

Uvažujme materiálový objem rozdělený *singulární plochou*. Tato plocha se pohybuje rychlostí $\vec{w}$ a nemusí jít nutně o materiálový povrch. Označme

$$v - \sigma := v^+ + v^-, \quad s - \sigma := s^+ + s^-$$

V případě *bez singulární plochy* má Gaussova věta pro tenzor tvar:

$$\int_v \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \int_s \vec{n} \cdot \mathbf{A} da$$

Pokud singulární plochu zahrneme, je třeba Gaussovu větu změnit následovně:

$$\int_{v-\sigma} \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \int_{s-\sigma} \vec{n} \cdot \mathbf{A} da - \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [\mathbf{A}]_{-}^{+} da$$

kde $[\mathbf{A}]_{-}^{+} := \mathbf{A}^{+} - \mathbf{A}^{-}$.

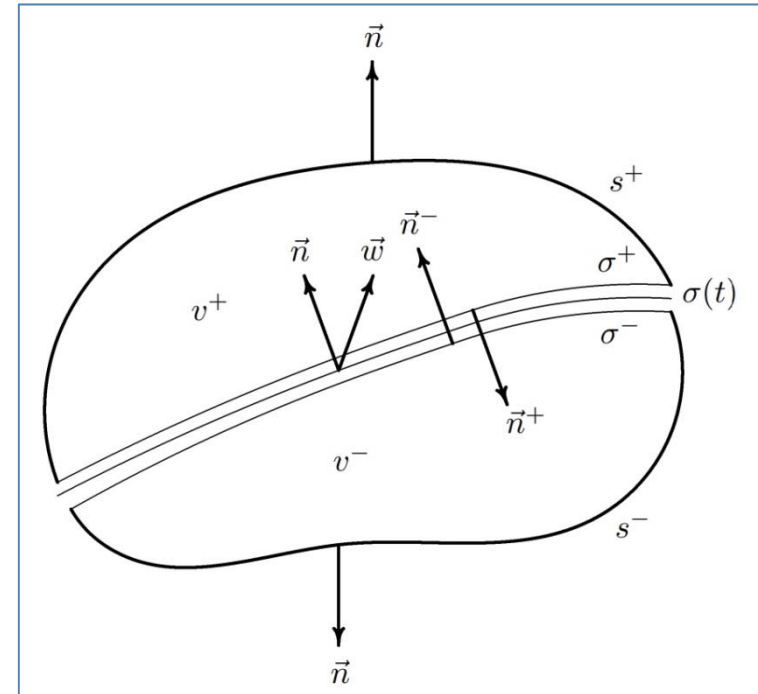
Reynoldsovův transportní teorém odvozený v přednášce 3

$$\frac{D}{Dt} \int_v \phi dv = \int_v \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv$$

platí pouze za předpokladu, že ϕ a $\vec{v}$ jsou diferencovatelné funkce. Pokud v tělese existuje singulární plocha, je třeba Reynoldsovův teorém přepsat do tvaru

$$\frac{D}{Dt} \int_{v-\sigma} \phi dv = \int_{v-\sigma} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv + \int_{\sigma} \vec{n} \cdot [(\vec{v} - \vec{w})\phi]_{-}^{+} da$$

Příklad 3: Obecný tvar Reynoldsovy věty



Příklad 4: Divergence tenzoru napětí

Značení:

Cauchyho tenzor napětí: $\mathbf{t}(\vec{x}, t)$

Lagrangeovský Cauchyho tenzor napětí: $\mathbf{T}(\vec{X}, t)$

První a druhý Piola-Kirchhoffův tenzor: $\mathbf{T}^{(1)}(\vec{X}, t), \mathbf{T}^{(2)}(\vec{X}, t)$

Pohybová rovnice kontinua (odvození v přednášce 06): $\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$

Otázka: Jak vypadá $\operatorname{div} \mathbf{t}$ v lagrangeovském tvaru?

a) $\operatorname{div} \mathbf{t} = \mathbf{F}^{-1} : \operatorname{Grad} \mathbf{T}$ (viz přednáška 02)

b) $\operatorname{div} \mathbf{t} = \operatorname{div}(J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{(1)}) = \operatorname{div}(J^{-1} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{T}^{(1)} + J^{-1} \mathbf{F}^T : \operatorname{grad} \mathbf{T}^{(1)} = J^{-1} \operatorname{Div} \mathbf{T}^{(1)}$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \underbrace{(\operatorname{div} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}}_{\downarrow} + \mathbf{A}^T : \operatorname{grad} \mathbf{B} \quad \underbrace{\operatorname{div}(J^{-1} \mathbf{F})}_{\downarrow} = 0 \quad \mathbf{F}^T : \underbrace{\operatorname{grad} \bullet}_{\downarrow} = \operatorname{Div} \bullet.$$

c) $\operatorname{div} \mathbf{t} = J^{-1} \operatorname{Div} \mathbf{T}^{(1)} = J^{-1} \operatorname{Div} (\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{F}^T) = J^{-1} (\operatorname{Div} \mathbf{T}^{(2)}) \cdot \mathbf{F}^T + J^{-1} \mathbf{T}^{(2)} : \operatorname{Grad} \mathbf{F}^T$

Příklad 5: Rovnice přenosu tepla pro nestlačitelnou kapalinu

$$\rho \dot{\epsilon} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho h$$

← **Zákon zachování energie** (viz Zákony zachování str. 7)
vyjádříme ve stavových proměnných teplota - tlak.

Levá strana rovnice:

$$d\epsilon = Td\eta - pdv \quad (dU = TdS - pdV) \quad \leftarrow \quad \text{1. termodynamická věta}$$

$$dv = 0 \quad \leftarrow \quad \text{nestlačitelná kapalina}$$

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho T \dot{\eta}, \quad \text{kde } \eta = \eta(p, T) \quad \leftarrow \quad \text{chceme vyjádřit zákon zachování energie v proměnných tlak a teplota}$$

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho T \dot{\eta} = \underbrace{\rho T \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)_p}_{\text{měrné teplo při konstantním tlaku}} \dot{T} + \underbrace{T \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_T}_{\text{teplotní roztažnost}} \dot{p} = \rho c_p \dot{T} - \alpha T \dot{p} \quad \leftarrow \quad \text{"pojmenujeme derivace"}$$

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho c_p \dot{T} - \alpha T \dot{p} = \underbrace{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T - \alpha T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p \right)}_{\text{rozepíšeme materiálové derivace}}$$

Pravá strana rovnice, 1. člen:

$$\mathbf{t} : \mathbf{d} = \left(\frac{1}{3} (\operatorname{tr} \mathbf{t}) \mathbf{I} + \underbrace{\mathbf{t}^D}_{\text{deviátor napětí (symetrický tenzor)}} \right) : \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T) = \mathbf{t}^D : \operatorname{grad} \vec{v}$$

deviátor napětí
(symetrický tenzor)



$$\mathbf{I} : \operatorname{grad} \vec{v} = \delta_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$\mathbf{t}^D : \operatorname{grad} \vec{v} = t_{ij}^D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = t_{ji}^D \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \mathbf{t}^D : (\operatorname{grad} \vec{v})^T$$

$$\rho \dot{\epsilon} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho h$$

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T - \alpha T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p \right) \leftarrow \text{levá strana}$$

$$\mathbf{t} : \mathbf{d} = \mathbf{t}^D : \operatorname{grad} \vec{v} \leftarrow \text{pravá strana, 1. člen}$$

Pravá strana rovnice, 2. člen:

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} T \leftarrow \text{Fourierův zákon, } k \text{ je teplotní vodivost}$$

$$-\operatorname{div} \vec{q} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T)$$

Dáme vše dohromady a přeorganizujeme tak, aby na levé straně byla parciální derivace teploty podle času:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{-\rho c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T}_{\text{advekce tepla „konvekce“}} + \underbrace{\operatorname{div} (k \operatorname{grad} T)}_{\text{vedení tepla „kondukce“}} + \underbrace{\alpha T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} p \right)}_{\text{adiabatické zahřívání}} + \underbrace{\mathbf{t}^D : \operatorname{grad} \vec{v}}_{\text{disipativní zahřívání}} + \underbrace{\rho h}_{\text{zdroje}}$$

Pokud jsou zdroje nulové a zanedbáme adiabatické a disipativní zahřívání:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\rho c_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) \quad \uparrow$$

Příklad 6: Aplikace Clausius-Duhemovy nerovnosti na viskózní tepelně vodivou kapalinu

Viz přednáška 06:

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \left(\frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\rho h}{T} \geq 0$$

$$\rho(T\dot{\eta} - \dot{\epsilon}) + \mathbf{t} : \mathbf{d} - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0$$

← použijeme tento tvar

$$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{d}, T, \operatorname{grad} T, \rho), \quad \vec{q} = \hat{\vec{q}}(\mathbf{d}, T, \operatorname{grad} T, \rho), \quad \epsilon = \hat{\epsilon}(\mathbf{d}, T, \operatorname{grad} T, \rho) \quad \leftarrow \text{dokážeme později}$$

Princip omniprezence: $\eta = \hat{\eta}(\mathbf{d}, T, \operatorname{grad} T, \rho)$

$$\begin{aligned} & \rho(T\dot{\eta} - \dot{\epsilon}) + \mathbf{t} : \mathbf{d} - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} = \\ &= \rho \left[\left(T \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \rho} - \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \rho} \right) \dot{\rho} + \left(T \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial T} - \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial T} \right) \dot{T} + \left(T \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \mathbf{d}} \right) : \dot{\mathbf{d}} + \left(T \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \operatorname{grad} T} - \frac{\partial \hat{\epsilon}}{\partial \operatorname{grad} T} \right) \cdot \operatorname{grad} \dot{T} \right] + \\ &+ \mathbf{t} : \mathbf{d} - \frac{\vec{q} \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0 \end{aligned}$$

Aplikujme nyní rovnici kontinuity: $\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \rightarrow \dot{\rho} = -\rho \operatorname{div} \vec{v} = -\rho \operatorname{tr} \mathbf{d} = -\rho \mathbf{I} : \mathbf{d}$