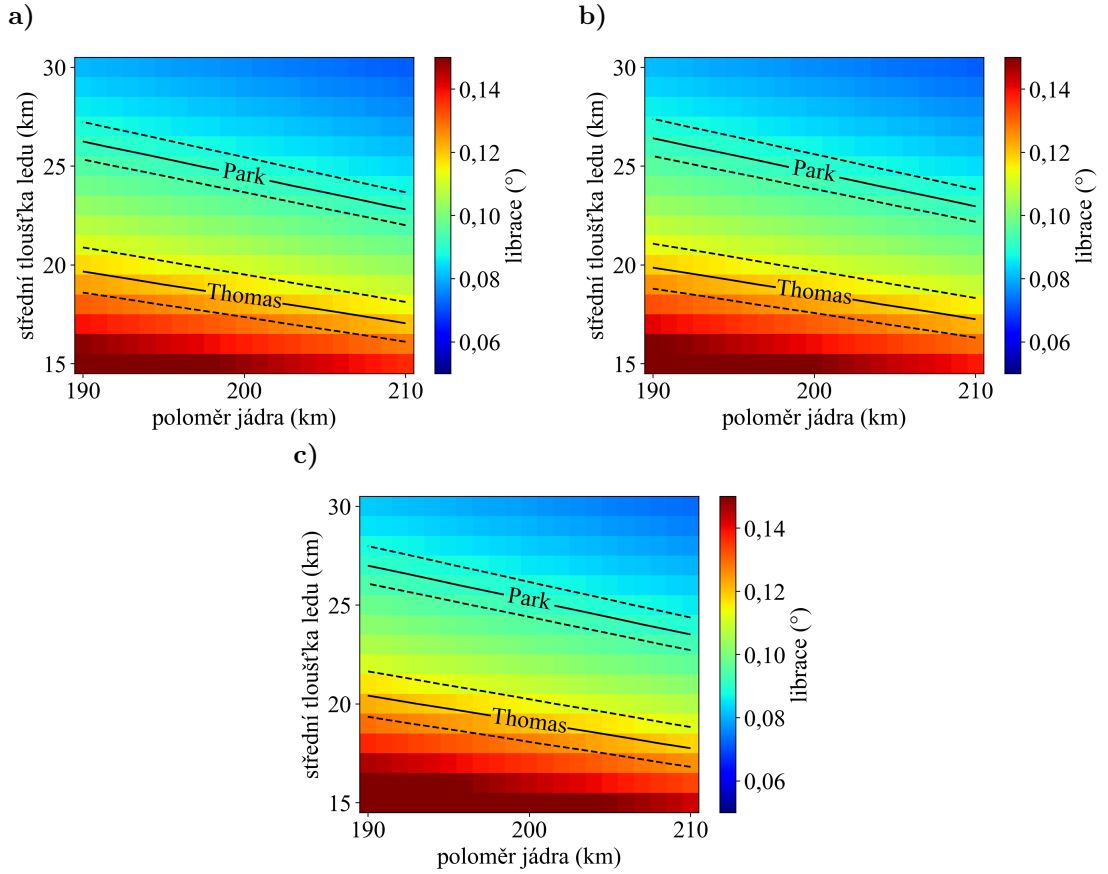
hydrostatického jádra je pro ni postačující a topografie jádra nemá zásadní dopad na výsledky jako u inverze gravitačních dat, viz předchozí sekce.

Na grafu 4.8 pak vykreslujeme hodnotu fyzikální librace jako funkci R_C a H a zakreslujeme oblasti, které odpovídají libraci spočítané v Thomas et al. (2016) a Park et al. (2024). Vidíme, že mezi libracemi v různých datových sadách není znatelný rozdíl. To je důsledek toho, že datové sady se významně liší jenom v $C_{20}^{I/W}$, $C_{22}^{I/W}$ a na ty je librace méně citlivá než na ostatní parametry.

Naměřená librace omezuje především parametr H , ale závisí i na R_C . Librace odvozená v Thomas et al. (2016) omezuje H na 17–20 km (v závislosti na R_C) a ta odvozená v Park et al. (2024) na 23–27 km (v závislosti na R_C).



Obrázek 4.7 Fyzikální librace v závislosti na jednotlivých parametrech, všechny parametry až na jeden jsou vždy fixní. Pokud není parametr na x-ové ose, tak jsou jejich hodnoty $R_C = 200 \text{ km}$, $H = 20 \text{ km}$, tvar povrchu z Tajeddine et al. (2017) a tvar rozhraní voda–led a jádra z výsledků naší inverze (tabulka 4.1).



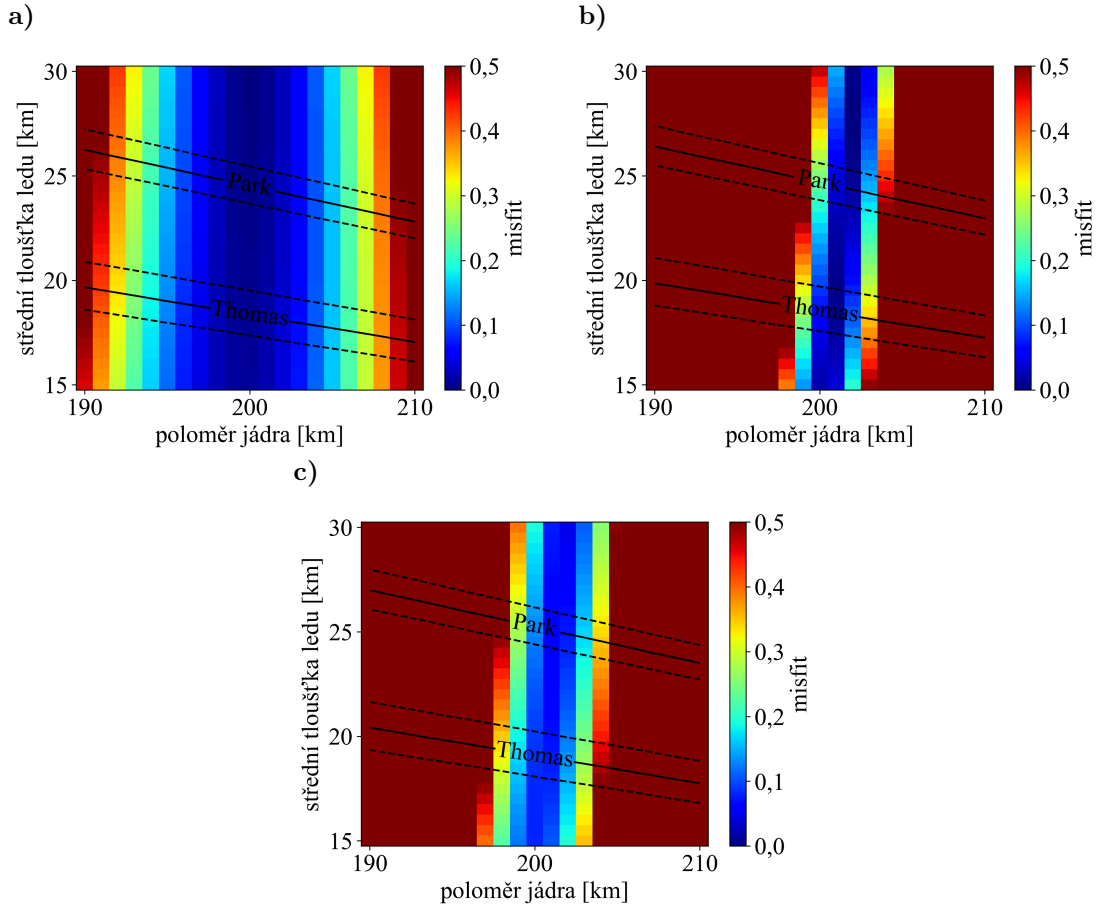
Obrázek 4.8 Fyzikální librace jako funkce R_C a H , plné čáry označují libraci Enceladu podle Thomas et al. (2016) a podle Park et al. (2024), čárkované čáry označují chyby těchto měření. Každý pixel představuje kombinaci R_C a H pro kterou jsme spočítali inverzi gravitačních dat a simulovali fyzikální libraci s odpovídajícími R_C , H , tvarem povrchu z datové sady a tvarem rozhraní voda–led a voda–jádro z inverze gravitačních dat.

5 Diskuze

5.1 R_C a H

V sekci 4.4 jsme ukázali, že měření fyzikální librace určuje H s přesností na několik kilometrů. Zkombinujeme toto s výsledky inverze gravitačních dat, která je naopak citlivější na změny R_C . Na obrázku 5.1 vidíme výsledky z inverze gravitačních dat překryté těmi ze simulace fyzikální librace. Kombinace obou výsledků omezuje parametry R_C a H na relativně malé rozsahy. Pokud uvažujeme hodnotu librace ze starší publikace Thomas et al. (2016), tak naše datové sady dávají odhad $H = 17\text{--}20$ km (všechny sady) a $R_C = 198\text{--}201$ km (sada Tajeddine–Iess), $R_C = 200\text{--}201$ km (sada Schenk–Iess), respektive $R_C = 200\text{--}202$ km (sada Park–Park). Pokud uvažujeme hodnotu librace z Park et al. (2024) dává $R_C = 198\text{--}201$ km a $H = 24\text{--}27$ km (sada Tajeddine–Iess), $R_C = 201\text{--}202$ km a $H = 24\text{--}26$ km (sada Schenk–Iess) a $R_C = 200\text{--}202$ km a $H = 24\text{--}27$ (sada Park–Park).

Je důležité upozornit, že výsledky obrácené úlohy jsou zatíženy významnou nejistotou v důsledku chyby gravitačních i tvarových dat (viz sekce 5.3) a neznámé topografie (viz sekce 5.4). Výsledné odhady R_C uvedené výše je tak potřeba vnímat jako nepřesné. Vzhledem k této nejistotě, lze zanedbat rozdíly mezi datovými sadami a uvádět oblast cca $R_C = 198\text{--}201$ km a $H = 17\text{--}20$ km na základě měření fyzikální librace z Thomas et al. (2016) a $R_C = 198\text{--}202$ km a $H = 24\text{--}27$ km na základě měření z Park et al. (2024).



Obrázek 5.1 Grafy z obrázku 4.2 vlevo překryté čarami z obrázku 4.8. Barevná mapa zobrazuje misfit zohledňující koeficienty D_{20}^C a D_{22}^C , čáry ukazují oblast parametrů R_C a H , kde naše simulace predikuje stejnou libraci jako pozorovaná (používáme hodnoty librace z Thomas et al. (2016) a Park et al. (2024)), přerušované čáry ukazují chybu měření librace.

5.2 Přesnost výpočtů

5.2.1 Porovnání linearizované a nelinearizované metody výpočtu potenciálu hustotního rozhraní

Zde srovnáme dvě metody výpočtu gravitačního potenciálu, viz sekce 1.3. Přesnější, nelinearizovanou metodu používáme obecně pro všechny výpočty, s výjimkou výpočtu gravitačního potenciálu rozhraní voda–jádro na jeho vlastním poloměru pro účely výpočtu geoidu. V tomto případě volíme méně přesnou variantu z důvodů numerické náročnosti, viz sekce 3.2 a 3.3.

Pro výsledky naší inverze a datovou sadu Schenk-Iess (viz tabulka 4.2) jsme oběma způsoby spočítali gravitační potenciál všech třech hustotních rozhraní na jejich vlastním poloměru i na poloměrech ostatních rozhraní, výsledky je možné vidět v tabulce 5.1. Zdůrazněme, že v obou případech používáme stejné tvarové koeficienty, pouze aplikujeme jiné rovnice (rovnice 1.3 respektive 1.5 pro vnější potenciál a ekvivalentní pro vnitřní). Chyba linearizace nepřekročila 7 % a ve většině případů je nižší. Inverze gravitačních dat je však relativně citlivá

(tato velikost chyby může mít za důsledek například změnu koeficientu $C_{20}^{I/W}$ o 1000 m). Proto považujeme za oprávněné používat přesnou, nelinearizovanou metodu výpočtu gravitačního potenciálu hustotního rozhraní, přestože zvyšuje numerickou náročnost a neumožňuje analytickou inverzi gravitačních dat.

Pro nás jsou specificky zajímavé poslední tři sloupčky spodní tabulky, jelikož jde o jedinou situaci, kdy používáme nepřesnou metodu. Ze všech koeficientů jsou relevantní prakticky pouze C_{20} a C_{22} , protože na ostatních koeficientech je gravitační potenciál jádra zanedbatelný. Na těchto dvou koeficientech je chyba okolo 1 %, což můžeme zanedbat ve srovnání s chybami v důsledku nejistoty vstupních dat anebo s chybou vzniklou z neznámé topografie jádra, viz sekce 5.3 a 5.4.

koef.	$S \rightarrow S$			$S \rightarrow I/W$			$S \rightarrow C$		
	lin	non-lin	roz. (%)	lin	non-lin	roz. (%)	lin	non-lin	roz. (%)
C_{20}	-180	-181	0,2	-134	-134	0,2	-212	-209	-1,9
C_{21}	2,98	2,98	0,1	2,21	2,21	0,1	3,51	3,45	-1,6
C_{22}	104	104	-0,3	77,4	77,1	-0,3	123	122	-0,8
C_{30}	19,3	19,6	1,3	12,4	12,5	1,3	24,8	23,7	-4,2
S_{21}	-0,710	-0,715	0,6	-0,528	-0,531	0,6	-0,838	-0,817	-2,5
S_{22}	1,56	1,56	-0,3	1,16	1,16	-0,3	1,84	1,83	-0,8

koef.	$I/W \rightarrow S$			$I/W \rightarrow I/W$			$I/W \rightarrow C$		
	lin	non-lin	roz. (%)	lin	non-lin	roz. (%)	lin	non-lin	roz. (%)
C_{20}	21,4	22,8	6,6	27,4	26,6	-3,0	20,3	20,0	-1,5
C_{21}	-3,56	-3,69	3,5	-4,57	-4,47	-2,2	-3,39	-3,36	-0,8
C_{22}	5,54	5,42	-2,1	7,10	6,82	-3,8	5,27	5,30	0,6
C_{30}	-17,8	-18,8	5,9	-24,8	-23,7	-4,2	-15,9	-15,5	-2,0
S_{21}	2,55	2,61	2,4	3,26	3,18	-2,5	2,43	2,41	-0,5
S_{22}	-3,82	-3,76	-1,7	-4,90	-4,71	-3,8	-3,64	-3,66	0,5

koef.	$C \rightarrow S$			$C \rightarrow I/W$			$C \rightarrow C$		
	lin	non-lin	roz. (%)	lin	non-lin	roz. (%)	lin	non-lin	roz. (%)
C_{20}	-64,9	-64,6	-0,4	-83,2	-82,8	-0,4	-130	-128	-1,3
C_{21}	-0,284	-0,284	-0,1	-0,364	-0,364	-0,1	-0,569	-0,562	-1,2
C_{22}	47,3	47,8	1,0	60,6	61,2	1,0	94,7	94,1	-0,7
C_{30}	-0,366	-0,358	-2,3	-0,510	-0,498	-2,3	-0,924	-0,894	-3,2
S_{21}	0,464	0,456	-1,8	0,595	0,584	-1,8	0,929	0,910	-2,0
S_{22}	-0,617	-0,623	1,0	-0,791	-0,799	1,0	-1,23	-1,23	-0,7

Tabulka 5.1 Srovnání sférických koeficientů gravitačního potenciálu rozhraní získaných lineárním, nebo nelineárním výpočtem. Značení $A \rightarrow B$ má na mysli gravitační potenciál rozhraní A na středním poloměru rozhraní B . Jednotky jsou $\text{m}^2 \text{s}^{-2}$. Vypočítáno pro $R = 200 \text{ km}$, $H = 20 \text{ km}$, datovou sadu Schen-Iess a výsledky naší inverze, viz sekce 4.2.

5.2.2 Srovnání zjednodušené a přesné metody určení geoidu

Zde srovnáváme dvě metody hledání geoidu: zjednodušenou, linearizovanou metodu ($K_{jm}^h = K_{jm}^V/g$) a nezjednodušenou, přesnější metodu (explicitní hledání ekvipotenciální plochy, viz sekce 3.4). První, zjednodušenou metodu používáme pro výpočet geoidu rozhraní voda–jádro. Druhou, přesnější metodu, používáme pro výpočet rozhraní vakuum–led a led–voda. Konkrétně zkoumejme geoid vzniklý působením rozhraní samo na sebe, protože zde se nejvíce projeví linearizace.

Pro výsledky zjednodušené nelinearizované inverze pro fixní R_C a H a datovou sadu Schenk-Iess (viz sekci 4.2 a tabulka 4.2) jsme spočítali geoid nepřesnou (linearizovanou) metodou a přesnou (nelinearizovanou) metodou. Pro výpočet geoidu jsme uvažovali pouze jedno rozhraní (pro geoid na rozhraní vakuum–led pouze rozhraní vakuum–led atd.), tedy geoid vzniklý působením rozhraní samo na sebe. Zdůrazňeme, že dosazujeme stejné tvarové koeficienty, ale používáme jiné metody hledání geoidu. V tabulce 5.2 vidíme, že rozdíl mezi výpočty je minimální pro rozhraní vakuum–led a led–voda. Pro rozhraní voda–jádro (kde používáme nepřesnou, lineární metodu) se výpočty liší maximálně o 3 % a typicky o 1%. Jak jsme ukázali v sekci 4.3, tak i malá změna ve tvaru jádra může mít velký efekt na výsledné kompenzační koeficienty, zkusme tedy odhadnout jak velký může toto mít efekt na výsledné kompenzační koeficienty. Na tvar jádra je nejcitlivější koeficient D_{22}^C , viz sekce 4.3, proto dále uvažujeme ten. Mezi výpočty je rozdíl cca 7 m (viz tabulka 5.2), což odpovídá změně kompenzačního koeficientu D_{22}^C o $\pm 0,05$. To je relativně nevýznamné ve srovnání s možnou chybou D_{22}^C v důsledku chyby gravitačních dat a neznámé topografie jádra, jak ukazujeme dále, viz sekce 5.3 a 2.4.

Může se zdát nelogické, že používáme přesnou metodu na rozhraních voda–led a vakuum–led, ale ne na rozhraní voda–jádro, kde jsou rozdíly největší. Důvodem je numerická náročnost. Geoid na jádře potřebujeme být schopni počítat rychle, protože ho musíme počítat v rámci smyčky, viz sekce 3.2. Geoidy na zbylých dvou rozhraních počítáme až dodatečně a pouze jednou.

koef.	geoid povrchu			geoid voda–led			geoid voda–jádro		
	lin	non-lin	rozdíl (%)	lin	non-lin	rozdíl (%)	lin	non-lin	rozdíl (%)
C_{20}	-1840	-1843	-0,1	227,0	226,9	0,0	-1033	-1020	1
C_{21}	30,43	30,43	0,01	-38,17	-38,17	0,02	-4,525	-4,481	1
C_{22}	1074	1071	0,3	58,33	58,29	0,08	753,1	746,4	0,9
C_{30}	209,2	210,0	-0,4	-202,9	-203,0	-0,03	-7,347	-7,112	3
S_{21}	-7,198	-7,255	-0,8	27,22	27,20	0,07	7,387	7,293	1
S_{22}	16,08	16,05	0,2	-40,28	-40,26	0,05	-9,820	-9,781	0,4

Tabulka 5.2 Srovnání geoidů spočítaných zjednodušenou, linearizovanou metodou a přesnou, nelinearizovanou metodou. Jedná se o geoidu uvažující pouze působení hustotního rozhraní na jejich referenčním poloměru. Datová sada Schenk–Iess, $R_C = 200$ km, $H = 20$ km, tvar vnitřních rozhraní z výsledků naší inverze, viz sekce 4.2. Jednotka je metr.

5.3 Chyba vstupních dat

Publikace ze kterých čerpáme uvádějí chybu gravitačních dat. V tabulce 5.3 prezentujeme vliv chyb gravitačních dat na výsledné kompenzační koeficienty. Chyba kompenzačních koeficientů je relativně malá ve srovnání s jejich hodnotou, s výjimkou koeficientu D_{22}^C , jehož chyba je pro nás významná, vzhledem k tomu, že tento koeficient nám umožňuje určit R_C .

Chybu tvarových dat publikace neuvádějí. Zkusme velikost chyby odhadnout ze srovnání tří zdrojů pro tvarová data, které uvažujeme viz 2.1. Citované publikace uvádějí především pro koeficienty C_{21}^S , S_{21}^S a S_{22}^S výrazně rozdílné hodnoty a můžeme tak očekávat že jsou naměřené s malou přesností. Rozdíl hodnot koeficientu C_{30}^S v publikacích je sice menší než u třech předchozích, ale stále se jeho hodnoty mezi sebou liší o více než 100 metrů (to platí i o topografii na koeficientu C_{30} , viz sekce 2.4). Hodnoty koeficientů C_{20}^S a C_{22}^S jsou mezi publikacemi téměř shodné a můžeme tak očekávat malou chybu měření, ale pro kompenzační koeficienty je významná především topografie ($C_{20}^{T,S}$, $C_{22}^{T,S}$), která se mezi datovými sadami liší významněji, až o 100 % průměru v případě $C_{22}^{T,S}$, viz sekce 2.4. Především pro D_{22}^C lze tak očekávat relativně velkou, ale bohužel neznámou, chybu v důsledku nepřesnosti tvarových dat.

koef.	Taj-Iess	Schenk-Iess	Park-Park
D_{20}^C	$0,92 \pm 0,02$	$0,89 \pm 0,03$	$0,72 \pm 0,04$
D_{21}^C	$1,41 \pm 0,30$	$1,22 \pm 0,10$	$1,10 \pm 0,08$
D_{22}^C	$1,0 \pm 0,1$	$0,7 \pm 0,5$	$0,9 \pm 0,3$
D_{30}^C	$0,94 \pm 0,06$	$1,05 \pm 0,04$	$0,92 \pm 0,07$
D_{21}^S	$1,939 \pm 0,001$	$1,967 \pm 0,002$	$1,133 \pm 0,020$
D_{22}^S	$2,28 \pm 0,21$	$1,71 \pm 0,19$	$0,11 \pm 0,07$

Tabulka 5.3 Kompenzační koeficienty s chybou v důsledku chyby gravitačních dat. $H = 20$ km, $R_C = 200$ km.

5.4 Topografie jádra a její důsledky pro inverzi gravitačních dat

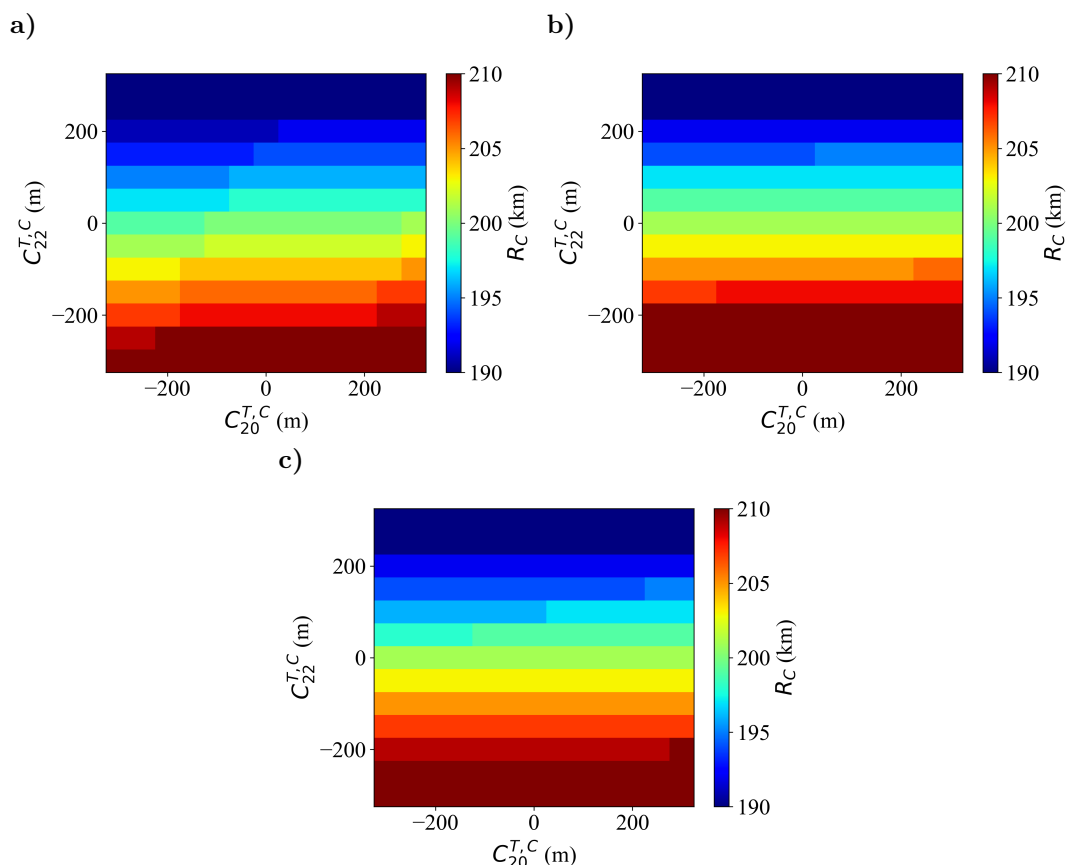
V naší inverzi jsme používali předpoklad hydrostatického jádra, který je často využíván v publikacích řešící podobné obrácené úlohy, viz například Čadek et al. (2019). Prakticky však o jádru Enceladu (potažmo i o jádrech jiných podobných těles) máme minimální informace a tento předpoklad je tak typicky volen jako jediná praktická možnost modelování. Topografii jádra však nemůžeme snadno vyloučit. Ta by mohla být podporována například izostázi, prouděním vody v porézním jádře (Rovira-Navarro et al., 2022), vyvolaná nárazy dalších těles (Monteux et al., 2016) nebo jinými dynamickými procesy. Další z našich předpokladů byl, že jádro je homogenní, nebo že hustotní nehomogenity mají minimální vnější gravitační vliv. Jakékoliv hustotní nehomogenity v jádře mohou mít podobný efekt jako zde diskutovaná topografie.

Topografie jádra má pozorovatelný vliv na vnější gravitační pole. U těles ledového typu je tento vliv významný, jelikož hustotní skok na rozhraní voda/led–

jádro veliký. Jakákoliv inverze gravitačních dat a obrácená úloha, predikující vnější gravitační pole jako působení vnitřních hustotních rozhraní, která využívá předpoklad hydrostatického jádra, tak může být zatížena chybou. Protože hustotní skok na rozhraní voda–led je o více než řád menší než na rozhraní voda–jádra, tak i malá topografie jádra má velký vliv na tvar rozhraní voda–led a tudíž i na kompenzační koeficienty, viz 4.3.

Diskutujme dále dopad topografie jádra na náš odhad R_C . Jak jsme ukázali v sekci 5.1, tak obrácená úloha nám umožňuje omezit parametr R_C na malou oblast okolo $R_C = 200$ km. Na obrázku 5.2 ukazujeme R_C minimalizující misfit (uvažujeme jenom koeficienty D_{20}^C a D_{22}^C stejně jako v sekci 5.1) v závislosti na topografii jádra na koeficientech $C_{20}^{T,C}$ a $C_{22}^{T,C}$. Určení R_C je více citlivé na topografii na koeficientu $C_{22}^{T,C}$, jelikož koeficient D_{22}^C se více mění s R_C . Pokud uvažujeme topografii menší než 100 m, tak například pro sadu Park–Park je rozsah možného R_C 198–204 km. Pokud dovolíme topografické koeficienty v rozsahu ± 250 m (cca 10 % tvaru jádra na těchto koeficientech, viz tabulka 4.1 a následující), tak se může R_C pohybovat v rozsahu 190–210 km, tedy obrácená úloha by nijak nezmenšovala náš původní odhad poloměru jádra.

Vzhledem k těmto výsledkům jsme názoru, že další výzkum jádra a možných zdrojů topografie na něm je důležitý směr dalšího výzkumu a do doby, než budeme o jádře mít bližší informace, je třeba v případě inverze gravitačních dat postupovat opatrně a citlivost na možnou topografii ověřovat. Dále docházíme k závěru, že hodnoty R_C udávané na základě obrácené úlohy v předchozích publikacích jako například Čadek et al. (2019), McKinnon (2015) a Park et al. (2024), mohou být v důsledku neznámé topografie zatíženy značnou chybou.



Obrázek 5.2 Hodnota R_C minimalizující misfit $S = (D_{20}^C - 1)^2 + (D_{22}^C - 1)^2$ v závislosti na koeficientech topografie jádra $C_{20}^{T,C}$ a $C_{22}^{T,C}$ pro $H = 20$ km. Uvažovali jsme R_C v rozsahu 190–210 km a proto se v horní a dolní části grafu hodnota R_C nemění. a) datová sada Tajeddine–Iess, b) Schenk–Iess, c) Park–Park.

5.5 Variace tloušťky ledu

Rozhraní voda–led má velké variace tvaru, na jižním pólu až 15 km od průměru, v nepolárních oblastech až 5 km (viz obrázek 4.4 vlevo). Oproti tvaru povrchu a jádra je významný rozdíl v koeficientu C_{22} , který je pro rozhraní voda–led velmi malý (viz tabulka 4.1 a následující). Tloušťka ledové slupky (viz obrázek 4.4 vpravo) se mezi jižním pólem a rovníkem mění až o 25 km. Tvar ledové slupky bychom očekávali přibližně jako elipsoid prodloužený ve směru osy Enceladus–Saturn. Na ledové slupce pozoruje podobné zesílení ledu, ale vůči této ose vychýlené, především v sadě Schenk–Iess a Park–Iess, nejlépe je to vidět na obrázku 4.4 vpravo. Vychýlení je v jižním směru pro všechny datové sady a v západo-východním směru pro sady Schenk–Iess a Park–Park.

Tato pozice je nestabilní, gravitační pole Saturnu na takovéto vychýlení působí momentem (podobně jako v případě fyzikální librace), který by měl slupku otočit tak, aby místa s přebytkem hmoty směřovali ve směru Saturn–Enceladus. Zda je tato pozice nestabilní a ještě nedošlo k relaxaci, anebo zda existuje nějaká neznámá síla, která by bránila v otočení ledové slupky nevíme. Jeden z kandidátů na takovou sílu je silný mořský proud, který třením působí proti momentu působícím na slupku. Dalším možným vysvětlením je rozložení tepelných zdrojů na jádře, které se často

zmiňuje v kontextu ztenčení ledové slupky na jižním pólu, viz například Lobo et al. (2021). Tato teorie vysvětluje ztenčení ledové slupky na jižním pólu kontinuálním přísunem teplé vody. Stejně tak bychom mohli vysvětlit polohu nejširší části ledu tak, že ledová slupka se sice v čase otáčí ve směru diktovaném tíhovým polem, ale tání a namrzání ledu na rozhraní voda–led udržuje tloušťku ledu takovou, jakou pozorujeme, tedy v nerovnováze. To by znamenalo, že v oblasti cca 0 až 45° jižní šířky se vyskytuje především studená voda (led je zde tlustší). Nabízí se myšlenka velkého tepelného cyklu, kde je voda zahřívána teplým jádrem na jižním pólu, stoupá a taví led na jižním pólu, chladne, pohybuje se severním směrem, namrzá v oblasti jižně od rovníku v místě nejsilnější ledové slupky a následně klesá.

V oblasti jižního pólu byla pozorována významná aktivita například v podobě gejzírů vody (Porco et al., 2006; Yin a Pappalardo, 2015) a proto je důležitá otázka, jak tlustá je ledová slupka v oblasti jižního pólu. Tato hodnota bude v našem případě závislá na datové sadě a hodnotě H . Hodnoty H dále závisí na tom, kterému měření librace věříme (Thomas et al. (2016) nebo Park et al. (2024)), viz sekce 5.1. Šest hodnot (pro kombinace datových sad a librace) nejmenší tloušťky ledu v okolí jižního pólu uvádíme v tabulce 5.4. Vidíme, že nejtenčí je ledová slupka podle datové sady Schenk–Iess a měření librace z Thomas et al. (2016) (méně než 2 km). Pro datovou sadu Park–Park obecně a pro všechny datové sady a měření librace z Park et al. (2024), pak naše obrácená úloha dává výrazně tlustší ledovou slupku okolo jižního pólu. Uvědomme si však, že jsme se omezili pouze na koeficienty stupně dva a C_{30} a koeficienty vyšších stupňů mohou nezanedbatelně přispívat k ztenčení ledu okolo jižního pólu. Aktivní oblast jižního pólu je příliš malá aby ji přesně zachytili dlouhovlnné koeficienty, kterým se věnujeme a zde uváděné hodnoty tloušťky ledu v okolí jižního pólu tak považujeme spíše za odhad.

	sada Taj.–Iess	sada Schenk–Iess	sada Park–Park
librace z Thomas et al. (2016)	4,6	1,8	6,8
librace z Park et al. (2024)	10,4	6,2	12,1

Tabulka 5.4 Nejtenčí bod ledové slupky v okolí jižního pólu pro různé datové sady a měření librace, jednotka je km. Výsledky naší obrácené úlohy pro hodnoty R_C a H určené z minimalizace misfitu a z librace v sekci 5.1.

5.6 Srovnání datových sad

V kapitole 2 jsme z literatury sestavili 3 datové sety, starší Tajeddine–Iess s relativně malými koeficienty jinými než C_{20} a C_{22} , Schenk–Iess s těmito koeficienty většími a Park–Park výrazný především koeficienty S_{22} . Srovnajme nyní výsledky, které jsme pro jednotlivé datasety pozorovali.

Mezi datovými sadami byli drobné rozdíly v určení R_C a H , které nejlépe odpovídají izostázi, ale vzhledem k nepřesnosti tohoto určení, kterou jsme ukázali výše, jsou v tomto ohledu rozdíly mezi datovými sadami zanedbatelné. Hlavní pozorovaný rozdíl mezi datovými sadami tak je rozdílná tloušťka ledu na jižním pólu, kde sada Schenk–Iess dává výrazně tenčí led než původní data z Tajeddine–Iess. Sada Park–Park naopak dává tlustší ledovou slupku v okolí jižního pólu než Tajeddine–Iess. Dalším rozdílem je poloha vydutí ledové slupky, která je v sadě Tajeddine–Iess přibližně ve směru spojnice Saturn–Enceladus, v sadě Schenk–Iess

a především Park–Park pozorujeme výrazné vychýlení vychýlení od této spojnice, implikující nestabilitu ledové slupky.

5.7 Srovnání měření librace

Vycházeli jsme ze dvou měření librace. Starší měření Thomas et al. (2016) a novější Park et al. (2024), které přichází s větší hodnotou librace. Původní měření se shoduje s výsledky naší simulace pro střední tloušťku ledové krusty 17–21 km a Park et al. (2024) pro 23–27 km. Toto má dopad i na tloušťku ledové slupky v okolí jižního pólu, pokud uvažujeme novější hodnotu librace z Park et al. (2024), tak dostáváme výrazně tlustší led na jižním pólu (6–12 km podle datové sady).

Závěr

Řešili jsme obrácenou úlohu pro vnitřní strukturu Enceladu a zjistili jsme, že inverze gravitačních dat s požadavkem Airyho izostáze na sférických koeficientech C_{20} a C_{22} omezuje poloměr jádra R_C . Inverzi jsme aplikovali na starší data z Iess et al. (2014) a Tajeddine et al. (2017) a na novější z Schenk a McKinnon (2024) a Park et al. (2024). Zjistili jsme, že datové sady ukazují na velmi blízké hodnoty R_C (198–202 km) a nové výsledky tak metodou inverze gravitačních dat nepřinášejí zásadně jiné závěry než ukázaly dosavadní studie. Největší rozdíl mezi datovými sadami je stabilita ledové slupky. Dlouhá osa Enceladu neleží ve směru Saturn–Enceladus a to i ve starší sadě Tajeddine–Iess, ale výrazně více pro datové sady Schenk–Iess a Park–Park. Vychýlení je ve všech případech v jižním směru, v případě novějších dat i ve východo–západním směru. Oproti předchozím publikacím (například Čadek et al., 2019; McKinnon, 2015; Park et al., 2024; Thomas et al., 2016) jsme se při formulaci obrácené úlohy nespokojili s předpokladem hydrostatického jádra a ukázali, že i relativně malá topografie jádra (ve srovnání s jeho tvarem) může mít zásadní dopad na inverzi gravitačních dat. Například neznámá topografie o velikosti 250 m (okolo 10 % hydrostatického tvaru) snižuje přesnost určení R_C na cca 190–210 km. Dále jsme ukázali, že i chyba gravitačních a tvarových dat může mít nezanedbatelný dopad na obrácenou úlohu.

Metoda inverze gravitačních dat neposkytuje zúžení odhadu H . Proto jsme dále simulovali fyzikální libraci, která je na parametr H citlivá, a srovnali jsme výsledky s měřením v Thomas et al. (2016) a Park et al. (2024). Kombinací této informace s výsledky gravitační inverze jsme byli schopni určit hodnoty H a R_C : $R_C = 198\text{--}201$ km a $H = 17\text{--}20$ km podle měření fyzikální librace dle Thomas et al. (2016) a $R_C = 198\text{--}202$ km a $H = 24\text{--}27$ km podle Park et al. (2024).

Naše výsledky obrácené úlohy predikují ztenčení ledu v okolí jižního pólu, konzistentní s předchozími publikacemi a pozorováním gejzírů a aktivní oblasti tygřích pruhů. Tloušťka ledu okolo jižního pólu se pohybuje v rozsahu 2–12 km podle toho, z jaké publikace čerpáme gravitační a tvarová data a hodnotu fyzikální librace. Data z nejnovějšího článku Park et al. (2024), který udává všechny tři vyjmenované, predikují tloušťku ledu na jižním pólu okolo 12 km, výrazně více než předchozí odhady okolo 5 km (Čadek et al., 2019; Helfenstein a Porco, 2015). Tloušťka ledu na jižním pólu však bude dále ovlivněna koeficienty vyšších stupňů, kterým jsme se v této práci nevěnovali.

Literatura

- BEUTHE, M.; RIVOLDINI, A. a TRINH, A., 2016. Enceladus's and Dione's floating ice shells supported by minimum stress isostasy. *Geophysical Research Letters*. Roč. 43, č. 19, s. 10088. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/2016GL070650>.
- ČADEK, O.; SOUČEK, O.; BĚHOUNKOVÁ, M.; CHOBLET, G.; TOBIE, G. a HRON, J., 2019. Long-term stability of Enceladus' uneven ice shell. *Icarus*. Roč. 319, s. 476. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.10.003>.
- ČADEK, O.; KALOUSOVÁ, K.; KVORKA, J. a SOTIN, C., 2021. The density structure of Titan's outer ice shell. *Icarus*. Roč. 364, s. 114466. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2021.114466>.
- ČADEK, O.; TOBIE, G.; VAN HOOLST, T.; MASSÉ, M.; CHOBLET, G.; LEFÈVRE, A.; MITRI, G.; BALAND, R.-M.; BĚHOUNKOVÁ, M.; BOURGEOIS, O. a TRINH, A., 2016. Enceladus's internal ocean and ice shell constrained from Cassini gravity, shape, and libration data. *Geophysical Research Letters*. Roč. 43, č. 11, s. 5653. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/2016GL068634>.
- DESHMUKH, G. a PECHT, M., 1990. A modified Powell method for six-degrees-of-freedom platform kinematics. *Computers and Structures*. Roč. 34, č. 3, s. 485. Dostupné z DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(90\)90273-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(90)90273-5).
- GOOSSENS, S.; NOORT, B. van; MATEO, A.; MAZARICO, E. a WAL, W. van der, 2024. A low-density ocean inside Titan inferred from Cassini data. *Nature Astronomy*. Roč. 8, č. 7, s. 846. Dostupné z DOI: [10.1038/s41550-024-02253-4](https://doi.org/10.1038/s41550-024-02253-4).
- HARVEY, A., 2019. Properties of Ice and Supercooled Water. In: CRC Handbook of Chemistry a Physics, CRC Press, Boca Raton, FL. Dostupné také z: https://tsapps.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=926353.
- HELFENSTEIN, P. a PORCO, C. C., 2015. Enceladus' geysers: Relation to geological features. *The Astronomical Journal*. Roč. 150, č. 3, s. 96. Dostupné z DOI: [10.1088/0004-6256/150/3/96](https://doi.org/10.1088/0004-6256/150/3/96).
- CHOBLET, G.; TOBIE, G.; SOTIN, C.; BĚHOUNKOVÁ, M.; ČADEK, O.; POSTBERG, F. a SOUČEK, O., 2017. Powering prolonged hydrothermal activity inside Enceladus. *Nature Astronomy*. Roč. 1, č. 12, s. 841. Dostupné z DOI: [10.1038/s41550-017-0289-8](https://doi.org/10.1038/s41550-017-0289-8).
- IESS, L.; STEVENSON, D. J.; PARISI, M.; HEMINGWAY, D.; JACOBSON, R. A.; LUNINE, J. I.; NIMMO, F.; ARMSTRONG, J. W.; ASMAR, S. W.; DUCCI, M. a TORTORA, P., 2014. The Gravity Field and Interior Structure of Enceladus. *Science*. Roč. 344, č. 6179, s. 78. Dostupné z DOI: [10.1126/science.1250551](https://doi.org/10.1126/science.1250551).
- LOBO, A. H.; THOMPSON, A. F.; VANCE, S. D. a THARIMENA, S., 2021. A pole-to-equator ocean overturning circulation on Enceladus. *Nature Geoscience*. Roč. 14, č. 4, s. 185. Dostupné z DOI: [10.1038/s41561-021-00706-3](https://doi.org/10.1038/s41561-021-00706-3).
- MARTINEC, Z., 1994. The Density Contrast At the Mohorovičić Discontinuity. *Geophysical Journal International*. Roč. 117, č. 2, s. 539. Dostupné z DOI: [10.1111/j.1365-246X.1994.tb03950.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1994.tb03950.x).

- McKINNON, W. B., 2015. Effect of Enceladus's rapid synchronous spin on interpretation of Cassini gravity. *Geophysical Research Letters*. Roč. 42, č. 7, s. 2137. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1002/2015GL063384>.
- MONTEUX, J.; COLLINS, G. S.; TOBIE, G. a CHOBLLET, G., 2016. Consequences of large impacts on Enceladus' core shape. *Icarus*. Roč. 264, s. 300. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2015.09.034>.
- NIMMO, F.; BILLS, B. G. a THOMAS, P. C., 2011. Geophysical implications of the long-wavelength topography of the Saturnian satellites. *Journal of Geophysical Research: Planets*. Roč. 116, č. E11. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1029/2011JE003835>.
- PARK, R. S.; MASTRODEMOS, N.; JACOBSON, R. A.; BERNE, A.; VAUGHAN, A. T.; HEMINGWAY, D. J.; LEONARD, E. J.; CASTILLO-ROGEZ, J. C.; COCKELL, C. S.; KEANE, J. T.; KONOPLIV, A. S.; NIMMO, F.; RIEDEL, J. E.; SIMONS, M. a VANCE, S., 2024. The Global Shape, Gravity Field, and Libration of Enceladus. *Journal of Geophysical Research: Planets*. Roč. 129, č. 1. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1029/2023JE008054>.
- PORCO, C. C.; HELFENSTEIN, P.; THOMAS, P. C.; INGERSOLL, A. P.; WISDOM, J.; WEST, R.; NEUKUM, G.; DENK, T.; WAGNER, R.; ROATSCH, T.; KIEFFER, S.; TURTLE, E.; MCEWEN, A.; JOHNSON, T. V.; RATHBUN, J.; VEVERKA, J.; WILSON, D.; PERRY, J.; SPITALE, J.; BRAHIC, A.; BURNS, J. A.; DELGENIO, A. D.; DONES, L.; MURRAY, C. D. a SQUYRES, S., 2006. Cassini Observes the Active South Pole of Enceladus. *Science*. Roč. 311, č. 5766, s. 1393. Dostupné z DOI: [10.1126/science.1123013](https://doi.org/10.1126/science.1123013).
- POWELL, M. J. D., 1964. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *The Computer Journal*. Roč. 7, č. 2, s. 155. Dostupné z DOI: [10.1093/comjnl/7.2.155](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.155).
- ROVIRA-NAVARRO, M.; KATZ, R. F.; LIAO, Y.; WAL, W. van der a NIMMO, F., 2022. The Tides of Enceladus' Porous Core. *Journal of Geophysical Research: Planets*. Roč. 127, č. 5. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1029/2021JE007117>.
- SHOJI, D.; HUSSMANN, H.; KURITA, K. a SOHL, F., 2013. Ice rheology and tidal heating of Enceladus. *Icarus*. Roč. 226, č. 1, s. 10. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.05.004>.
- SCHENK, P. M. a MCKINNON, W. B., 2009. One-hundred-km-scale basins on Enceladus: Evidence for an active ice shell. *Geophysical Research Letters*. Roč. 36, č. 16. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1029/2009GL039916>.
- SCHENK, P. M. a MCKINNON, W. B., 2024. New global topography of Enceladus: Hypsometry, basins, spherical harmonics, shell thickness, and true polar wander revisited. *Icarus*. Roč. 408, s. 115827. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2023.115827>.
- SODERLUND, K. M.; ROVIRA-NAVARRO, M.; LE BARS, M.; SCHMIDT, B. E. a GERKEMA, T., 2024. The Physical Oceanography of Ice-Covered Moons. *Annual Review of Marine Science*. Roč. 16, s. 25. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-marine-040323-101355>.

- TAJEDDINE, R.; SODERLUND, K. M.; THOMAS, P. C.; HELFENSTEIN, P.; HEDMAN, M. M.; BURNS, J. A. a SCHENK, P. M., 2017. True polar wander of Enceladus from topographic data. *Icarus*. Roč. 295, s. 46. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.04.019>.
- THOMAS, P.; TAJEDDINE, R.; TISCARENO, M.; BURNS, J.; JOSEPH, J.; LOREDO, T.; HELFENSTEIN, P. a PORCO, C. C., 2016. Enceladus's measured physical libration requires a global subsurface ocean. *Icarus*. Roč. 264, s. 37. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2015.08.037>.
- VAN HOOLST, T.; BALAND, R.-M. a TRINH, A., 2016. The diurnal libration and interior structure of Enceladus. *Icarus*. Roč. 277, s. 311. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2016.05.025>.
- VARGAS, M.; BROUGHTON, H.; SIMS, J. J.; BLEEZE, B. a GAINES, V., 2007. Local and Total Density Measurements in Ice Shapes. *Journal of Aircraft*. Roč. 44, č. 3, s. 780. Dostupné z DOI: 10.2514/1.23326.
- YIN, A. a PAPPALARDO, R. T., 2015. Gravitational spreading, bookshelf faulting, and tectonic evolution of the South Polar Terrain of Saturn's moon Enceladus. *Icarus*. Roč. 260, s. 409. Dostupné z DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2015.07.017>.

Seznam užitého značení a konstant

G	gravitační konstanta, $6,6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
M	hmotnost Enceladu, $1,08031 \times 10^{20} \text{ kg}$
a	střední poloměr Enceladu, referenční poloměr, 252,05 km
w	úhlová rychlost rotace Enceladu, $5,307 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Y_{jm}	sférická harmonická funkce stupně j , řádu m
θ	zeměpisná šířka (měřeno od severního pólu)
φ	zeměpisná délka (měřeno od spojnice Enceladus–Saturn)
K_{jm}	sférický harmonický koeficient, stupně j , řádu m
$C_{jm} = \text{Re}(K_{jm})$	sférický harmonický koeficient, reálná část, stupně j , řádu m
$S_{jm} = \text{Im}(K_{jm})$	sférický harmonický koeficient, imaginární část, stupně j , řádu m
a^*	referenční poloměr pro gravitační sférické koeficienty ze článku
C_{jm}^*, S_{jm}^*	sférický harmonický koeficient v jiné konvenci než naší, ze článku
$R_{I/W}, R_C$	střední poloměr rozhraní led–voda a voda–jádro
H	střední tloušťka ledové krusty, $H = a - R_{I/W}$
ρ_I, ρ_W, ρ_C	hustota ledu, vody a jádra
$\Delta\rho_S, \Delta\rho_{I/W}, \Delta\rho_C$	hustotní skok na rozhraní vakuum–led, led–voda, voda–jádro
$K_{jm}^S, K_{jm}^{I/W}, K_{jm}^C$	sférický koeficient tvaru rozhraní vakuum–led, led–voda, voda–jádro
$K_{jm}^{H,S}, K_{jm}^{H,I/W}, K_{jm}^{H,C}$	geoid na rozhraní vakuum–led, led–voda, voda–jádro
$K_{jm}^{T,S}, K_{jm}^{T,I/W}, K_{jm}^{T,C}$	topografie na rozhraní vakuum–led, led–voda, voda–jádro
K_{jm}^G	sférický koeficient pozorovaného vnějšího gravitačního potenciálu
$K_{jm}^{G,S}, K_{jm}^{G,I/W}, K_{jm}^{G,C}$	sférický koeficientu vnějšího gravitačního potenciálu
	od hustotního rozhraní vakuum–led, led–voda, voda–jádro
$K_{jm}^{A,B}$	sférický koeficient gravitačního potenciálu od rozhraní A
	na středním poloměru rozhraní B
K_{jm}^{OS}	sférický koeficient odstředivého a slapového potenciálu
K_{jm}^D	kompenzační koeficient stupně j , řádu m

h	geoid
g	tíhové zrychlení
S	misfit, viz sekce 3.7, pozor na to, přes které stupně a řády se misfit sčítá

A Přílohy

A.1 Sférické harmonické funkce a normalizace koeficientů

A.1.1 Konvence použitá v této práci

V této práci je používána následující definice sférických harmonik:

$$Y_{jm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2j+1)!(j-m)!}{4\pi(j+m)!}} P_{jm}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A.1})$$

Kde P_{jm} značí přidružený Legendův polynom dále definovaný jako:

$$P_{jm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_j(x) \quad (\text{A.2})$$

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j \quad (\text{A.3})$$

Rozvoj nějaké (reálné) veličiny A do sférických koeficientů pak definujeme jako:

$$\begin{aligned} A(\theta, \varphi) &= \text{Re} \left(\sum_{j=0}^{j=j_{\max}} \sum_{m=-j}^{m=j} K_{jm} Y_{jm}(\theta, \varphi) \right) = \\ &= \text{Re} \left(\sum_{j=0}^{j=j_{\max}} \sum_{m=-j}^{m=j} (C_{jm} + iS_{jm}) Y_{jm}(\theta, \varphi) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Tedy používáme komplexní plně normalizované koeficienty.

Díky (anti)symetrii koeficientů v řádu ($C_{j-m} = (-1)^m C_{jm}$ a stejně i pro S_{jm}) tak koeficienty nezáporných řádů plně určují rozvoj a dále tak pracujeme pouze s nimi.

A.1.2 Jiné konvence

V jiných pracích, především ve člancích ze kterých budeme čerpat se často využívají jiné konvence než ta naše. Rozvoj tvaru tělesa s respektive potenciálu V je typicky definován následovně (nenormované koeficienty):

$$s(\theta, \phi) = a^* \sum_{j=0}^{j=j_{\max}} \sum_{m=0}^{m=j} (C_{jm}^* \cos(m\varphi) + S_{jm}^* \sin(m\varphi)) P_{jm}(\cos \theta) \quad (\text{A.5})$$

$$V(r, \theta, \varphi) = \frac{GM}{a^*} \sum_{j=0}^{j=j_{\max}} \sum_{m=0}^{m=j} (C_{jm}^* \cos(m\varphi) + S_{jm}^* \sin(m\varphi)) P_{jm}(\cos \theta) \left(\frac{a^*}{r} \right)^{j+1} \quad (\text{A.6})$$

Kde a^* značí referenční poloměr použitý ve článku (jeho hodnota se mezi články liší).

Převod koeficientů rozvoje tvaru zpět do naší konvence pak je:

$$C_{j0} = C_{j0}^* a^* \sqrt{\frac{4\pi}{(2j+1)}} \quad (\text{A.7})$$

$$S_{j0} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$C_{jm} = C_{jm}^* \frac{(-1)^m}{2} a^* \sqrt{\frac{4\pi(j+m)!}{(2j+1)(j-m!)}} \quad (\text{A.9})$$

$$S_{jm} = S_{jm}^* \frac{(-1)^{m+1}}{2} a^* \sqrt{\frac{4\pi(j+m)!}{(2j+1)(j-m!)}} \quad (\text{A.10})$$

A v pro koeficienty rozvoje potenciálu:

$$C_{j0} = C_{j0}^* \frac{GM}{a^*} \sqrt{\frac{4\pi}{(2j+1)}} \left(\frac{a^*}{a}\right)^{j+1} \quad (\text{A.11})$$

$$S_{j0} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$C_{jm} = C_{jm}^* \frac{(-1)^m}{2} \frac{GM}{a^*} \sqrt{\frac{4\pi(j+m)!}{(2j+1)(j-m!)}} \left(\frac{a^*}{a}\right)^{j+1} \quad (\text{A.13})$$

$$S_{jm} = S_{jm}^* \frac{(-1)^{m+1}}{2} \frac{GM}{a^*} \sqrt{\frac{4\pi(j+m)!}{(2j+1)(j-m!)}} \left(\frac{a^*}{a}\right)^{j+1} \quad (\text{A.14})$$