

Konstitutivní vztahy – intuitivní přístup

Opakování:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 && \leftarrow \text{rovnice kontinuity (zákon zachování hmoty)} \\ \operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} &= \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad \mathbf{t}^T = \mathbf{t} && \leftarrow \begin{array}{l} \text{pohybová rovnice a symetrie Cauchyho tenzoru napětí} \\ \text{(zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti)} \end{array} \\ \rho \frac{D\epsilon}{Dt} &= \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho h && \leftarrow \text{zákon zachování energie} \end{aligned}$$

Neuvažujeme zde elektromagnetické jevy a chemické procesy. Termální procesy však nelze obecně vypustit, a to ze dvou důvodů:

- (i) v reálném světě dochází vždy k přeměně (disipaci) deformační energie na teplo
- (ii) deformační vlastnosti materiálů často silně závisí na teplotě

Zákony zachování obsahují **zdrojové členy** $\vec{f}, h$, o nichž předpokládáme, že jsou dány, a **neznámé** $\rho, \vec{v}, \mathbf{t}, \epsilon, \vec{q}, (T)$.

Uvažujeme-li symetrii Cauchyho tenzoru napětí, pak celkový počet neznámých (ve složkách) je celkem $1+3+6+1+3+(1) = \mathbf{14}$ (**15**), zatímco zákony zachování dávají rovnic pouze $1+3+1 = \mathbf{5}$.

Abychom mohli určit neznámé veličiny, musíme charakterizovat vlastnosti studovaného materiálu, to jest specifikovat **konstitutivní vztahy**, a to tak, aby počet neznámých odpovídal počtu rovnic.

Příklad: Nestlačitelná viskózní kapalina

a) Předpokládejme, že materiál je homogenní a izotropní. Zanedbáváme disipaci. Nulový vtok a výtok tepla.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} &= \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}\end{aligned}$$

$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] \quad \leftarrow \text{konstitutivní vztah pro newtonovskou kapalinu}$$

$$(\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d})$$

Počet rovnic: $1 + 3 + 6 = 10$

Znamé materiálové parametry: ρ, η (viskozita)

Znamé zdrojové členy: síla $\rho \vec{f}$ a případně hraniční podmínky (vtok a výtok)

Počet neznámých $(\mathbf{t}, \vec{v}, p) = 6 + 3 + 1 = 10$

Máme tedy soustavu 10 parciálních diferenciálních rovnic (PDR) prvního řádu pro 10 neznámých.

Dosazením reologického vztahu do pohybové rovnice dostaneme: *

$$\operatorname{div} \left\{ -p\mathbf{I} + \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] \right\} + \rho \vec{f} = -\operatorname{grad} p + \eta \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v} + \rho \vec{f} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v}$$

Původních deset PDR prvního řádu tak nahradíme 4 PDR druhého řádu pro 4 neznámé $\vec{v}$ a p :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ -\operatorname{grad} p + \eta \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v} + \rho \vec{f} &= \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \quad \leftarrow \text{Navier-Stokesova rovnice}\end{aligned}$$

$$* \operatorname{div} \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] = \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v} + \cancel{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{v}$$

b) Systém je zahříván a ochlazován zvenčí. Parametry nezávisí na teplotě.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} &= \rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ \mathbf{t} &= -p\mathbf{I} + \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] \\ \rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= -\rho_0 C_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + k \operatorname{div} \operatorname{grad} T \\ \rho &= \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)]\end{aligned}$$

Rovnice termální konvekce v Boussinesgově aproximaci.

$$\leftarrow \rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho h$$

Znamé materiálové parametry: $\rho_0, \eta, C_p, k, \alpha$

Počet neznámých ($\mathbf{t}, \vec{v}, p, \rho, T$) = 12 = počet rovnic

c) Ne-newtonovská nestlačitelná kapalina s teplotně závislými parametry

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} &= \rho_0 \frac{D\vec{v}}{Dt} \\ \rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= -\rho_0 C_p \vec{v} \cdot \operatorname{grad} T + \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T)\end{aligned}$$

zákony zachování

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= -p\mathbf{I} + \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] \\ \rho &= \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \\ \eta &= \eta(T, \mathbf{t}_{II}) \quad \leftarrow \text{reologie} \\ \alpha &= \alpha(T), \quad k = k(T), \quad C_p = C_p(T)\end{aligned}$$

konstitutivní vztahy

Příklad: Statická elastická deformace

Předpokládejme, že materiál je izotropní a deformace i napětí jsou malé. Deformace je termodynamicky reverzibilní, takže nedochází k disipaci mechanické energie.

$$\rho = \rho_0(1 - \operatorname{div} \vec{u})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = 0$$

$$\mathbf{t} = \lambda (\operatorname{div} \vec{u}) \mathbf{I} + \mu [\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T] \quad \leftarrow \text{Hookův zákon } (\mathbf{t} = \lambda (\operatorname{div} \vec{u}) \mathbf{I} + 2\eta \tilde{\mathbf{e}})$$

Příklad: Elastické vlny

Předpokládejme, že materiál je dokonale elastický, izotropní, homogenní a deformace i napětí jsou malé.

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Dosazením Hookova zákona do pohybové rovnice dostaneme:

$$\lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} \vec{u} + \mu \operatorname{div} (\operatorname{grad} \vec{u})^T = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

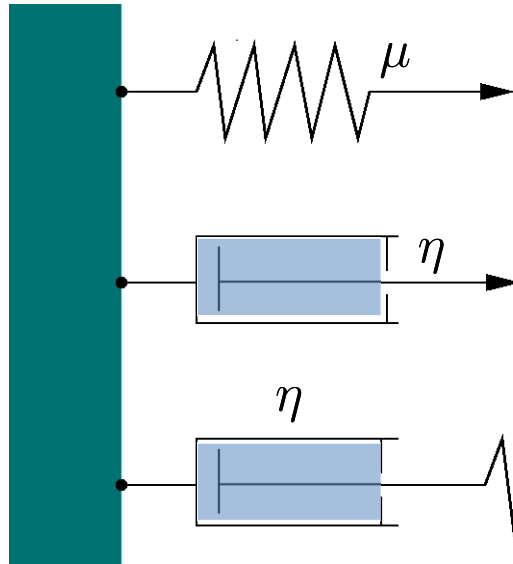
$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Aplikací operátoru div a rot dostaneme:

$$\underbrace{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}_{\text{objemová vlna}}, \quad \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{\Psi} = \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}}_{\text{střižná vlna}}, \quad \text{kde } \Phi = \operatorname{div} \vec{u} \text{ a } \vec{\Psi} = \operatorname{rot} \vec{u}.$$

Příklad: Maxwellův viskoelastický model

Ke konstrukci viskoelastického modelu použijeme mechanické analogy:



nestlačitelná elasticita: $\lambda \rightarrow \infty, \operatorname{div} \vec{u} \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \operatorname{div} \vec{u} \rightarrow -p$

$$\mathbf{t}_{\text{el}} = -p\mathbf{I} + \mu \left[\operatorname{grad} \vec{u} + (\operatorname{grad} \vec{u})^T \right] = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}_{\text{el}}$$

nestlačitelná viskozita:

$$\mathbf{t}_{\text{vis}} = -p\mathbf{I} + \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] = -p\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d}_{\text{vis}}$$

Maxwellův model:

$$\mathbf{t}_{\text{el}} = \mathbf{t}_{\text{vis}}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_{\text{el}} + \mathbf{e}_{\text{vis}}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}}_{\text{el}} + \mathbf{d}_{\text{vis}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}^D}{2\mu} + \frac{\mathbf{t}^D}{2\eta}$$

$$\mathbf{t}^D - \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] = -\frac{\eta}{\mu} \dot{\mathbf{t}}^D$$

Máme tedy následující soustavu rovnic:

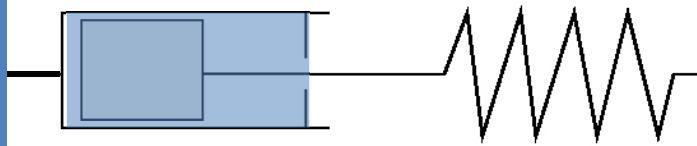
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

$$-\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \mathbf{t}^D + \rho \vec{f} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right)$$

$$\mathbf{t}^D - \eta \left[\operatorname{grad} \vec{v} + (\operatorname{grad} \vec{v})^T \right] = -\frac{\eta}{\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{t}^D}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{t}^D \right)$$

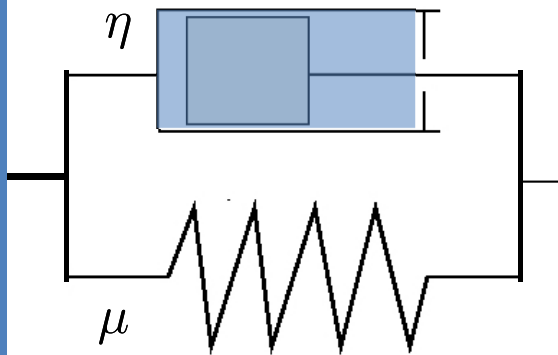
Počet rovnic souhlasí s počtem neznámých.

Vztah **není invariantní vůči transformaci souřadné soustavy** a platí pouze pro malé deformace (a nikoliv tedy pro viskoelastickou kapalinu).



Maxwellův model

$$\mathbf{t}_{\text{el}} = \mathbf{t}_{\text{vis}}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_{\text{el}} + \mathbf{e}_{\text{vis}}$$



Příklad: Kelvinův viskoelastický model

$$\mathbf{t}^D = \mathbf{t}_{\text{el}}^D + \mathbf{t}_{\text{vis}}^D, \quad \mathbf{e}_{\text{el}} = \mathbf{e}_{\text{vis}} = \mathbf{e}$$

$$\mathbf{t}_{\text{el}} = -p\mathbf{I} + \mu \left[\text{grad } \vec{u} + (\text{grad } \vec{u})^T \right] = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}_{\text{el}}$$

$$\mathbf{t}_{\text{vis}} = -p\mathbf{I} + \eta \left[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T \right] = -p\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{d}_{\text{vis}}$$



$$\mathbf{t} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e} + 2\eta\dot{\mathbf{e}}$$

Platí pouze pro malé deformace!