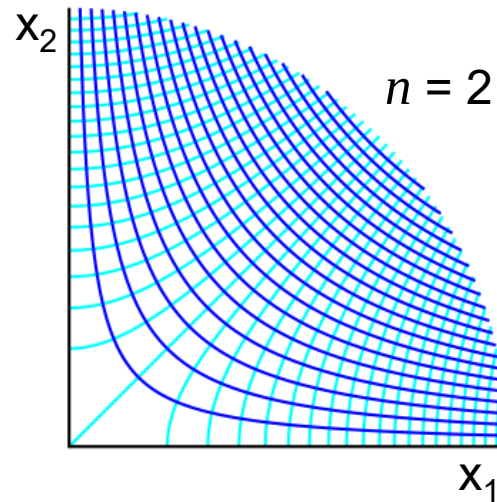


Příklad: rohové tečení (*corner flow*) – 1. eulerovský popis



Speciální případ tzv. potenciálového tečení (*potential flow*), kdy lze rychlost vyjádřit pomocí skalárního potenciálu:

$$\vec{v} = \nabla \phi$$

V případě rohového tečení je $\phi = Ar^n \cos n\theta$ (v polárních souřadnicích).

Zvolme $n = 2$, $A = \frac{1}{2}$ a vyjádřeme rychlosti v souřadnicích x_1, x_2, x_3 :

$$v_1 = x_1, \quad v_2 = -x_2, \quad v_3 = 0$$

Zrychlení v eulerovském popisu je dáno vztahem

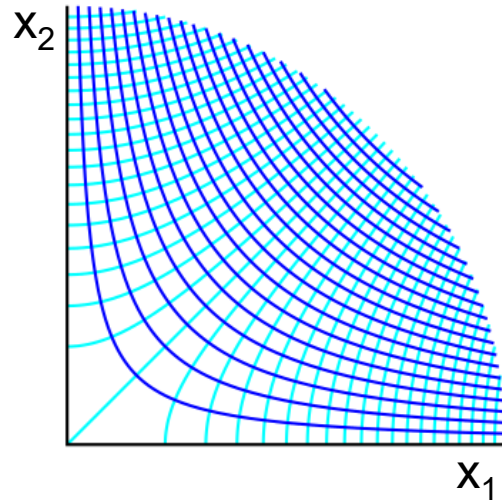
$$\vec{a}(\vec{x}, t) = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{=0} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} = (v_1 \ v_2 \ v_3) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = (x_1, -x_2, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zrychlení jsme spočetli bez znalosti trajektorie, tj. bez znalosti funkce $\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$.

Třebaže je proudění stacionární, zrychlení částice je nenulové.

Příklad: rohové tečení (*corner flow*) – 2. lagrangeovský popis (1)



$$v_1 = x_1, \quad v_2 = -x_2, \quad v_3 = 0$$

V případě lagrangeovského popisu musíme nejprve vyjádřit trajektorii, tj. určit funkci:

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t)$$

Trajektorie částice (*pathline*) je definována předpisem

$$\frac{dx_i^P}{v_i} = dt, \quad x_i^P(0) = X_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \vec{x}^P = f(\vec{X}, t)$$

V našem případě $v_1 = x_1$, $v_2 = -x_2$.

Pro jednoduchost vynecháme označení proudnice, tj. $\vec{x}^P \equiv \vec{x}$.

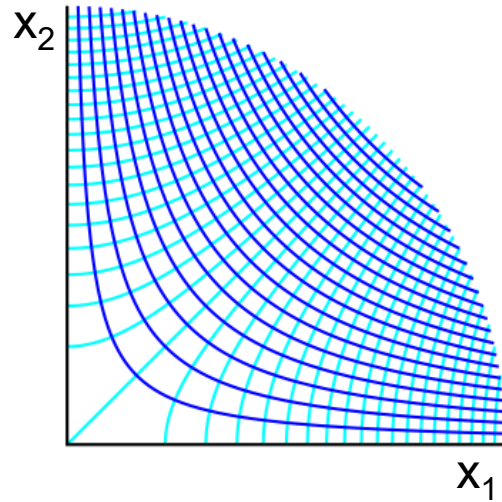
$$\frac{dx_1}{x_1} = dt, \quad \frac{dx_2}{x_2} = -dt \quad \Rightarrow \quad x_1 = C_1 e^t, \quad x_2 = C_2 e^{-t}$$

Konstantu určíme z počáteční podmínky

$$x_1(t=0) = X_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = X_1, \quad x_2(t=0) = X_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = X_2$$

$$x_1 = X_1 e^t, \quad x_2 = X_2 e^{-t}$$

Příklad: rohové tečení (*corner flow*) – 2. lagrangeovský popis (2)



Vyjádření **deformace** v lagrangeovském popisu:

$$\vec{x} = \vec{\chi}(\vec{X}, t) : \quad x_1 = X_1 e^t, \quad x_2 = X_2 e^{-t}, \quad x_3 = X_3$$

Rychlost v lagrangeovském popisu: $\vec{V}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{\chi}}{\partial t}$

Složkově: $V_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t} = X_1 e^t = x_1 = v_1$

$$V_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t} = -X_2 e^{-t} = -x_2 = v_2$$

$$V_3 = \frac{\partial x_3}{\partial t} = 0 = v_3$$

Zrychlení v lagrangeovském popisu:

$$\vec{A}(\vec{X}, t) = \frac{\partial^2 \vec{\chi}}{\partial t^2}$$

$$A_1 = \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = X_1 e^t = x_1 = a_1$$

$$A_2 = \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = X_2 e^{-t} = x_2 = a_2$$

$$A_3 = \frac{\partial^2 x_3}{\partial t^2} = 0 = a_3$$

Tenzor gradientu rychlosti

$$\boldsymbol{l}(\vec{x}, t) := \text{grad}^T \vec{v}(\vec{x}, t), \quad l_{kl}(\vec{x}, t) = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F}$$

Aplikace na rohové tečení

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = (x_1, -x_2, 0)$$

$$\boldsymbol{l}(\vec{x}, t) := \text{grad}^T \vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\chi}(\vec{X}, t) : \begin{aligned} x_1 &= e^t X_1 + 0.X_2 + 0.X_3 \\ x_2 &= 0.X_1 + e^{-t} X_2 + 0.X_3 \\ x_3 &= 0.X_1 + 0.X_2 + 1.X_3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{F} = (\text{grad } \vec{\chi})^T = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{F}}$$

Trajektorie (*pathlines*) a proudnice (*streamlines*)

Trajektorie

$$\frac{d\vec{x}^P}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}^P(0) = \vec{X}$$

Proudnice

$$d\vec{x}^S \times \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}$$

Obecná definice: Proudnice je trajektorie za předpokladu, že je okamžitý stav proudění chápán jako stacionární proudění:

$$\frac{d\vec{x}^S}{d\tau} = \vec{v}(\vec{x}^S), \quad \vec{x}^S(0) = \vec{X} \quad \text{nebo také} \quad \frac{d\vec{s}}{d\tau} = \vec{v}(\vec{s}), \quad \vec{s}_{\tau=0} = \vec{X},$$

kde τ je parametr označovaný také jako nepravý čas (*pseudotime*). Jelikož vektory $d\vec{s}$ a $\vec{v}$ jsou tečné, musí platit, že

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\vec{v}}{v} \quad \rightarrow \quad d\tau = \frac{ds}{v} \quad \longrightarrow \quad \tau \text{ je tedy čas pohybu částice ve stacionárním případě}$$

Proudnici pak dostaneme řešením následujících rovnic

$$\frac{ds_i}{v_i} = d\tau, \quad s_i(0) = X_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad \vec{s} = f(\vec{X}, \tau)$$

Trajektorie (*pathlines*) a proudnice (*streamlines*)

Shrnutí:

Trajektorie zachycuje pohyb zvolené částice v čase. Je dána zobrazením $\vec{x}^P(t) = \vec{\chi}(\vec{X}, t)_{\vec{X}=\vec{X}^P}$, nebo může být spočtena integrováním rychlosti.

Proudnice umožňují pro pevně zadaný časový okamžik reprezentovat rychlostní pole pomocí křivek, které jsou v každém bodě tečné k vektoru rychlosti.

Proudnice je totožná s trajektorií pouze v případě stacionárního proudění.

Příklad: Pro následující pole rychlostí spočtete proudnice a trajektorie a ukažte, že nejsou totožné.

$$v_1 = k_1, \quad v_2 = k_2 t, \quad v_3 = 0, \quad \text{kde } k_1, k_2 > 0$$

Řešení

Proudnice:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} \rightarrow \frac{dx_1}{k_1} = \frac{dx_2}{k_2 t} \rightarrow x_2 = \frac{k_2 t}{k_1} x_1 + C(t) \quad \leftarrow \text{přímky}$$

Trajektorie:

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t v_1 dt' = X_1 + \int_0^t k_1 dt' = X_1 + k_1 t; \quad \text{odtud } t = \frac{x_1 - X_1}{k_1}$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t v_2 dt' = X_2 + \int_0^t k_2 t' dt' = X_2 + \frac{1}{2} k_2 t^2; \quad \text{tj. } x_2 = X_2 + \frac{1}{2} \frac{k_2}{k_1^2} (x_1 - X_1)^2$$

↑
paraboly

Proudová funkce (*stream function*)

K popisu proudění nestlačitelné kapaliny ve 2d geometrii se často používá tzv. proudová funkce definovaná následovně:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

což lze také vyjádřit jako $\vec{v} = \nabla \times \vec{\psi}$, kde $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ a $\vec{\psi} = (0, 0, \psi)$.

Zjevně platí, že takto definovaná rychlost má nulovou divergenci:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{\psi}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Funkce $\psi(x_1, x_2) = C$ jsou proudnice.

Důkaz:

Pokud by $\psi = C$ byla proudnice, musí platit $\vec{v} \cdot \nabla \psi = 0$.

$$\vec{v} \cdot \nabla \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Cvičení 5-6: Kinematika, napětí a zákony zachování

Příklad 1: Pole rychlostí má složky $v_1 = -x_1$, $v_2 = 4x_1^2x_2^2$, $v_3 = x_1 - x_2$. Spočtěte

- a) zrychlení působící na částici
- b) proudnici, která v čase 0 prochází bodem (1, 0.5, 0).

Řešení a)

$$\vec{a} = \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\vec{v} = (-x_1, 4x_1^2x_2^2, x_1 - x_2), \quad \nabla \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 8x_1x_2^2 & 1 \\ 0 & 8x_1^2x_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = (-x_1, 4x_1^2x_2^2, x_1 - x_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8x_1x_2^2 & 1 \\ 0 & 8x_1^2x_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (x_1, 8x_1^2x_2^2(4x_1^2x_2 - 1), -x_1 - 4x_1^2x_2^2)$$

Řešení b): Výpočet proudnic

$$v_1 = -x_1, \quad v_2 = 4x_1^2 x_2^2, \quad v_3 = x_1 - x_2$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}), \quad \vec{x}(0) = \vec{X}$$

Složka 1

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 = -x_1 \rightarrow x_1 = Ce^{-t}, \quad x_1(0) = 1 \rightarrow C = 1 \rightarrow \boxed{x_1 = e^{-t}}$$

Složka 2

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 = 4x_1^2 x_2^2 = 4e^{-2t} x_2^2$$

$$\frac{dx_2}{x_2^2} = 4e^{-2t} dt \rightarrow x_2 = \frac{1}{2e^{-2t} + C}, \quad x_2(0) = 1/2 \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{2}e^{2t}}$$

Složka 3

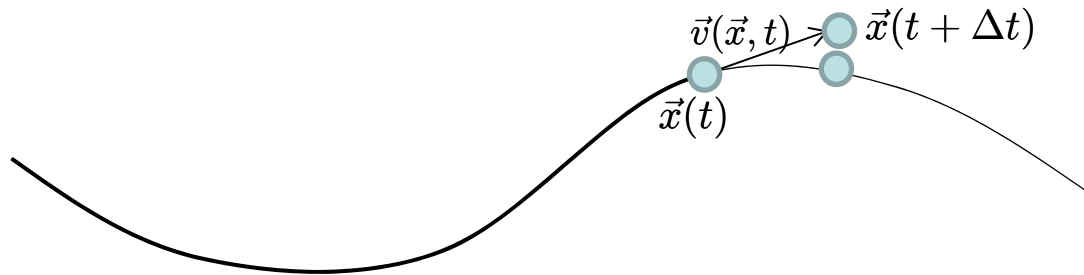
$$\frac{dx_3}{dt} = v_3 = x_1 - x_2 = e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t} \rightarrow x_3 = -e^{-t} - \frac{1}{4}e^{2t} + C$$

$$x_3(0) = 0 \rightarrow \boxed{x_3 = -e^{-t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{3}{4}}$$

Příklad 2: Numerický výpočet trajektorií

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}(0) = \vec{X}$$

Počáteční úloha (initial value problem) $y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$



$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{x}}{dt} \approx \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}, \quad \vec{x}(t + \Delta t) = \vec{x}(t) + \vec{v}(\vec{x}, t)\Delta t$$

**Eulerova metoda
nespolehlivá!**

$$\vec{x}_n = \vec{x}(t_n), \quad \vec{x}_{n+1} = \vec{x}(t_{n+1}), \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \vec{v}(\vec{x}_n, t_n)\Delta t}$$

Mnohem lepší volbou je v tomto případě např. **Runge-Kuttova metoda 4. řádu:**

$$\boxed{\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \frac{1}{6}\Delta t(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4)}$$

$$\vec{k}_1 = \vec{v}(\vec{x}_n, t_n), \quad \vec{k}_2 = \vec{v}(\vec{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t\vec{k}_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t), \quad \vec{k}_3 = \vec{v}(\vec{x}_n + \frac{1}{2}\Delta t\vec{k}_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t), \quad \vec{k}_4 = \vec{v}(\vec{x}_n + \Delta t\vec{k}_3, t_n + \Delta t)$$