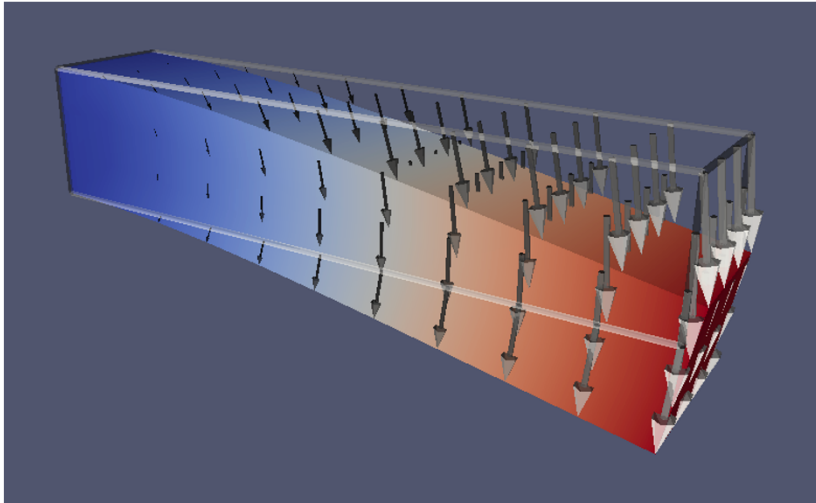


MKI: Formulace rovnic, klasické problémy kontinua

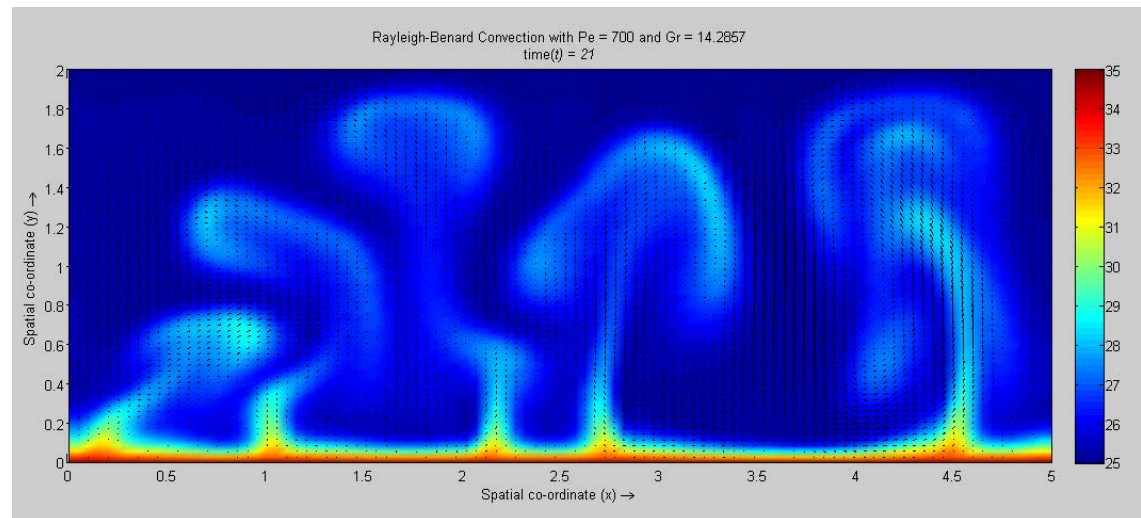


Lagrangeovský popis:

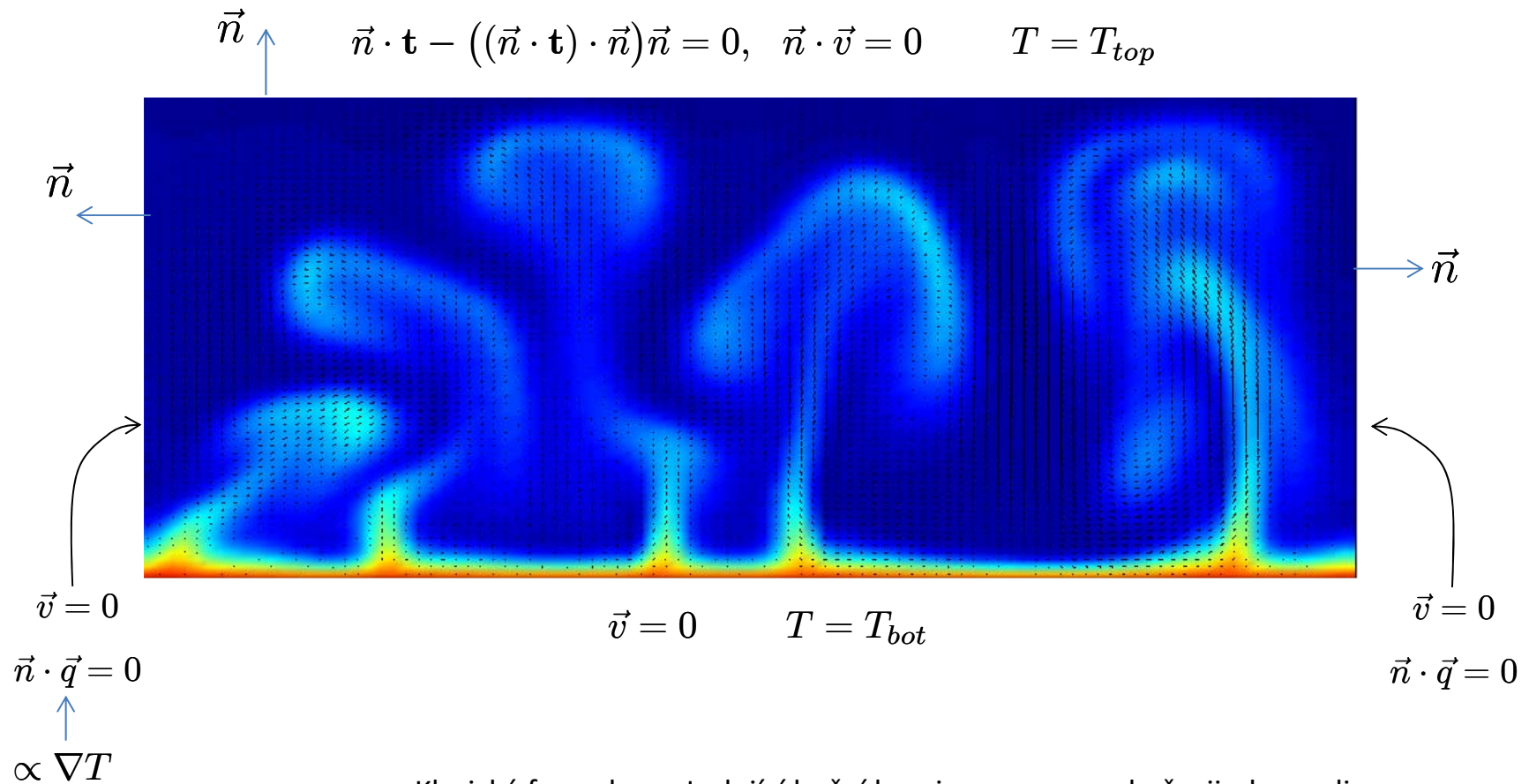
- pracují v konfiguraci před deformací
- tuhá tělesa

Eulerovský popis:

- pracují v okamžité konfiguraci
- tekutiny



MKII: Rozcestník numerického modelování v (geo)fyzice

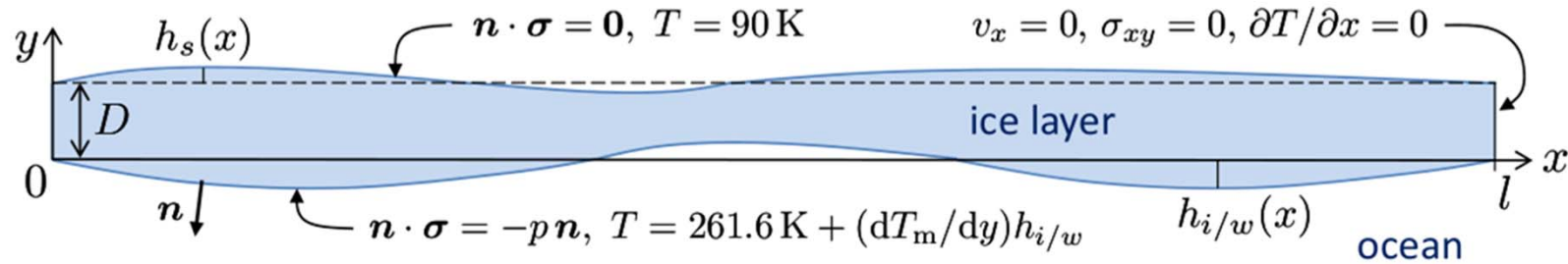


Klasická formulace: Izolující boční hranice, ... nahoře, jinde no slip.

Skutečnost: volný povrch, 3D sférická geometrie, kombinovaná reologie

- Jak postupovat numericky?

Ledové měsíce Jupiteru a Saturnu



Stefan's problem:

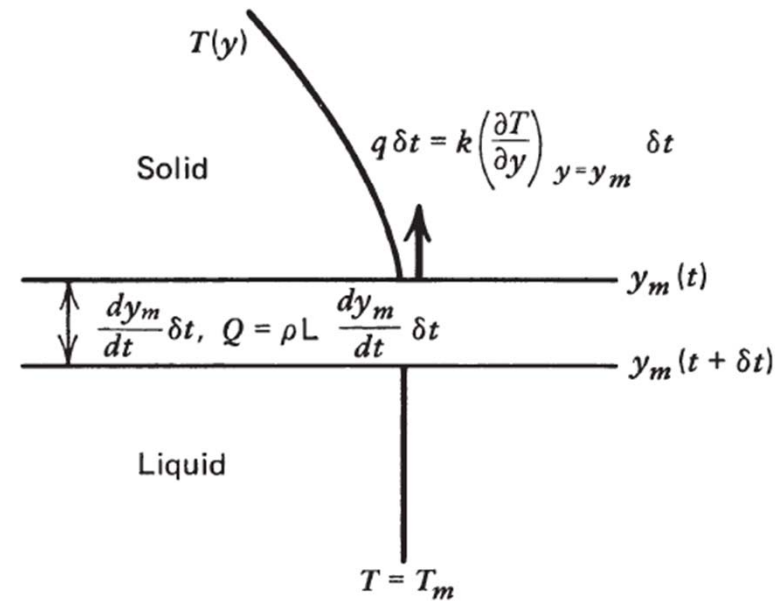
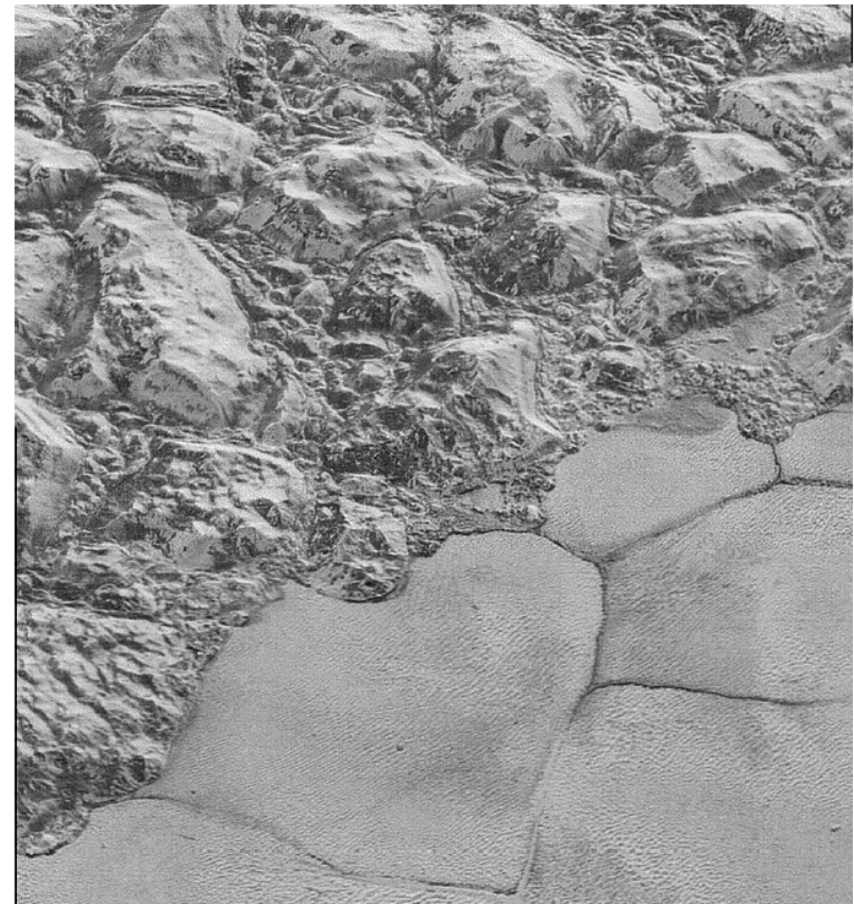
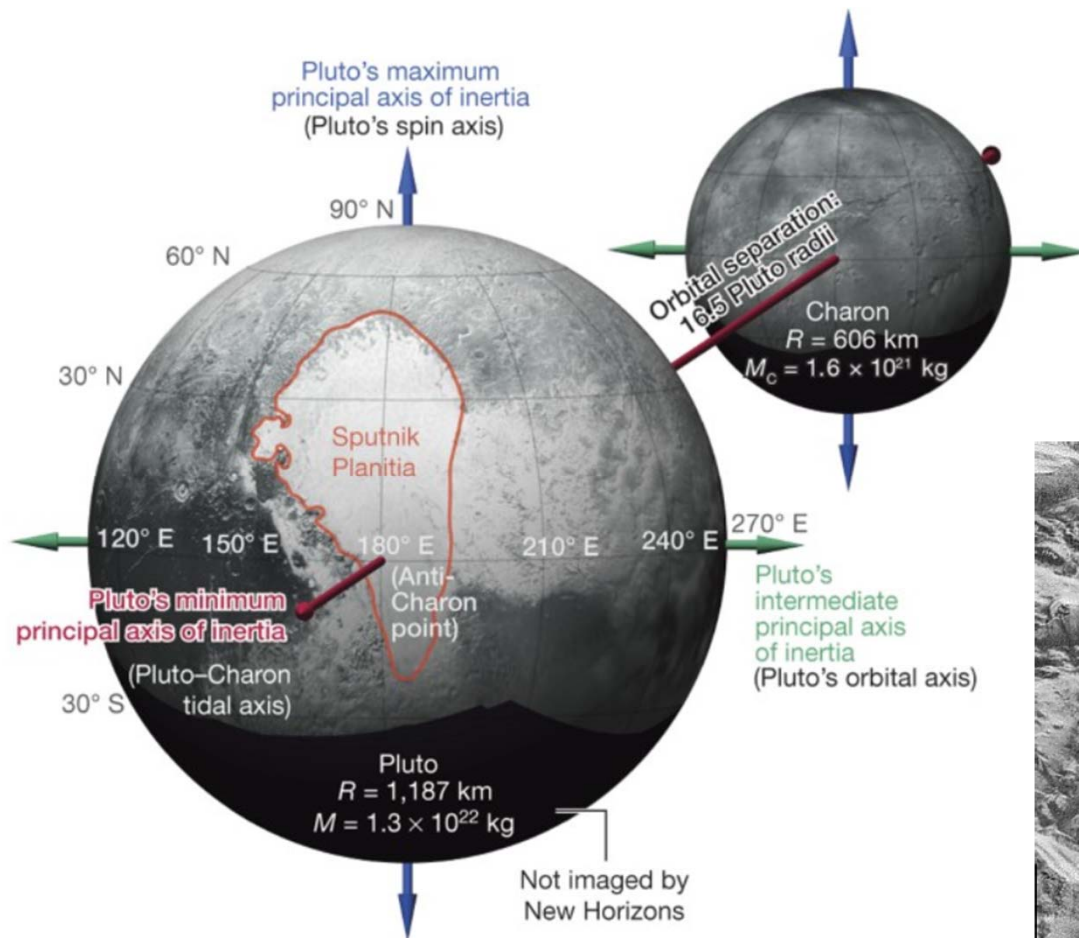
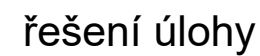
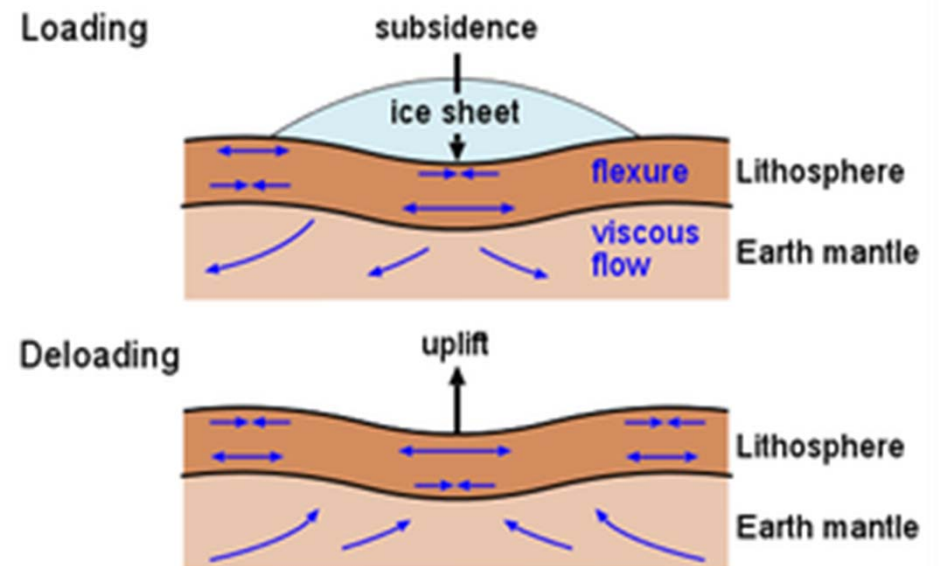


Figure 4.30 Latent heat released at the solidification boundary must be conducted upward through the solidified layer.

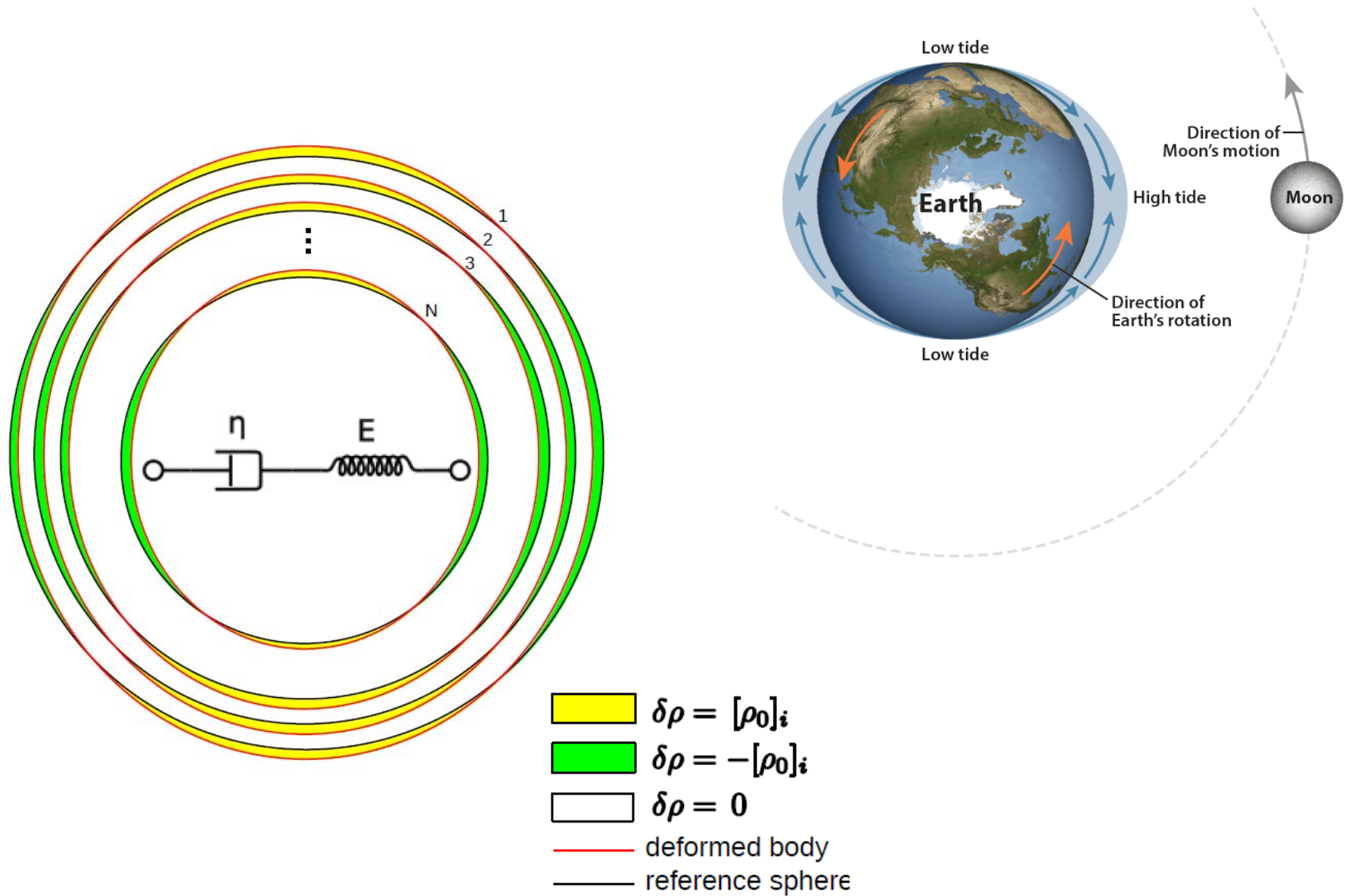


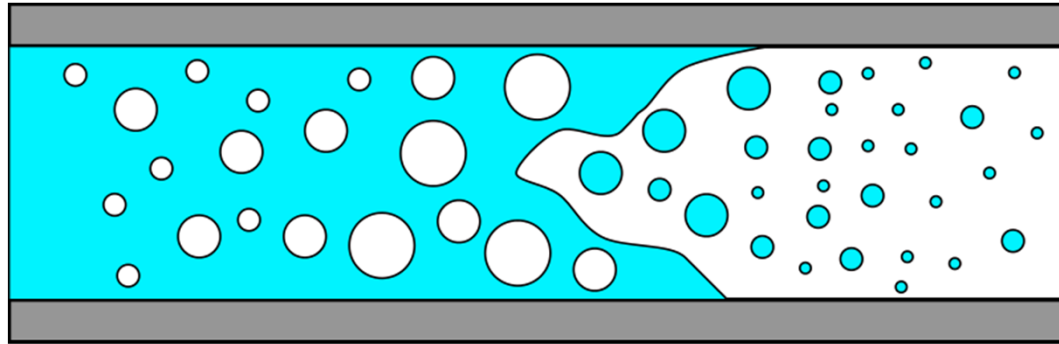


Postglaciální výzdvih: otázka předpětí

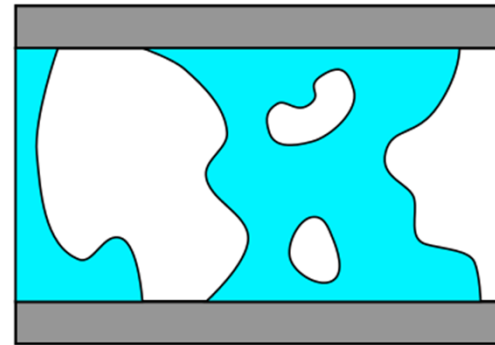
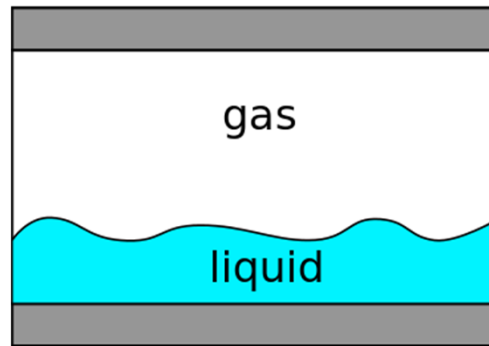


Problémy malých deformací: slapy, rotace, rebound

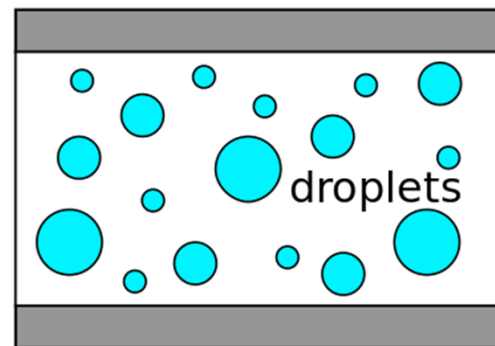
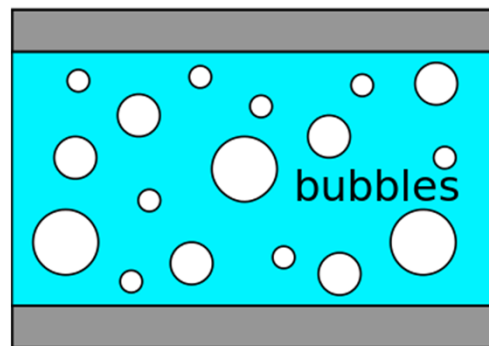




a) Transient two-phase flow.

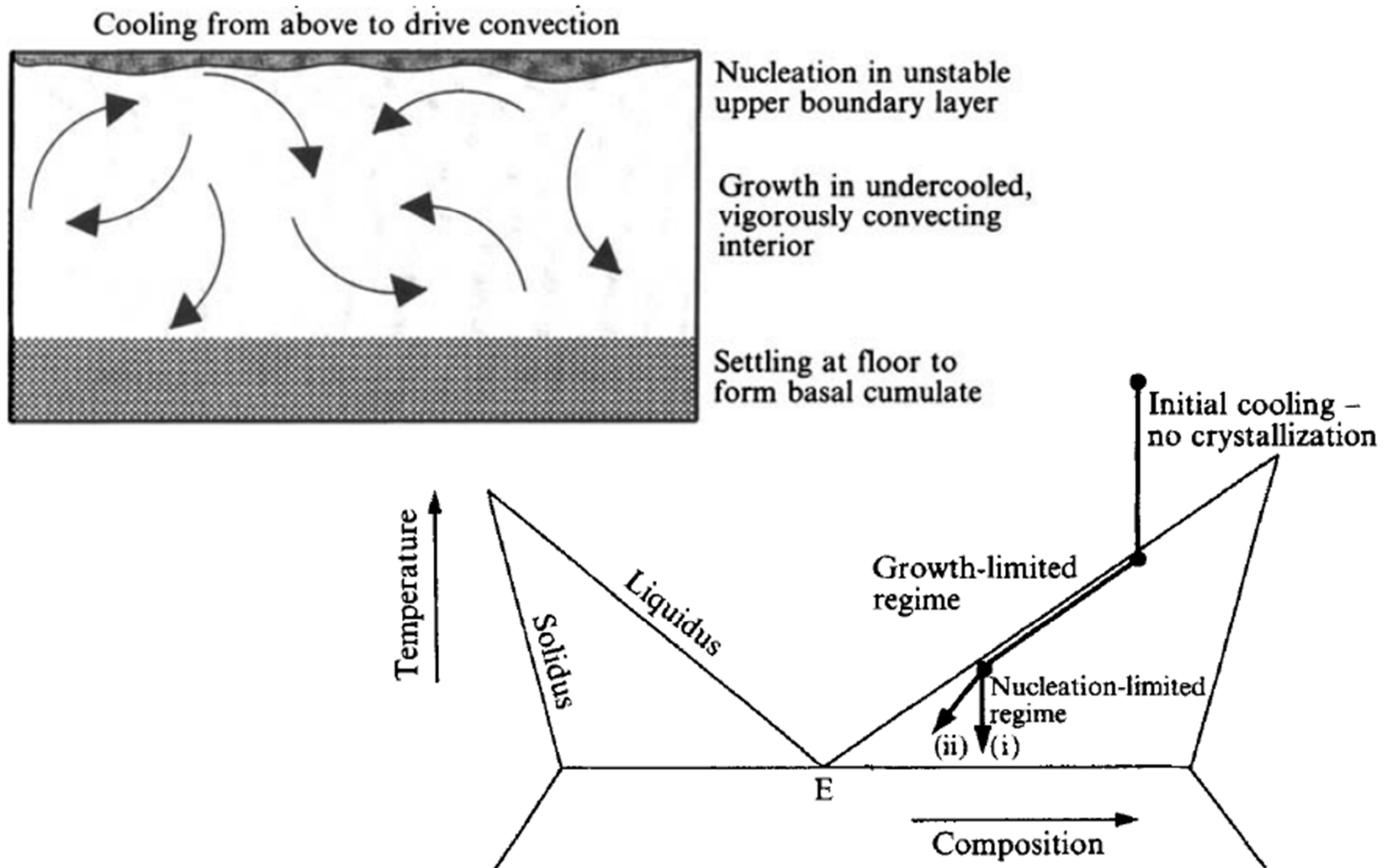


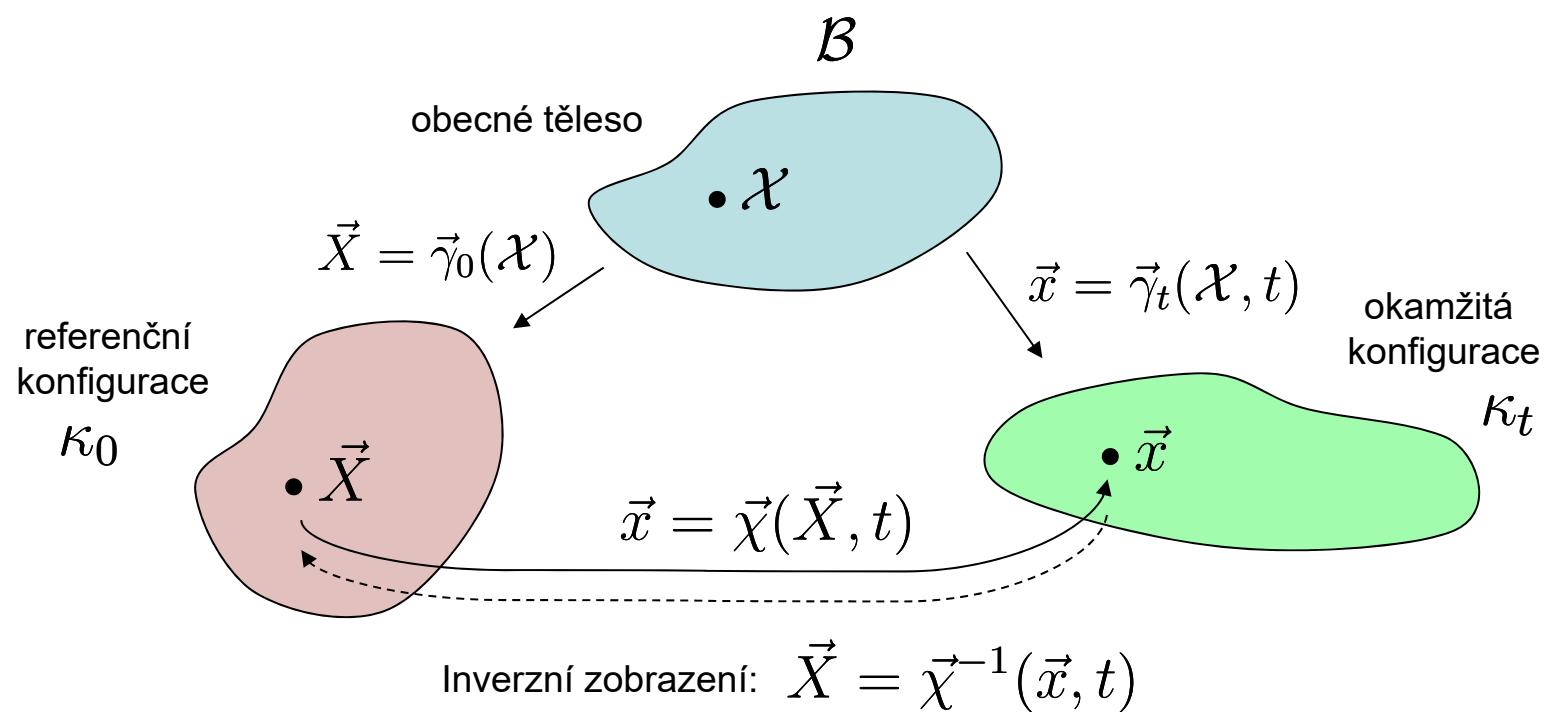
b) Separated two-phase flow.

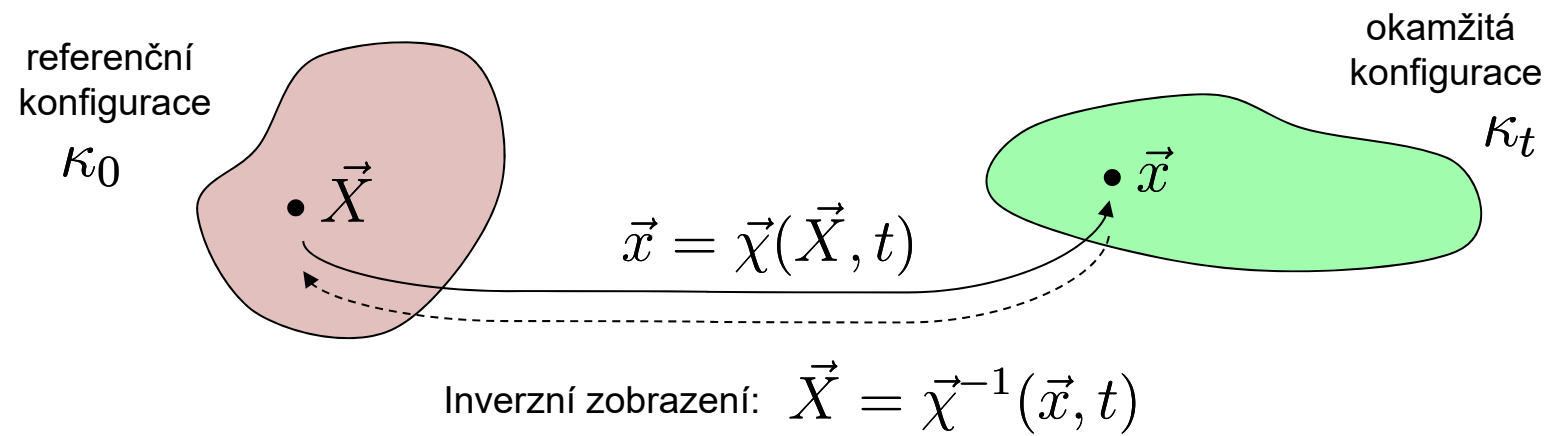


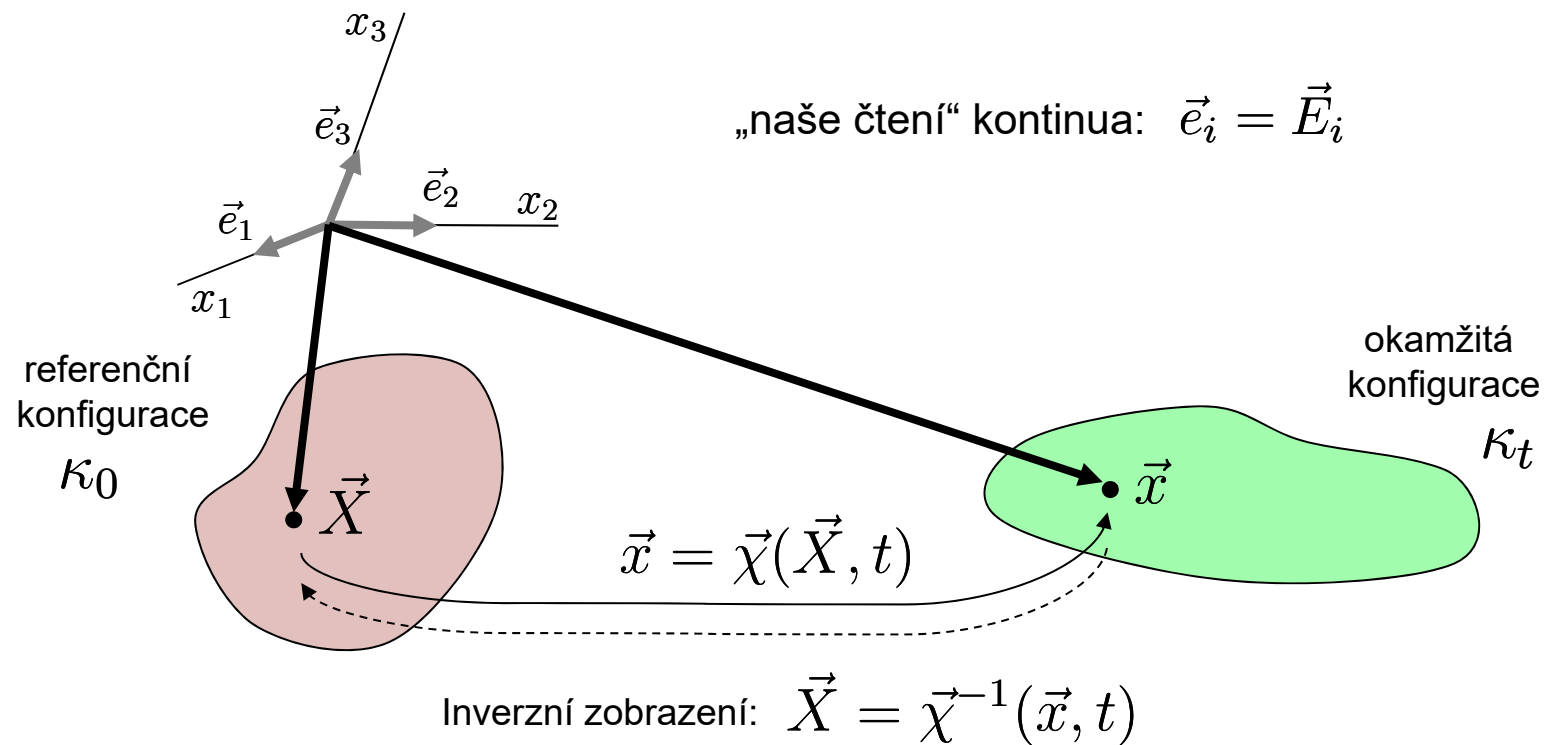
c) Dispersed two-phase flow.

Particle-laden flow, solidification of liquid reservoirs







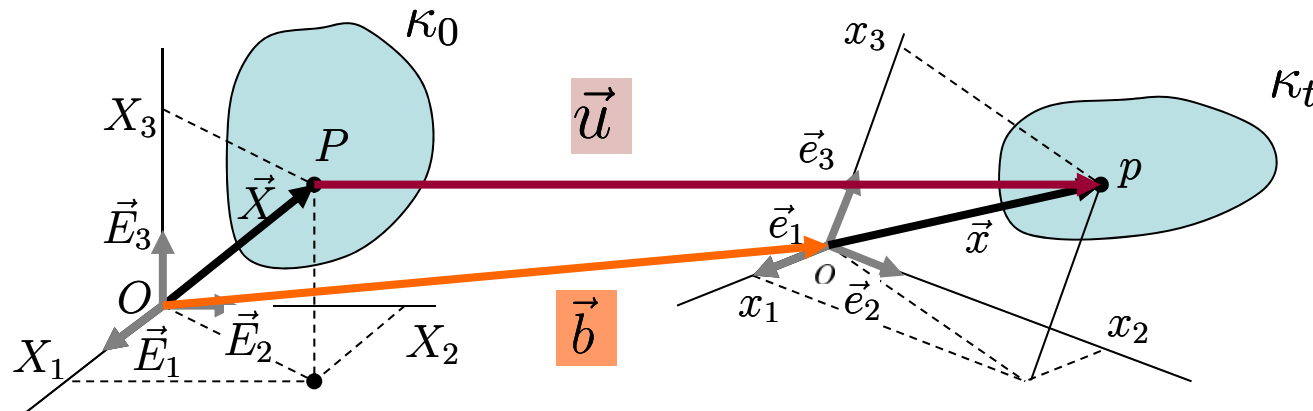


Materiálový deformační gradient

$$\mathbf{F}(\vec{X}, t) := \chi_{k,K}(\vec{X}, t)(\vec{e}_k \otimes \vec{E}_K) = \mathbf{F} = (\text{Grad} \vec{\chi})^T$$

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

Vektor posunutí (displacement vector)



Geometrická míra deformace může být vyjádřena pomocí vektoru posunutí:

$$\vec{u} := \vec{x} - \vec{X} + \vec{b}$$

Vektor posunutí může být interpretován buď lagrangeovsky nebo eulerovsky:

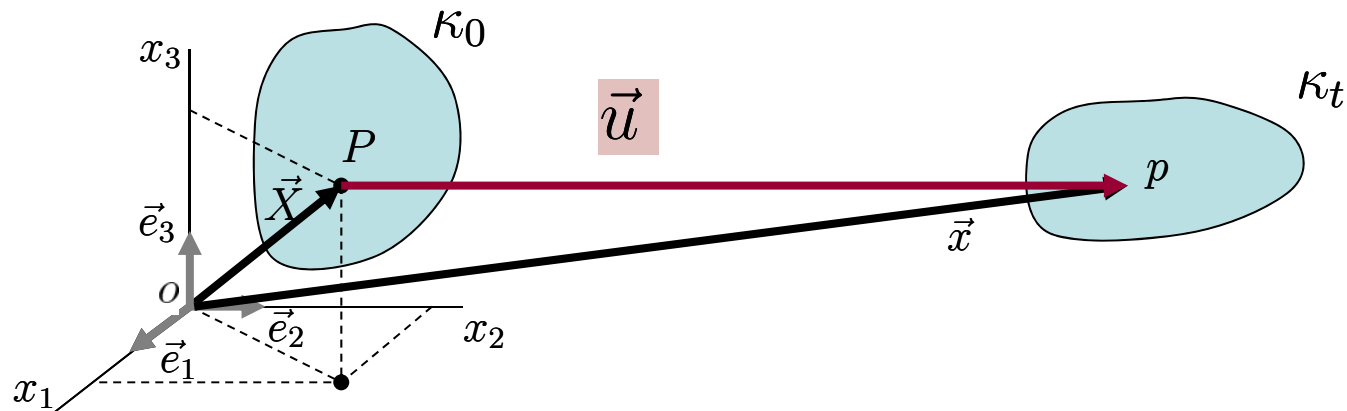
$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{\chi}(\vec{X}, t) - \vec{X} + \vec{b}, \quad \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t) + \vec{b}$$

Vynásobme první výraz vektorem $\vec{e}_k$ a druhý výraz vektorem $\vec{E}_K$:

$$U_k(\vec{X}, t) = \chi_k - \delta_{kL} X_L + b_k, \quad u_K(\vec{x}, t) = \delta_{Kl} x_l - \chi_K^{-1} + b_K$$

„shifter“
viz str. 7

Vektor posunutí (*displacement vector*)



Geometrická míra deformace může být vyjádřena pomocí vektoru posunutí:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) := \vec{x} - \vec{X}$$

Vektor posunutí může být interpretován buď lagrangeovsky nebo eulerovsky:

$$\vec{U}(\vec{X}, t) = \vec{\chi}(\vec{X}, t) - \vec{X}, \quad \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{x} - \vec{\chi}^{-1}(\vec{x}, t)$$

Vynásobme první výraz vektorem $\vec{e}_k$ a druhý výraz vektorem $\vec{E}_K$:

$$U_k(\vec{X}, t) = \chi_k - X_k, \quad u_k(\vec{x}, t) = x_k - \chi_k^{-1}$$

Cvičení 8: Objektivita

Euclidean space $\mathbb{E}$

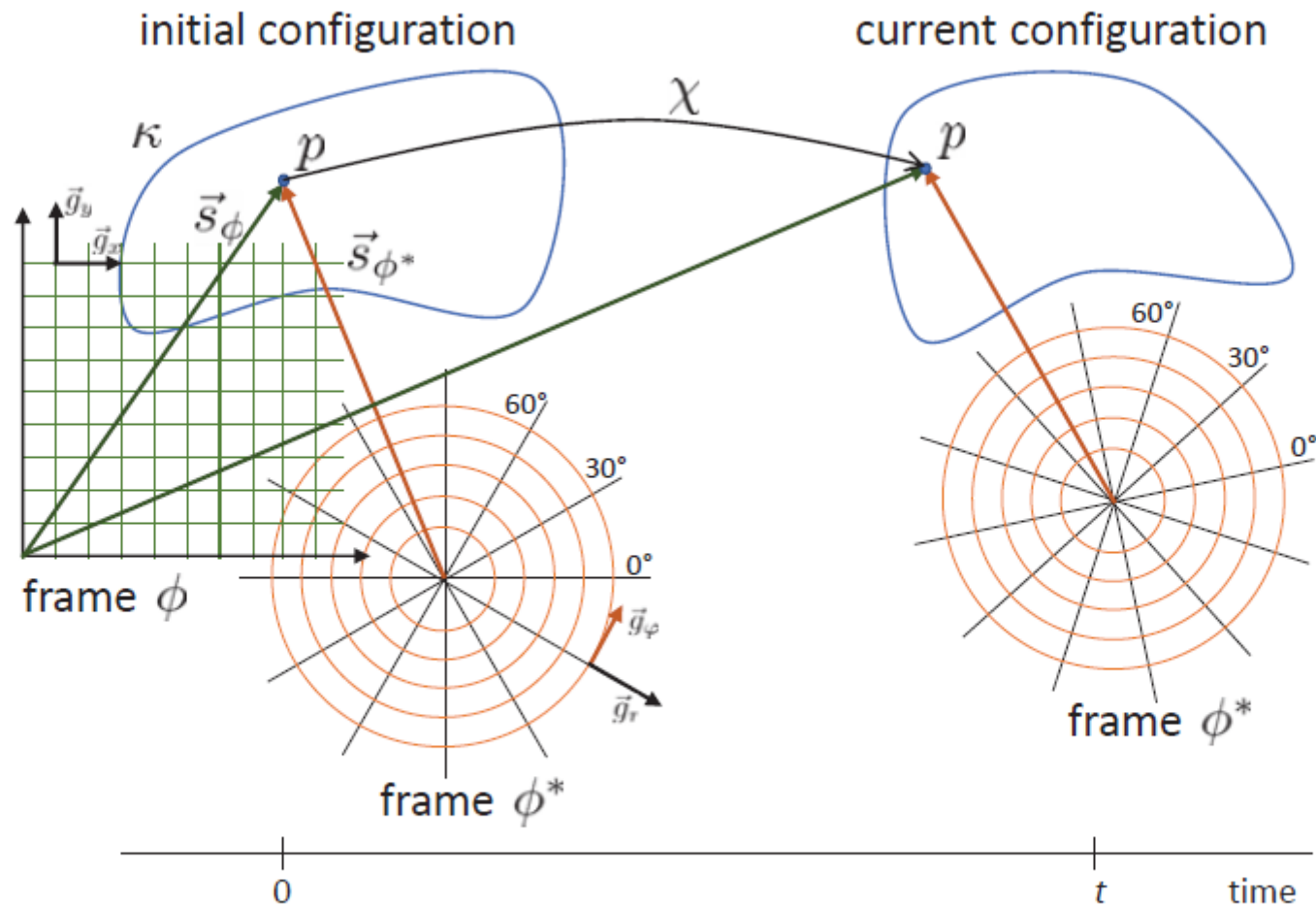
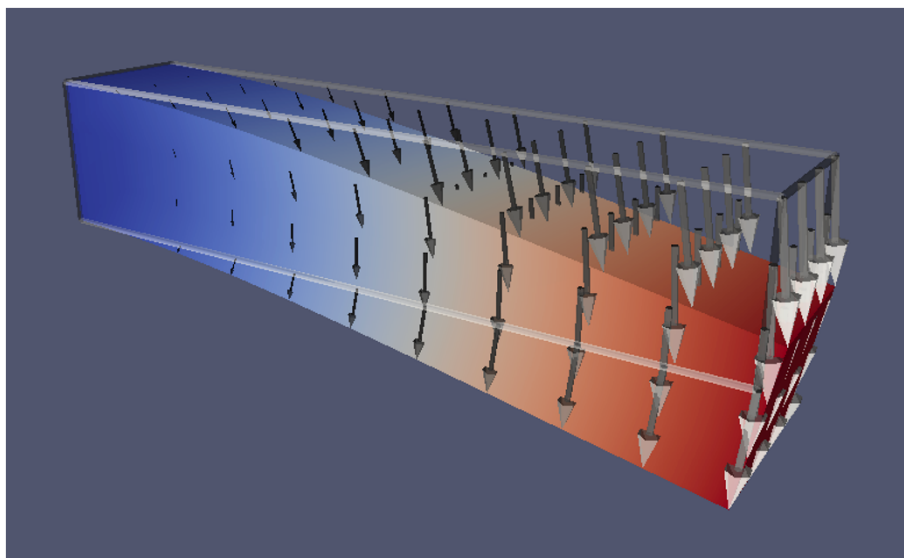


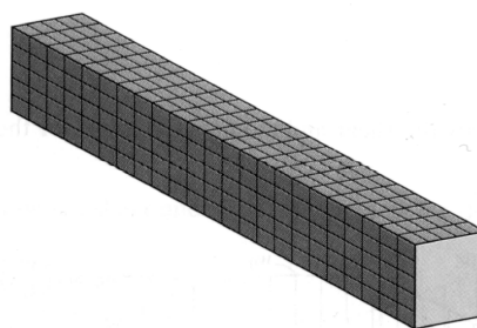
Figure 1.2: Position of particle p at times 0 and t , as viewed from fixed Cartesian frame $\phi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$ and from moving polar frame $\phi^*: \mathbb{E} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$.



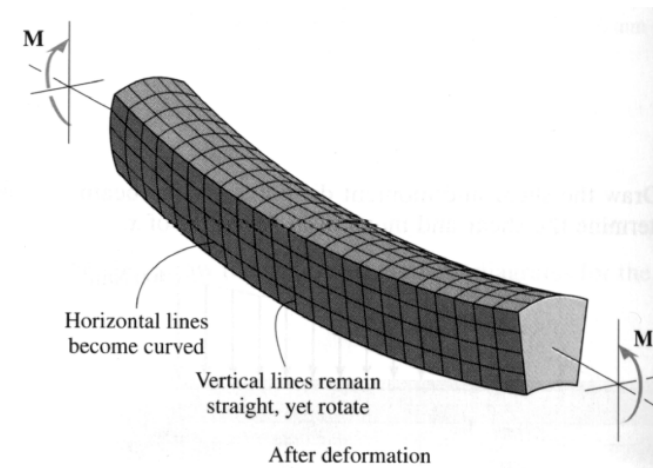
$$\text{Grad } \vec{V} = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \vec{v}$$

skalární pole, v kartézských souřadnicích:

$$\text{Grad } \Theta \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \text{Grad } \Theta = \vec{s} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \theta) = (\mathbf{F} \cdot \vec{s}) \cdot \text{grad } \theta = \text{grad } \theta \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{s})$$



Before deformation



After deformation

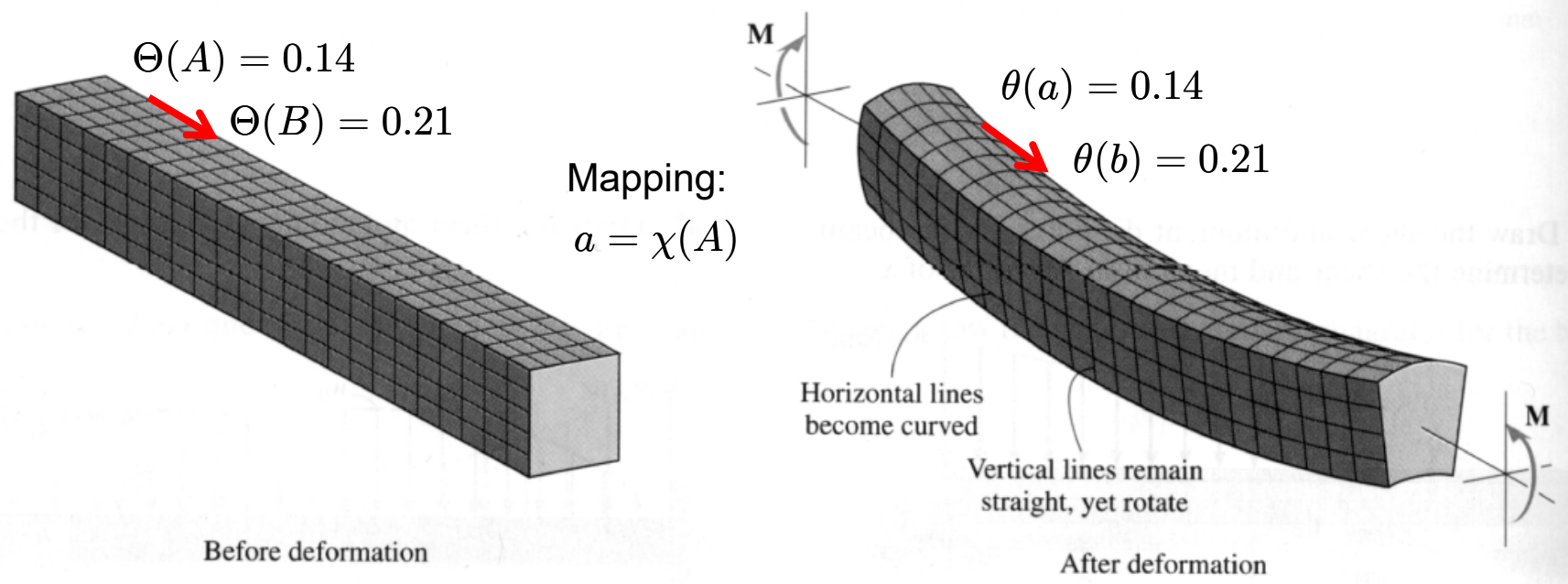
Množiny stejných vektorů, „žijících“ na jiné doméně

Prostorovou diferenciaci lagrangeovských a eulerovských polí je nutno rozlišovat

$$\text{Grad } \vec{V} = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \vec{v}$$

Skalární pole, v kartézských souřadnicích:

$$\text{Grad } \Theta \cdot \vec{s} = \vec{s} \cdot \text{Grad } \Theta = \vec{s} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \text{grad } \theta) = (\mathbf{F} \cdot \vec{s}) \cdot \text{grad } \theta = \text{grad } \theta \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{s})$$



Množiny stejných vektorů (soubor stejných hodnot), „žijících“ ale na jiné doméně
Prostorovou diferenciaci lagrangeovských a eulerovských polí je nutno rozlišovat

Důležité vztahy a tvrzení:

$$(\vec{v} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{w} = \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w})$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{w}$$

$$(\vec{v} \otimes \vec{u}) \cdot (\vec{w} \otimes \vec{x}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \otimes \vec{x})$$

$$\mathbf{I} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{I} = \vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{v} = v^2$$

$$\mathbf{T} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{T}^T$$

$$\mathbf{T} \cdot (\phi \vec{v}) = \phi(\mathbf{T} \cdot \vec{v})$$

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}$$

$$(\mathbf{T}^{-1})^T = (\mathbf{T}^T)^{-1} =: \mathbf{T}^{-T}$$

$$\vec{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \vec{v} = \mathbf{T} : (\vec{v} \otimes \vec{u})$$

$$\vec{v} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\vec{v} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \cdot (\phi \mathbf{B}) = \phi(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$$

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T)^T = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T)^T, \text{ tj. matice } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T \text{ je symetrická}$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ jsou symetrické} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T$$

$$\mathbf{P}, \mathbf{Q} \text{ jsou ortogonální} \Rightarrow \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \text{ je rovněž ortogonální}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

$$\det \mathbf{I} = 1$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$$

$$\det(\phi \mathbf{T}) = \phi^3 \det \mathbf{T} \quad \text{pro } \mathbf{T}_{3 \times 3}$$

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$$

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{Jacobi}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} - \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{d}) + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{c} \times \vec{b}$$

$$(\mathbf{T} \cdot \vec{a}) \times (\mathbf{T} \cdot \vec{b}) = (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-T} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c}) = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})] \vec{a}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad \text{Lagrange}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad \text{Binet-Cauchy}$$

Diferenciální operátor nabra – užitečné identity:

$$\nabla(ab) = a\nabla b + b\nabla a$$

$$\nabla \cdot (a\vec{v}) = a\nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla a$$

$$\nabla \times (a\vec{v}) = a\nabla \times \vec{v} + \nabla a \times \vec{v}$$

$$\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \nabla \vec{u} \cdot \vec{v} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \times \vec{v}$$

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{v} + \vec{u} \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \nabla \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$\nabla \times (\nabla a) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \cdot [(\nabla \vec{v})^T]$$

$$\nabla \cdot (\nabla \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla(a\vec{v}) = a\nabla \vec{v} + \nabla a \otimes \vec{v}$$

$$\nabla \cdot (a\mathbf{T}) = a\nabla \cdot \mathbf{T} + \nabla a \cdot \mathbf{T}$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{v}$$

K odvození potřebujeme vztahy pro operace s vektory a tenzory a pravidla pro derivování funkcí.

Příklad:

$$\nabla \cdot (a\mathbf{T}) = (\vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}) \cdot [a T_{lm} (\vec{e}_l \otimes \vec{e}_m)] = [\frac{\partial}{\partial x_k} (a T_{lm})] [\vec{e}_k \cdot (\vec{e}_l \otimes \vec{e}_m)] = [T_{lm} \frac{\partial a}{\partial x_k} + a \frac{\partial T_{lm}}{\partial x_k}] [\vec{e}_k \cdot (\vec{e}_l \otimes \vec{e}_m)] = [T_{lm} \frac{\partial a}{\partial x_k} + a \frac{\partial T_{lm}}{\partial x_k}] \delta_{kl} \vec{e}_m =$$

$\uparrow$
 ∇

$\uparrow$
 $a\mathbf{T}$

$\uparrow$

oddělíme derivování
a vektorové operace

$\uparrow$

derivative
součinu

$\uparrow$

provedeme
vektorové
operace

$$= [T_{lm} \frac{\partial a}{\partial x_l} + a \frac{\partial T_{lm}}{\partial x_l}] \vec{e}_m = \frac{\partial a}{\partial x_l} T_{lm} \vec{e}_m + a \frac{\partial T_{lm}}{\partial x_l} \vec{e}_m = \nabla a \cdot \mathbf{T} + a \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$\uparrow$
 $\nabla a \cdot \mathbf{T}$

$\uparrow$
 $a \nabla \cdot \mathbf{T}$

Polární rozklad deformačního gradientu – pokračování

Geometrie deformace

Zavedme tenzor $\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$

Platí

$$\det \mathbf{F} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \vec{v} \neq 0 \quad \text{pro} \quad \vec{v} \neq 0$$

A tedy

$$0 < (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{v}$$

Zavedme dále tenzory

pozitivně definitní

$$\mathbf{U} := \sqrt{\mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}, \quad \mathbf{V} := \sqrt{\mathbf{b}} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T}$$

Right stretch tensor

Left stretch tensor

A definujeme

$$\tilde{\mathbf{R}} := \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}$$

Platí, že

tenzor je symetrický

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$$

a analogicky pro $\tilde{\mathbf{R}}$. $\mathbf{R}$ a $\tilde{\mathbf{R}}$ jsou tedy **ortogonální matice** a platí

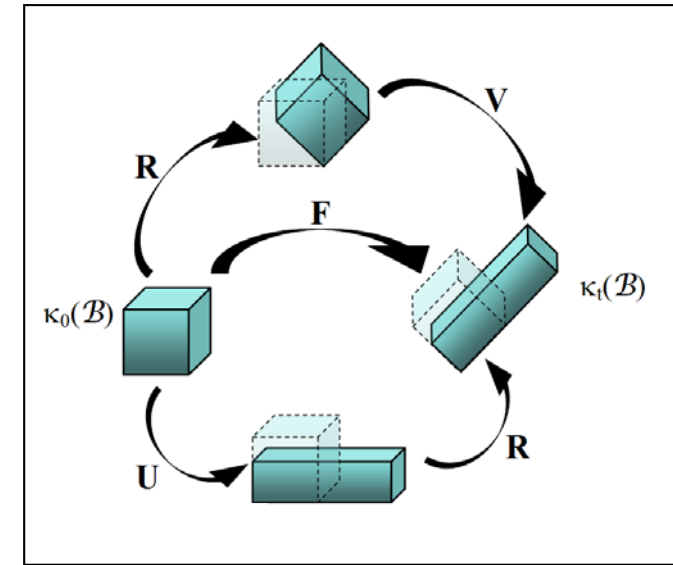
$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$$

Ukážeme ještě, že $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = (\tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}^T) \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot (\tilde{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{R}}) = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}, \quad \text{a tedy} \quad \mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}$$

$$\text{Odtud} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \tilde{\mathbf{U}}^2 \rightarrow \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \rightarrow \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$$

$$\text{Vlastní čísla a vektory:} \quad \lambda \vec{p} = \mathbf{U} \cdot \vec{p} \quad \text{a současně} \quad \lambda \mathbf{R} \cdot \vec{p} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \cdot \vec{p} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}) \cdot \vec{p} = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{R} \cdot \vec{p})$$



Tenzor deformace

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{X}) = d\vec{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X} = \mathbf{C} : (d\vec{X} \otimes d\vec{X})$$

$$dS^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\vec{x}) = d\vec{x} \cdot \mathbf{c} \cdot d\vec{x} = \mathbf{c} : (d\vec{x} \otimes d\vec{x})$$

Pro změny objemu pak máme:

$$dv = JdV = \det \mathbf{F} dV = (1 + \text{tr } \mathbf{H})dV + O(|\mathbf{H}|^2) = (1 + \text{Div} \vec{U})dV + O(|\mathbf{H}|^2)$$

neboť

$$\text{tr } \mathbf{H} = H_{KK} = U_{K,K} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} = \text{Div} \vec{U}$$

V linearizovaném případě tedy platí

$$dv \approx (1 + \text{Div} \vec{U})dV$$

Nediagonální složky tenzoru deformace – změny úhlů

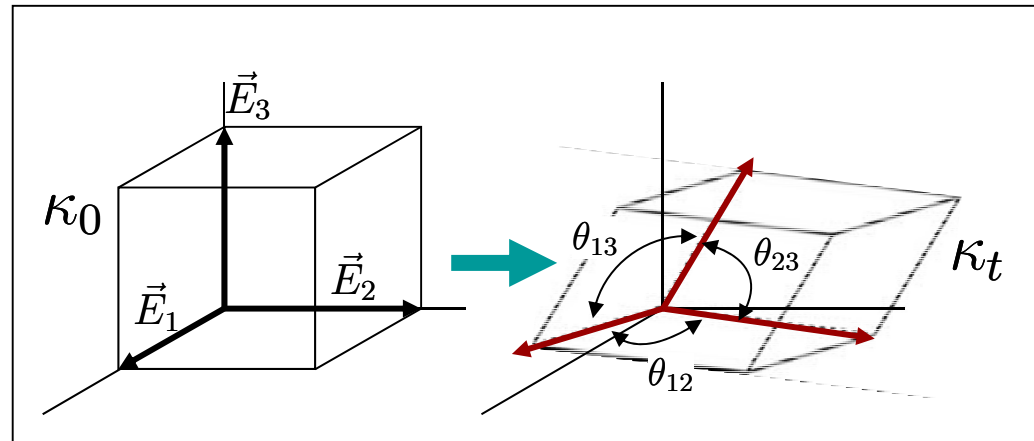
Geometrie deformace

Uvažujme dva směry dané vektory

$$\vec{K}^{(1)} := \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}}, \quad \vec{K}^{(2)} := \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$

Úhel mezi těmito dvěma vektory v konfiguraci κ_0 je

$$\cos \Theta = \frac{d\vec{X}^{(1)}}{dS^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{X}^{(2)}}{dS^{(2)}}$$



V důsledku deformace je tento úhel změněn na

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{d\vec{x}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{d\vec{x}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(1)}}{ds^{(1)}} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(2)}} = \frac{d\vec{X}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot d\vec{X}^{(2)}}{ds^{(1)} ds^{(2)}} = (\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}) \frac{dS^{(1)}}{ds^{(1)}} \frac{dS^{(2)}}{ds^{(2)}} = \\ &= \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{K}^{(2)}}{(E_{(\vec{K}^{(1)})} + 1)(E_{(\vec{K}^{(2)})} + 1)} = \frac{\vec{K}^{(1)} \cdot (\mathbf{I} + 2\mathbf{E}) \cdot \vec{K}^{(2)}}{\sqrt{1 + \vec{K}^{(1)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(1)}} \sqrt{1 + \vec{K}^{(2)} \cdot 2\mathbf{E} \cdot \vec{K}^{(2)}}} \end{aligned}$$

Zvolíme-li $\vec{K}^{(1)} = \vec{E}_1$, $\vec{K}^{(2)} = \vec{E}_2$, $\vec{K}^{(3)} = \vec{E}_3$, pak

$$\cos \theta_{12} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{22}}}, \quad \cos \theta_{13} = \frac{2E_{13}}{\sqrt{1 + 2E_{11}}\sqrt{1 + 2E_{33}}}, \quad \cos \theta_{23} = \frac{2E_{23}}{\sqrt{1 + 2E_{22}}\sqrt{1 + 2E_{33}}}$$

Reynoldsův transportní teorém

Kinematika

Chceme vyjádřit integrál $\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi \, dv$, kde ϕ je nějaké skalární pole.

Krok 1: Integraci přes časově proměnnou oblast nahradíme integrací přes pevný objem.

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi \, dv = \frac{D}{Dt} \int_V \Phi \, J \, dV$$

Krok 2: Integrační objem V nezávisí na čase, takže lze zaměnit pořadí derivování a integrování.

$$\frac{D}{Dt} \int_V \Phi \, J \, dV = \int_V \frac{D}{Dt} (\Phi J) \, dV = \int_V \left(\frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi \frac{DJ}{Dt} \right) dV$$

Krok 3: Použijeme identitu $\dot{J} = J \operatorname{div} \vec{v}$:

$$\int_V \left(\frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi \frac{DJ}{Dt} \right) dV = \int_V \left(\frac{D\Phi}{Dt} J + \Phi J \operatorname{div} \vec{v} \right) dV = \int_V \left(\frac{D\Phi}{Dt} + \Phi \operatorname{div} \vec{v} \right) J \, dV$$

Krok 4: Vrátime se zpět do okamžité konfigurace ($\Phi \rightarrow \phi$, $J \, dV = dv$) a dostaneme :

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi \, dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv$$

Reynoldsův
nebo také Leibnitz-Reynoldsův
transportní teorém

Poznámka: Osborn Reynolds (1842 Severní Irsko -1912 Anglie; hlavní přínos v oblasti mechaniky kapalin; Reynoldsovo číslo)

Reynoldsův transportní teorém – další možné tvary

Kinematika

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv$$

Rozepíšeme materiálovou derivaci v integrandu a použijeme identitu $\operatorname{div}(\phi \vec{v}) = \phi \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \phi$:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv = \int_{v(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \phi + \phi \operatorname{div} \vec{v} \right) dv = \int_{v(t)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi \vec{v}) \right) dv$$

Použijeme Gaussovu větu ($\int_v \operatorname{div} \vec{u} dv = \int_s \vec{n} \cdot \vec{u} da$) na druhý člen v integrandu a dostaneme

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_{s(t)} \phi (\vec{n} \cdot \vec{v}) da$$

Pro vektorovou veličinu ($\vec{q}$ namísto ϕ) je odvození obdobné, pouze je třeba použít identitu

$\operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{q}) = \vec{q} \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{q}$ a Gaussovu větu ve tvaru $\int_v \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \int_s \vec{n} \cdot \mathbf{A} da$.

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \vec{q} dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\vec{q}}{Dt} + \vec{q} \operatorname{div} \vec{v} \right) dv = \int_{v(t)} \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} dv + \int_{s(t)} \vec{n} \cdot (\vec{v} \otimes \vec{q}) da$$

Podobně lze odvodit vztah pro materiálovou derivaci toku veličiny $\vec{q}$ přes povrch oblasti:

$$\frac{D}{Dt} \int_{s(t)} \vec{q} \cdot d\vec{a} = \int_{s(t)} \left(\frac{D\vec{q}}{Dt} + (\operatorname{div} \vec{v}) \vec{q} - \vec{q} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right) \cdot d\vec{a}$$

Geometrická linearizace (1)

V řadě aplikací, zejména v elasticitě, se setkáváme s případem tzv. malých deformací, který odpovídá matematické podmínce

$$|\mathbf{H}| \ll 1, \quad \text{kde} \quad |\mathbf{H}| = \sqrt{H_{KL}H_{KL}} = \sqrt{\mathbf{H} : \mathbf{H}^T}$$

Linearizace spočívá v tom, že při úpravách podržíme členy řádu $|\mathbf{H}|$ a zanedbáme členy vyššího řádu.

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X}$$

Tento výraz lze obecně vyjádřit pomocí polárního rozkladu jako součin dvou matic, které popisují rotaci a deformaci:

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot d\vec{X} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \cdot d\vec{X}$$

Nyní chceme $d\vec{x}$ vyjádřit jako superpozici, tj. součet příspěvků od translace, rotace a deformace.

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}^T = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T - \mathbf{H}) + \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{E}}$$

linearizovaný
lagrangeovský
tenzor
rotace

linearizovaný
lagrangeovský
tenzor
deformace

A tedy pro malé deformace platí:

$$d\vec{x} = \mathbf{F} \cdot d\vec{X} = (\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{E}}) \cdot d\vec{X} = \underbrace{d\vec{X}}_{\text{translace}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{R}} \cdot d\vec{X}}_{\text{rotace}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{E}} \cdot d\vec{X}}_{\text{deformace}}$$

Geometrická linearizace (2) – tenzor deformace

Geometrie deformace

Podobně lze ukázat, že platí:

$$\det \mathbf{F} = 1 + \operatorname{tr} \mathbf{H} + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{H} - \mathbf{H}^T + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{1}{2}(\mathbf{H}^T - \mathbf{H}) + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\operatorname{grad} \bullet = \operatorname{Grad} \bullet - \mathbf{H} \cdot \operatorname{Grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\operatorname{div} \bullet = \operatorname{Div} \bullet - \mathbf{H} : \operatorname{Grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \bullet = \operatorname{Div} \operatorname{Grad} \bullet - 2\mathbf{H} : \operatorname{Grad} \operatorname{Grad} \bullet \\ - \operatorname{Div} \mathbf{H} \cdot \operatorname{Grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\operatorname{Grad} \bullet = \operatorname{grad} \bullet + \mathbf{H} \cdot \operatorname{grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\operatorname{Div} \bullet = \operatorname{div} \bullet + \mathbf{H} : \operatorname{grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

$$\operatorname{Div} \operatorname{Grad} \bullet = \operatorname{div} \operatorname{grad} \bullet - 2\mathbf{H} : \operatorname{grad} \operatorname{grad} \bullet \\ + \operatorname{Div} \mathbf{H} \cdot \operatorname{grad} \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

Linearizujte výraz $\text{div } \bullet = \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad } \bullet$

$$\begin{aligned} \text{div } \bullet &= \mathbf{F}^{-T} : \text{Grad } \bullet = (\mathbf{I} - \mathbf{h}^T)^T : \text{Grad } \bullet = (\mathbf{I} - \mathbf{h}) : \text{Grad } \bullet = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{H}) : \text{Grad } \bullet + O(|\mathbf{H}|^2) = \mathbf{I} : \text{Grad } \bullet - \mathbf{H} : \text{Grad } \bullet + O(|\mathbf{H}|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\delta_{IJ}(\vec{E}_I \otimes \vec{E}_J) : \vec{E}_K \otimes \frac{\partial}{\partial X_K} (\bullet_{LM\dots} \vec{E}_L \otimes \vec{E}_M \otimes \dots) = \\ &= \delta_{IJ} \delta_{JK} \delta_{IL} \frac{\partial}{\partial X_K} (\bullet_{LM\dots} \vec{E}_M \otimes \dots) = \frac{\partial}{\partial X_I} (\bullet_{IM\dots} \vec{E}_M \otimes \dots) = \text{Div } \bullet \end{aligned}$$

$$\text{div } \bullet = \text{Div } \bullet - \mathbf{H} : \text{Grad } \bullet + O(|\mathbf{H}|^2)$$

Zákon zachování hmoty (*mass conservation* nebo *continuity equation*)

Zákony
zachování
1

Celková hmota tělesa se při deformaci nemění.

$$\int_V \rho_0 dV = \int_{v(t)} \rho dv$$

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho dv = 0} \leftarrow \text{integrální formulace zákona zachování hmoty}$$

Pro získání lokálního tvaru zákona zachování hmoty použijeme Reynoldsův transportní teorém, který jsme odvodili v části Kinematika na str. 12 a kde obecnou skalární funkci ϕ nahradíme hustotou ρ .

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho dv = \int_{v(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) dv = 0}_{\text{Reynoldsův transportní teorém}}$$

Odtud

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0} \leftarrow \text{rovnice kontinuity (lokální formulace zákona zachování hmoty)}$$

Vyjádříme-li materiálovou derivaci a použijeme-li identitu $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$, dostaneme

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0} \leftarrow \text{alternativní tvar rovnice kontinuity}$$

Zákon zachování hybnosti – pohybová rovnice (*momentum equation*)

Zákony
zachování
2

Časová změna hybnosti tělesa je rovna celkové síle, která na těleso působí.

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v} dv = \int_{s(t)} \vec{t}_{(\vec{n})} da + \int_{v(t)} \rho \vec{f} dv \quad \leftarrow \text{integrální tvar pohybové rovnice}$$

↑
síla vztažená na jednotku hmoty (!)

K odvození lokálního tvaru zákona použijeme opět Reynoldsův transportní teorém (Kinematika na str. 13), kde vektorovou funkci $\vec{q}$ nahradíme součinem $\rho \vec{v}$.

Rozepíšme nejprve levou stranu integrálního zákona:

$$\frac{D}{Dt} \int_{v(t)} \rho \vec{v} dv = \underbrace{\int_{v(t)} \left[\frac{D(\rho \vec{v})}{Dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right] dv}_{\text{Reynoldsův transportní teorém}} = \int_{v(t)} \left[\vec{v} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v} \right] dv = \int_{v(t)} \left[\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} + \underbrace{\vec{v} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right)}_{= 0 \text{ (rovnice kontinuity)}} \right] dv$$

$$\text{Pravá strana: } \int_{s(t)} \vec{t}_{(\vec{n})} da + \int_{v(t)} \rho \vec{f} dv = \int_{s(t)} \vec{n} \cdot \mathbf{t} da + \int_{v(t)} \rho \vec{f} dv = \int_{v(t)} \operatorname{div} \mathbf{t} dv + \int_{v(t)} \rho \vec{f} dv = \int_{v(t)} (\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f}) dv$$

$$\text{Odtud } \int_{v(t)} \left[\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} - (\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f}) \right] dv = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad \text{resp.} \quad \operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \vec{v} \right) \quad \leftarrow \text{lokální tvar pohybové rovnice}$$

Poznámka: české slovo *hybnost* se v angličtině vyjadřuje jako *linear momentum*.

Konstitutivní vztahy – intuitivní přístup

Opakování:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

← rovnice kontinuity (zákon zachování hmoty)

$$\operatorname{div} \mathbf{t} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad \mathbf{t}^T = \mathbf{t} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{pohybová rovnice a symetrie Cauchyho tenzoru napětí} \\ \text{(zákon zachování hybnosti a momentu hybnosti)} \end{array}$$

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{t} : \mathbf{d} - \operatorname{div} \vec{q} + \rho h \quad \leftarrow \text{zákon zachování energie}$$

Neuvažujeme zde elektromagnetické jevy a chemické procesy. Termální procesy však nelze obecně vypustit, a to ze dvou důvodů:

- (i) v reálném světě dochází vždy k přeměně (disipaci) deformační energie na teplo
- (ii) deformační vlastnosti materiálů často silně závisí na teplotě

Zákony zachování obsahují **zdrojové členy** $\vec{f}, h$, o nichž předpokládáme, že jsou dány, a **neznámé** $\rho, \vec{v}, \mathbf{t}, \epsilon, \vec{q}, (T)$.

Uvažujeme-li symetrii Cauchyho tenzoru napětí, pak celkový počet neznámých (ve složkách) je celkem $1+3+6+1+3+(1) = \mathbf{14}$ (**15**), zatímco zákony zachování dávají rovnic pouze $1+3+1 = \mathbf{5}$.

Abychom mohli určit neznámé veličiny, musíme charakterizovat vlastnosti studovaného materiálu, to jest specifikovat **konstitutivní vztahy**, a to tak, aby počet neznámých odpovídal počtu rovnic.