

Cvičení 7: Objektivita

Euclidean space $\mathbb{E}$

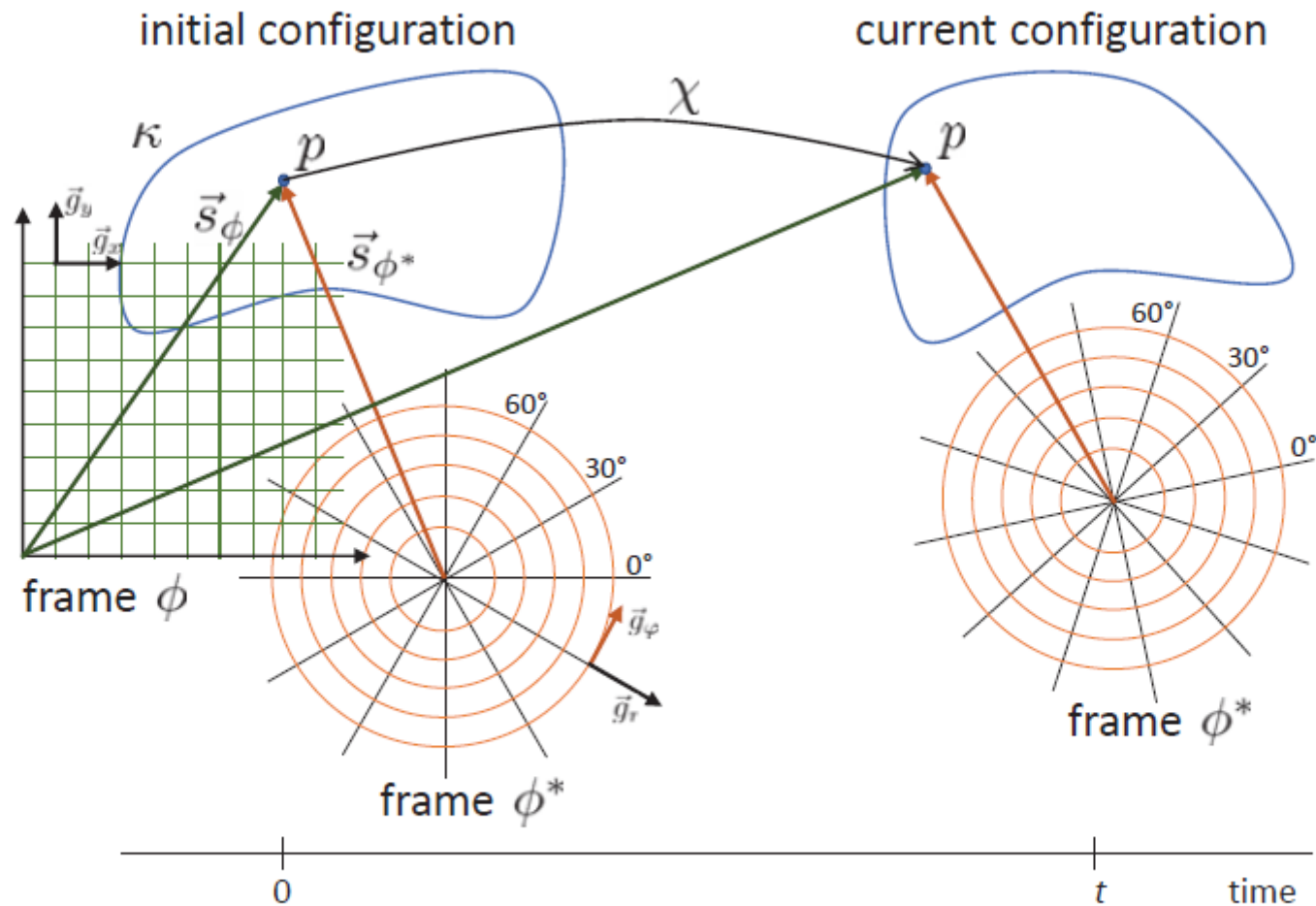


Figure 1.2: Position of particle p at times 0 and t , as viewed from fixed Cartesian frame $\phi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$ and from moving polar frame $\phi^*: \mathbb{E} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Příklad 1: Dokažte, že gradient objektivního skaláru je objektivní vektor.

Objektivní skalár: $\varphi^* = \varphi$

Objektivní vektor: $\vec{a}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{a}$

Máme tedy dokázat, že $\text{grad } \varphi^* = \mathbf{O} \cdot \text{grad } \varphi$.

Úmluva: Abychom rozlišili složky v původní a v rotované soustavě, budeme ty první značit latinskou abecedou a ty druhé řeckou abecedou.

$$\text{grad } \varphi^* = \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\alpha^*} = \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha^*}$$

$$\vec{x}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{x} + \vec{b}^* \rightarrow x_\alpha^* \vec{e}_\alpha^* = O_{\alpha i} (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_i) \cdot (x_j \vec{e}_j) + \vec{b}^* = \vec{e}_\alpha^* O_{\alpha i} x_i + \vec{b}^* \rightarrow \frac{\partial x_\alpha^*}{\partial x_i} = O_{\alpha i}$$

$$\vec{x} = \mathbf{O}^T \cdot \vec{x}^* - \vec{b} \rightarrow x_i \vec{e}_i = O_{\beta i} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_\beta^*) \cdot (x_\alpha^* \vec{e}_\alpha^*) - \vec{b} = \vec{e}_i O_{\alpha i} x_\alpha^* - \vec{b} \rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha^*} = O_{\alpha i}$$

$$\text{grad } \varphi^* = \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\alpha^*} = \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha^*} = \vec{e}_\alpha^* O_{\alpha i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \mathbf{O} \cdot \text{grad } \varphi \rightarrow \boxed{\text{grad } \varphi^* = \mathbf{O} \cdot \text{grad } \varphi}$$

$$\mathbf{O} \cdot \text{grad } \varphi = O_{\alpha i} (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_i) \cdot \left(\vec{e}_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \vec{e}_\alpha^* O_{\alpha i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

Příklad 2: Dokažte, že tepelný tok je objektivní vektor.

Máme dokázat, že $\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}$.

Postulovali jsme, že $\vec{q} \cdot \vec{n}$ je objektivní skalár a normála k povrchu je objektivní vektor, tj.

$$(\vec{q} \cdot \vec{n})^* = \vec{q} \cdot \vec{n}, \quad \vec{n}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{n}$$

Potom

$$(\vec{q} \cdot \vec{n})^* = \vec{q}^* \cdot \vec{n}^* = \vec{q}^* \cdot (\mathbf{O} \cdot \vec{n}) = \vec{q} \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{q}^* \cdot \mathbf{O} = \vec{q} \Rightarrow \vec{q}^* = \vec{q} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \cdot \vec{q}$$

$$\vec{q}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{q}$$

Příklad 3: Ukažte, že $\mathbf{T}^{(2)*} = \mathbf{T}^{(2)}$.

Připomeňme, že

$$\mathbf{T}^{(2)} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T}$$

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}, \quad J^* = J$$

$$\text{smíšený tenzor: } \mathbf{F}^*(t) = \mathbf{O}(t) \cdot \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{O}^T(0)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(2)*} &= J^*(\mathbf{F}^*)^{-1} \cdot \mathbf{t}^* \cdot (\mathbf{F}^*)^{-T} = J^*(\mathbf{O} \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot (\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T) \cdot (\mathbf{O} \cdot \mathbf{F})^{-T} = \\ &= J^*(\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{O}^{-1}) \cdot (\mathbf{O} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{O}^T) \cdot (\mathbf{O}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-T}) = J^*\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{T}^{(2)} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{(2)*} = \mathbf{T}^{(2)}$$

Příklad 4: Ukažte, že $l^* = \mathbf{O} \cdot l \cdot \mathbf{O}^T + \Omega$.

Připomeňme si

$$\vec{x}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{x} + \vec{b}^*, \quad \vec{v}^* = \mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^* \\ l = (\text{grad } \vec{v})^T, \quad \Omega = \dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T$$

$$l^{*T} = \text{grad } \vec{v}^* = \text{grad}(\mathbf{O} \cdot \vec{v} + \dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x} + \dot{\vec{b}}^*) = \text{grad}(\underbrace{\mathbf{O} \cdot \vec{v}}_{1.} + \underbrace{\dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x}}_{2.})$$

1.

$$\begin{aligned} \text{grad}(\mathbf{O} \cdot \vec{v}) &= \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_\alpha^*} \otimes (O_{\beta i} (\vec{e}_\beta^* \otimes \vec{e}_i) \cdot v_j \vec{e}_j) = \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_\alpha^*} \otimes (O_{\beta i} \vec{e}_\beta^* v_i) = (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_\beta^*) O_{\beta i} \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha^*} = \\ &= (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_\beta^*) O_{\beta i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x_\alpha^*} = (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_\beta^*) O_{\beta i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} O_{\alpha k} = (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_\beta^*) O_{\beta i} l_{ik} O_{\alpha k} = (\mathbf{O} \cdot l \cdot \mathbf{O}^T)^T \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{grad}(\dot{\mathbf{O}} \cdot \vec{x}) &= \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_\alpha^*} \otimes (\dot{O}_{\beta i} (\vec{e}_\beta^* \otimes \vec{e}_i) \cdot x_j \vec{e}_j) = \vec{e}_\alpha^* \frac{\partial}{\partial x_\alpha^*} \otimes (\dot{O}_{\beta i} \vec{e}_\beta^* x_i) = (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_\beta^*) \dot{O}_{\beta i} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha^*} = \\ &= (\vec{e}_\alpha^* \otimes \vec{e}_\beta^*) \dot{O}_{\beta i} O_{\alpha i} = (\dot{\mathbf{O}} \cdot \mathbf{O}^T)^T = \Omega^T \end{aligned}$$

$l^* = \mathbf{O} \cdot l \cdot \mathbf{O}^T + \Omega$

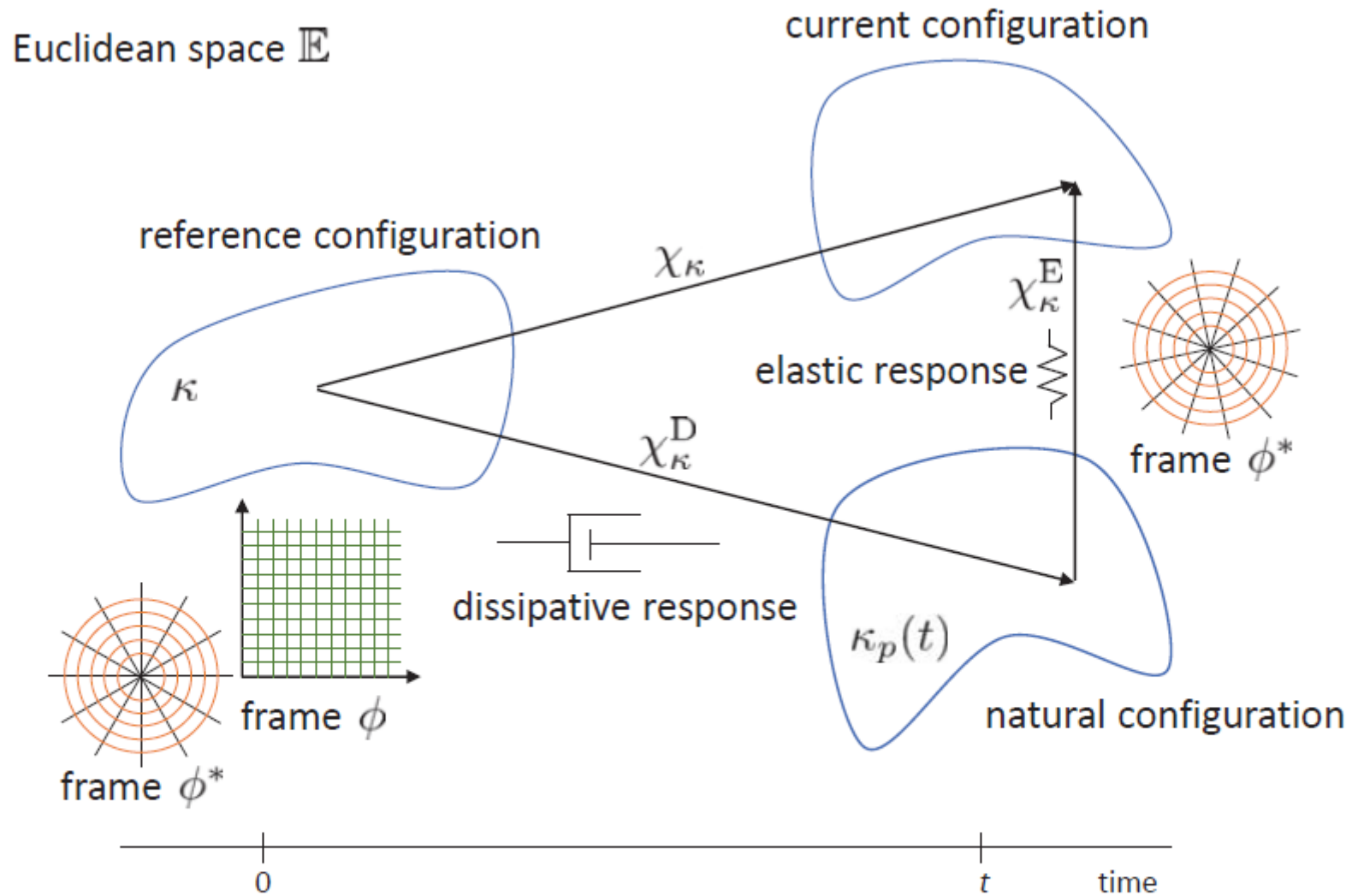


Figure 1.3: Reference, current and natural configurations associated with a viscoelastic body, as viewed from a fixed Cartesian frame ϕ and from a moving polar frame ϕ^* . For a description of the concept of change of frame see also Fig. 1.2.

Příklad 5: Ukažte, že vztah odvozený ve cvičení 6 pro maxwellovské těleso není objektivní.

$$\mathbf{t}^D - \eta \left[\text{grad } \vec{v} + (\text{grad } \vec{v})^T \right] = -\frac{\eta}{\mu} \left(\frac{\partial \mathbf{t}^D}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \mathbf{t}^D \right)$$

neboli

$$\mathbf{t}^D = 2\eta \mathbf{d} - \frac{\eta}{\mu} \dot{\mathbf{t}}^D$$

Pokud by vztah byl objektivní, měli bychom dostat $\mathbf{t}^{D*} = 2\eta \mathbf{d}^* - \frac{\eta}{\mu} \dot{\mathbf{t}}^{D*}$.

$$\mathbf{t}^{D*} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{t}^D \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{O} \cdot \left(2\eta \mathbf{d} - \frac{\eta}{\mu} \dot{\mathbf{t}}^D \right) \cdot \mathbf{O}^T = 2\eta \mathbf{O} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}^T - \frac{\eta}{\mu} \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{t}}^D \cdot \mathbf{O}^T = 2\eta \mathbf{d}^* - \frac{\eta}{\mu} \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{t}}^D \cdot \mathbf{O}^T$$

Připomeňme, že

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{O} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{O}^T \rightarrow \dot{\mathbf{A}}^* = \mathbf{O} \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{O}^T + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}^* - \mathbf{A}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

A tedy

$$\mathbf{t}^{D*} = 2\eta \mathbf{d}^* - \frac{\eta}{\mu} \dot{\mathbf{t}}^{D*} + \underbrace{\frac{\eta}{\mu} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{t}^{D*} - \mathbf{t}^{D*} \cdot \boldsymbol{\Omega})}_{\text{není objektivní}}$$

Snadno se přesvědčíme o tom, že správná (objektivní) formulace pro maxwellovské těleso je

$$\mathbf{t}^D = 2\eta \mathbf{d} - \frac{\eta}{\mu} \nabla_D \mathbf{t}^D$$

Příklad 6: Ukažte, že konstitutivní vztah $\mathbf{T}^{(2)} = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C}, \dot{\mathbf{C}})$ je objektivní.

Řešení: Víme, že platí

$$\mathbf{T}^{(2)} = \mathbf{T}^{(2)*}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^*.$$

Ukážeme, že stejný vztah platí i pro materiálovou derivaci:

$$\dot{\mathbf{C}} = 2(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}) \quad \text{viz Kinematika deformace}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}}^* &= 2[(\mathbf{F}^*)^T \cdot \mathbf{d}^* \cdot \mathbf{F}^*] = 2[(\mathbf{O} \cdot \mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{O} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}^T) \cdot (\mathbf{O} \cdot \mathbf{F})] = \\ &= 2[\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O} \cdot \mathbf{F}] = 2(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}) = \dot{\mathbf{C}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}^{(2)*} = \tilde{\mathbf{T}}^{(2)}(\mathbf{C}^*, \dot{\mathbf{C}}^*)$$